

## Влияние нелинейности на оценки связанности осцилляторов методом частной направленной когерентности

Д. И. Астахова<sup>1</sup>✉, М. В. Сысоева<sup>2,3</sup>, И. В. Сысоев<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., Россия

<sup>3</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия  
E-mail: ✉astakhovadi@mail.ru, bobrichek@mail.ru, ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию *т.т.т.т.*, принята к публикации *т.т.т.т.*,  
опубликована онлайн *т.т.т.т.*, опубликована *т.т.т.т.*

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — определить, может ли метод частной направленной когерентности правильно определять направленное взаимодействие между нелинейными системами, при нелинейных связях между системами, а также в случае, когда измеренные сигналы порождены объектами высокой размерности (ансамблями). Также определить зависимость результатов оценки связанности методом частной направленной когерентности от параметров: длины реализации, частоты дискретизации, размерности модели и от архитектуры связей в системах. **Методы.** В данной работе исследуются возможности и ограничения частотно разрешённого подхода для описания связей между многомерными временными рядами — частной направленной когерентности. Для определения значимости результатов использовались суррогатные временные ряды, построенные путём перестановки реализаций. **Результаты.** Показано, что в ансамблях маломерных осцилляторов архитектура связи может быть правильно выявлена для линейных и нелинейных систем, связанных как линейной, так и нелинейной связью. Для сложных составных сигналов, когда каждый измеряемый временной ряд представляет собою сумму сигналов многих отдельных осцилляторов, методика оказывается недостаточно специфична, выявляя несуществующие связи, и недостаточно чувствительна, пропуская имеющиеся. **Заключение.** Сформулированы критерии применения метода частной направленной когерентности к различным сигналам. При достаточной длине ряда, частоте выборки и размерности мера не показывает опосредованных связей в отличие от попарных методов причинности по Грейнджеру и энтропии переноса и хорошо работает для зашумлённых временных рядов. Метод позволяет изучать связанность в ансамбле из произвольного числа осцилляторов и можно определить, на каких частотах происходит взаимодействие.

**Ключевые слова:** частная направленная когерентность, связанность, нелинейность, нелинейные системы, нелинейная связь, многомерные системы.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке...

**Для цитирования:** Астахова Д. И., Сысоева М. В., Сысоев И. В. Влияние нелинейности на оценки связанности осцилляторов методом частной направленной когерентности // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-xxxxxx. EDN: XXXXXX

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Effect of nonlinearity on coupling estimations between oscillators using partial directed coherence approach

D. I. Astakhova<sup>1</sup>✉, M. V. Sysoeva<sup>2,3</sup>, I. V. Sysoev<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

<sup>3</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

E-mail: ✉astakhovadi@mail.ru, bobrichek@mail.ru, ivssci@gmail.com

Received xx.xx.xxxx, accepted xx.xx.xxxx, available online xx.xx.xxxx, published xx.xx.xxxx

**Abstract.** The purpose of this work is to determine the ability of the partial directed coherence method to identify the directed interaction between nonlinear systems correctly in presence of nonlinear couplings between systems, as well as in the case when the measured signals are generated by objects of high dimension. The another purpose is to determine the dependence of the coupling estimation results on the parameters: series length, sampling rate, model dimension and the coupling architecture. *Methods.* In this paper, the possibilities and limitations of the frequency-resolved approach (partial directed coherence) to describe the couplings between high-dimensional time series are investigated. Surrogate time series constructed by permutation of realization are used to determine the significance of the results. *Results.* Coupling architecture in ensembles of small-dimensional oscillators can be correctly identified for linear and nonlinear systems connected in case of both linear and nonlinear coupling. For complex composite signals, when each measured time series is the sum of the signals of many individual oscillators, the technique is not specific enough, revealing non-existent connections, and it is not sensitive enough, missing the existing ones. *Conclusion.* The criteria for applying the partial directed coherence method to different signals are formulated. The measure does not show indirect couplings at sufficient series length, sampling rate and model dimension in contrast to the pairwise methods of Granger causality and transfer entropy. The measure works well for noisy time series. The method allows to study the connectivity in an ensemble of an arbitrary number of oscillators. The method allows to determine at what frequencies the interaction occurs.

**Keywords:** partial directed coherence, coupling, nonlinearity, nonlinear systems, nonlinear coupling, high-dimensional system.

**Acknowledgements.** This work was supported by...

**For citation:** Astakhova DI, Sysoeva MV, Sysoev IV. Effect of nonlinearity on coupling estimations between oscillators using partial directed coherence approach. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1):xxx-xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-xxxxxx

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Введение

В данной работе исследуются новые возможности и ограничения метода частной направленной когерентности. Это частотно разрешённый подход к описанию взаимосвязей (направления информационного потока) между многомерными временными рядами, основанный на декомпозиции многомерных частных когерентностей, вычисленных по многомерным авторегрессионным моделям. Метод был введён в 1999 году группой Луиса Баккала [1, 2] специально для работы с нейробиологическими сигналами. Было объявлено, что *PDC* показывает прямое влияние одной подсистемы на другую, не показывая косвенных связей. Данный метод основан на построении линейных прогностических моделей, неизвестные коэффициенты которых оцениваются методом наименьших квадратов. Затем коэффициенты, зависящие от времени, преобразуются в коэффициенты, зависящие от частоты. Поэтому его эффективность для нелинейных систем неочевидна [2].

Астахова Д. И., Сысоева М. В., Сысоев И. В.  
Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 1

Цель настоящего исследования — определить, будет ли этот метод правильно определять направленное взаимодействие нелинейных по природе систем, определять нелинейную связь, а также проверить зависимость результатов оценки связанности методом частной направленной когерентности от параметров: длины реализации, частоты дискретизации, размерности модели и от архитектуры связей в системах [3].

## 1. Методика

**1.1. Параметры метода и архитектуры связей.** Чтобы воспроизвести основные возможные варианты связанности подсистем (однонаправленную связь, двунаправленную связь, отсутствие взаимодействия, опосредованное воздействие), для каждого типа систем было сделано по 4 осциллятора. Осцилляторы связывали несколькими способами, которые схематически представлены на рис. 1.

1. Первый воздействует на второй, первый и третий взаимно влияют друг на друга, четвёртый осциллятор колеблется изолированно (рис. 1, *a*). При такой архитектуре связей, кроме выявления однонаправленного и двунаправленного взаимодействия, можно проверить, как метод реагирует на опосредованную связь с третьего на второй осциллятор, а также реакцию метода на изолированный осциллятор.
2. Две пары двунаправленно связанных осцилляторов: первый со вторым и третий с четвёртым (рис. 1, *b*). При такой архитектуре связей проверяем реакцию метода на двунаправленное взаимодействие, и как метод реагирует на отсутствующее взаимодействие между парами связанных осцилляторов.
3. Кольцо из трёх осцилляторов: первый воздействует на второй, второй — на третий, а третий — на первый, четвёртый осциллятор вновь изолированный (рис. 1, *c*). В такой системе каждый осциллятор в кольце влияет на каждый (частично опосредованно), но непосредственных двунаправленных взаимодействий нет.
4. Однонаправленная связь между первым и вторым осцилляторами, третий и четвёртый осцилляторы колеблются изолированно (рис. 1, *d*). Здесь в первую очередь прове-

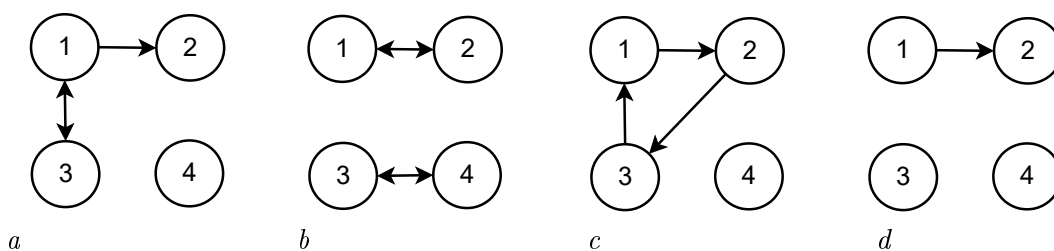


Рис. 1. Архитектура связей: *a* — первый осциллятор воздействует на второй, первый и третий взаимно влияют друг на друга, четвёртый осциллятор колеблется изолированно; *b* — две пары двунаправленно связанных осцилляторов: первый со вторым и третий с четвёртым; *c* — кольцо из трёх осцилляторов: первый воздействует на второй, второй — на третий, а третий — на первый, четвёртый осциллятор вновь изолированный; *d* — однонаправленная связь между первым и вторым осцилляторами, третий и четвёртый осцилляторы колеблются изолированно

Fig. 1. Coupling architectures: *a* — the first oscillator leads the second, the first oscillator and the third one mutually affect one another, the fourth oscillator oscillates independently; *b* — two pairs of bidirectionally coupled oscillators, the first oscillator is coupled with the second one and the third oscillator is coupled with the fourth one; *c* — the ring of three oscillators, the first oscillator drives the second one, the second oscillator drives the third one, and the third oscillator drives the first one, the fourth oscillator is again isolated; *d* — unidirectional coupling between the first and second oscillators, the third and the fourth oscillators are isolated

руется, как метод реагирует на одностороннее воздействие без опосредованной связи. А также интересна реакция метода на отсутствующее взаимодействие между третьим и четвёртым осцилляторами.

**1.2. Генератор с жестким возбуждением и потенциалом Тоды (нелинейная система с нелинейной связью).** Введём систему, состоящую из нелинейных осцилляторов, связанных нелинейной связью (1). Данные осцилляторы можно назвать осцилляторами с жёстким возбуждением и потенциалом Тоды (далее сокращённо «ж/в – Тоды»).

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} - \left( r_i + \sum_{j \neq i} k_{i,j} x_j^2 - x_i^4 \right) \frac{dx_i}{dt} + \omega_i^2 (1 - e^{-x_i}) = \xi_i(t), \quad (1)$$

где  $i$  – номер текущего осциллятора,  $j$  – номер воздействующего осциллятора, коэффициент связи  $k_{i,j} = 0.65$ ,  $r_1 = -0.05$ ,  $r_2 = -0.08$ ,  $r_3 = -0.06$ ,  $r_4 = -0.07$ ,  $\xi_i(t)$  нормальный белый шум с дисперсией  $\omega_i = 0.25$ , шаг равен 0.01 [2].

Связанные генераторы находились в режиме сильно нелинейных релаксационных колебаний с основной частотой  $\sim 8$  Гц и большим числом высших гармоник. Такой режим рассматривался как простейшая модель абсансов в [4].

## 2. Результаты

Сравнив полученные методом частной направленной когерентности связи рис. 2, *b* со схемой, представленной на рис. 2, *a*, можно заметить, что метод показал влияние *RTN* на кору, которое в модель изначально заложено не было, при этом влияние с *RTN* на *VPM* метод в нужном частотном диапазоне выявить не смог.

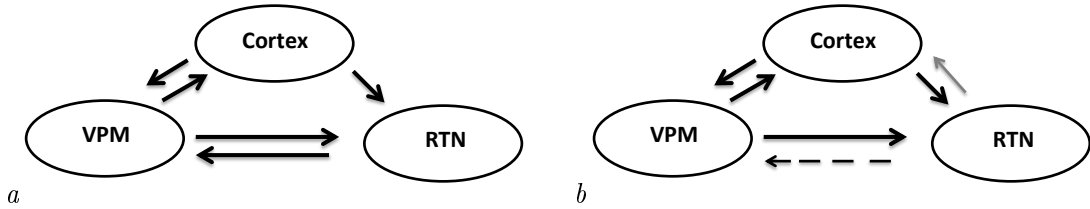


Рис. 2. Архитектура связи для динамической мезомасштабной модели: *a* – по построению, *b* – реконструированная. Чёрные стрелки показывают реально существующие связи, серая стрелка показывает ложно выявленную связь, штриховая стрелка – пропущенную методом связи

Fig. 2. Coupling architecture for dynamical mesoscale model: *a* – as constructed, *b* – as reconstructed. The black arrows show the actual couplings, the gray arrow shows the falsely identified coupling, and the bar arrow shows the missing by method PDC coupling

## Заключение

1. **Зависимость от длины реализации.** С увеличением длины анализируемого ряда значения когерентности на частотах, на которых нет взаимодействия, а также суррогатный уровень падают, а значения когерентности на релевантных частотах остаются практически неизменными.

2. **Зависимость от частоты дискретизации.** При тех значениях частоты дискретизации, которые мы рассматривали, метод везде показывал достаточную чувствительность и специфичность.
3. **Зависимость от размерности модели.** С увеличением размерности модели работоспособность метода сначала улучшается (повышается чувствительность), а потом — падает, то есть специфичность утрачивается — появляются ложные связи на произвольных, по всему спектру, частотах.
4. **Зависимость от архитектуры связи.** Неожиданно, эффективность исследуемого подхода оказалась сильно зависима от архитектуры связей. Лучше всего метод работает при взаимодействии в парах. Хуже всего — в кольце.

В результате можно сформулировать следующие преимущества метода:

- при достаточной длине ряда, частоте выборки и размерности мера не показывает опосредованных связей в отличие от попарных методов причинности по Грейнджеру и энтропии переноса;
- можно изучать связанность в ансамбле из произвольного числа осцилляторов;
- хорошо работает для зашумлённых временных рядов;
- можно определить, на каких частотах происходит взаимодействие.

## Список литературы

1. *Ливанов М. Н.* Пространственно-временная организация потенциалов и системная деятельность головного мозга: Избранные труды. М.: Наука, 1989. 400 с.
2. *Сысоева М. В., Медведева Т. М.* Оптимизация параметров метода причинности по Грейнджеру для исследования лимбической эпилепсии // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 5. С. 39–62. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62.
3. *Ситникова Е. Ю., Короновский А. А., Храмов А. Е.* Анализ ритмической активности головного мозга при абсанс-эпилепсии (работа с электроэнцефалограммами) // Труды II всероссийской конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях — 2011». Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2011. С. 190–192.
4. *Lopes da Silva F.* Neural mechanisms underlying brain waves: From neural membranes to networks // *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.* 1991. Vol. 79, no. 2. P. 81–93. DOI: 10.1016/0013-4694(91)90044-5.

## References

1. Livanov MN. Spatiotemporal Organization of Potentials and Systemic Activity of the Brain: Selected Works. M.: Nauka; 1989. 400 p. (in Russian).
2. Sysoeva MV, Medvedeva TM. Optimization of Granger causation method parameters for the study of limbic epilepsy. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(5):39–62 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62.
3. Sitnikova EY, Koronovskii AA, Hramov AE. Analysis of rhythmic brain activity in absence epilepsy: An electroencephalographic study. *Proceedings of the II All-Russian Conference «Nonlinear Dynamics in Cognitive Research — 2011»*, Nizhny Novgorod, IAP RAS. 2011. (in Russian).
4. Lopes da Silva F. Neural mechanisms underlying brain waves: From neural membranes to networks. *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.* 1991;79(2):81–93. DOI: 10.1016/0013-4694(91)90044-5.



*Сысоева Марина Вячеславовна* — родилась в Саратове (1987). Окончила с отличием факультет nano- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Биомедицинская инженерия» (2011). Кандидат физико-математических наук (2015, СГУ). С 2015 года работает на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации» Саратовского государственного технического университета в должности доцента. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, радиотехническое моделирование. Опубликовала свыше 30 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77  
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.  
E-mail: bobrichkek@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-4228-9124  
AuthorID (eLibrary.Ru): 651344