

Квазинормальные формы при бифуркациях коразмерности два в задаче о динамике большой цепочки связанных лазеров

Е. В. Григорьева¹, С. А. Кащенко²

¹Белорусский государственный экономический университет, Республика Беларусь;

²Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия;

E-mail: grigorieva@tut.by, kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 10.03.2026, принята к публикации 11.05.2026,

опубликована онлайн 12.05.2026

Аннотация. Исследуется интегро-дифференциальная модель динамики генерации большой цепочки лазеров с двусторонними оптоэлектронными связями через накачку. Получены критические значения коэффициента связи и времени задержки в линиях связей, при которых могут возникать двух- и многочастотные квазипериодические колебания интенсивности излучения. *Методы исследования.* Используются методы изучения локальной динамики, основанные на построении нормальных форм на центральных многообразиях, применительно к критическим случаям (асимптотически) бесконечной размерности. Предложен алгоритм сведения исходной краевой задачи к уравнениям для медленно меняющихся амплитуд. В качестве квазинормальной формы (КНФ) построена система комплексных уравнений типа Гинзбурга–Ландау, нелокальная динамика которых определяет поведение решений исходной краевой задачи. *Полученные результаты.* Получены однородные решения КНФ и соответствующие решения нелинейной модели цепочки, которые можно интерпретировать как квазипериодические колебания и режим чередования синфазных и антифазных режимов генерации в кольце двунаправленно связанных лазерах. Рассчитаны частоты и амплитуды колебаний интенсивности излучения лазеров в цепочке.

Ключевые слова: связанные лазеры, запаздывающая связь, бифуркации коразмерности два, волновые структуры.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2026-1331).

Для цитирования: Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Квазинормальные формы при бифуркациях коразмерности два в задаче о динамике большой цепочки связанных лазеров // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003221. EDN: ZOPANH

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Quasinormal forms at bifurcations of codimension two in the problem of the dynamics of a large chain of coupled lasers

*E. V. Grigorieva*¹, *S. A. Kashchenko*²

¹Belarus State Economic University, Belarus;

²P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia

E-mail: grigorieva@tut.by, kasch@uniyar.ac.ru

Received 10.03.2026, accepted 11.05.2026, available online 12.05.2026

Abstract. An integro-differential model of the generation dynamics of a large laser chain with two-way optoelectronic coupling via pumping is investigated. Critical values of the coupling coefficient and delay time in the coupling lines are obtained, at which dual- and multi-frequency quasi-periodic oscillations of the radiation intensity can occur. *Methods of study.* Local dynamics studies based on constructing normal forms on central manifolds are applied to critical cases of (asymptotically) infinite dimension. An algorithm for reducing the original boundary value problem to equations for slowly varying amplitudes is proposed. A system of complex Ginzburg-Landau equations is constructed as a quasi-normal form (QNF). The nonlocal dynamics of these equations determines the behavior of the solutions to the original boundary value problem. *Results obtained.* Homogeneous solutions of the CNF and corresponding solutions of the nonlinear chain model were obtained. These can be interpreted as quasi-periodic oscillations and a regime of alternating in-phase and anti-phase generation modes in bidirectionally coupled lasers. The frequencies and amplitudes of the laser intensity oscillations in the chain were calculated.

Keywords: coupled lasers, delayed coupling, codimension two bifurcations, wave structures.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on provision of subsidy from the federal budget No. 075-02-2026-1331).

For citation: Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. Quasinormal forms at bifurcations of codimension two in the problem of the dynamics of a large chain of coupled lasers. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003221

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В последнее время большое внимание привлекают задачи о динамике больших сетей связанных осцилляторов различной природы, в том числе связанных лазеров. Ввиду возможных приложений наибольший интерес вызывают режимы одночастотной синхронизации. В то же время в сетях наблюдаются и более сложные двух- и многочастотные квазипериодические режимы генерации. Такие промежуточные состояния между регулярной и хаотической динамикой в лазерных системах могут быть использованы в целях достижения широкополосной, но при этом управляемой, генерации оптических сигналов, генерации квазислучайных последовательностей, генерации оптических импульсов сложной формы, разработки нейроморфных вычислений и защищённой оптической связи [1] – [6].

Генерация квазипериодических колебаний в одиночном полупроводниковом лазере естественно возникает в результате внешнего периодического воздействия с несоизмеримой частотой, например, при инжекции оптического сигнала [7]. Аналогичную внешней модуляции роль может играть и запаздывание в отдельном лазере с обратной связью. Численные исследования и экспериментальные наблюдения выявили типичные сценарии смены режи-

мов: стационарное состояние \rightarrow периодические колебания \rightarrow квазипериодические колебания \rightarrow хаос для различных схем оптической и оптоэлектронной обратной связи, например, в [8, 9].

В малых одномерных массивах с несколькими элементами (два или несколько связанных лазеров) квазипериодические режимы могут возникать как вследствие расстройки частот связанных лазеров, так и вследствие задержки в линиях связей. Типы связей, которые при этом рассматриваются, включают диффузионную, глобальную обратную связь через общий внешний отражатель, однонаправленную оптическую инжекцию [10–12] и оптоэлектронную связь через ток накачки [13–15]. Также активно обсуждается коллективная динамика больших сетей (до 100 и более элементов), которая демонстрирует широкий спектр режимов: стационарные, периодические, квазипериодические и хаотические режимы с различными пространственными структурами – от синфазных до антифазных и кластерных состояний [6, 16, 17]. В большинстве случаев реализуется чисто оптическая связь, но организация сетей с оптоэлектронными связями также возможна [18].

Теоретический анализ квазипериодических режимов в системах с малой размерностью фазового пространства обычно связывают с бифуркацией Неймарка-Саккера устойчивого цикла или с бифуркацией коразмерности два, при которой две кривые бифуркаций рождения циклов пересекаются и формируются двух- и многочастотные торы с последующими каскадами бифуркаций [19, 21–24]. Для больших сетей связанных осцилляторов анализ дополнен детальными численными расчетами [20, 25, 26]. Отметим, что хотя в малых сетях лазеров квазипериодические режимы ранее наблюдались экспериментально и при моделировании, но для больших цепочек лазеров, связанных через накачку, аналитические условия появления и характеристики квазипериодических режимов не рассматривались.

Перспективным для теоретического анализа динамики больших систем связанных нелинейных элементов может быть развитие методов теории нормальных форм. Отличительной особенностью рассматриваемой здесь задачи является тот факт, что критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия имеют (асимптотически) бесконечную размерность. Стандартные методы, основанные на применении теории интегральных инвариантных многообразий, непосредственно не применимы. В работе [27] был разработан метод построения квазинормальных форм (КНФ) для бесконечномерных критических случаев, возникающих в системе большого числа связанных осцилляторов. Метод применим и к другим системам с бесконечномерными бифуркациями, обусловленными сингулярными возмущениями, в том числе к системам с большим запаздыванием или с малыми коэффициентами диффузии.

В настоящей работе метод нормализации применяется для распределенной модели большого числа связанных лазеров. В результате оригинальная модель связанных нелинейных элементов сведена к КНФ - системе комплексных уравнений типа Гинзбурга-Ландау, описывающих медленную эволюцию амплитуд взаимодействующих мод в локальной окрестности неустойчивого равновесного состояния при бифуркациях коразмерности два. Полученные уравнения учитывают как фазовую, так и амплитудную нелинейную динамику элементов сети и открывают возможность по решениям КНФ восстановить достаточно сложное решение исходной системы связанных лазеров.

Ранее на основе метода нормализации в работах [28–30] изучались неустойчивости в большой цепочке идентичных лазеров с различным дизайном оптоэлектронных запаздывающих связей. Было показано, что простейшие однородные стационарные решения полученных КНФ соответствуют (i) режиму фазовой синхронизации генерации лазеров в случае однонаправленных связей, (ii) антифазной динамике в случае диффузионных связей с учетом собственной обратной связи для каждого элемента, (iii) антифазной или синфазной

динамике в зависимости от значения запаздывания в случае двунаправленных связей без собственной обратной связи.

В настоящей работе мы продолжаем изучение модели цепочки большого числа идентичных полупроводниковых лазеров [29], каждый из которых связан с двумя соседними через линии накачки с временной задержкой. Мы приведем условия, при которых формируется индуцированный запаздыванием двухчастотный квазипериодический режим и возможен переход в трех- и многочастотный режим. Это позволяет, в частности, аналитически описать интересный эффект медленной периодической смены антифазного и синфазного режимов генерации в большой цепочке лазеров.

Материал статьи представлен следующим образом. В разделе 1 приводится модель цепочки двунаправленно связанных лазеров на основе скоростных уравнений. Число лазеров в цепочке N предполагается большим, что позволяет перейти к пространственно-распределенной интегро-дифференциальной модели с малым параметром $\varepsilon \sim N^{-1}$. Приводятся результаты линейного анализа устойчивости стационарного состояния в распределенной модели и критические значения коэффициентов связи и запаздывания в цепи связи, соответствующие бифуркациям коразмерности два. Показано, что при условии $\varepsilon \rightarrow 0$ в окрестности точки бифуркации возбуждается асимптотически бесконечное число мод из двух групп с разными частотами и разными волновыми числами. В разделе 2, следуя методу [27], построена система уравнений в частных производных для главных амплитуд несущих волн – система уравнений типа Гинзбурга-Ландау. Она играет роль КНФ и ее решения определяют решения исходной системы в локальной окрестности неустойчивого равновесия. В разделе 3 приведен анализ однородных решений КНФ: стационарных точек и циклов. Приведены соответствующие решения исходной распределенной модели и их интерпретация для модели цепочки как синфазных, антифазных, квазипериодических режимов.

Полученные результаты дополняют существующие исследования коллективной динамики в лазерных массивах и демонстрируют, каким образом индуцированные запаздыванием квазипериодические режимы могут формироваться и устойчиво существовать в больших распределённых сетях лазеров.

1. Модель связанных в кольцо лазеров

Для описания динамики отдельного элемента цепочки – лазера – мы используем стандартную систему скоростных уравнений для плотности фотонов $u_j(t)$ и инверсии населенностей активной среды $y_j(t)$ в двухуровневом приближении [31]. Модель динамики лазеров, связанных в кольцо через накачку соседних элементов, запишем в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= v u_j (y_j - 1), \\ \dot{y}_j &= q - y_j (1 + u_j) - \Phi_{j\pm 1}(t - T), \end{aligned} \quad (1)$$

где $j = 1, 2, \dots$ - номер лазера и выполняются тождества $u_{j\pm N} \equiv u_j$, $y_{j\pm N} \equiv y_j$ для замкнутой цепочки из N элементов; точкой обозначена производная функции по времени t (в единицах времени релаксации инверсии населенностей); v - отношение скорости затухания фотонов в резонаторе к скорости релаксации населенностей; потери резонатора нормированы к единице; $q > 1$ - постоянная составляющая скорости накачки, при которой существует ненулевая стационарная генерация. Функция

$$\Phi_{j\pm 1}(t - T) = \gamma \frac{1}{2} [u_{j-1}(t - T) + u_{j+1}(t - T)],$$

описывает зависимость накачки от плотности излучения соседних элементов в момент времени $t - T$, где $T > 0$ – время задержки сигнала в оптоэлектронной цепи связи, γ – коэффициент связи. Будем полагать в этой работе $\gamma \in (0, 1)$.

Рассмотрим цепочку, количество элементов в которой является достаточно большим, $N \gg 1$, и введем параметр $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$, для которого выполнено условие

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2)$$

Будем интерпретировать параметр ε как угловое расстояние между лазерами в кольце длины 2π , тогда значения функций $u_j(t)$ и $y_j(t)$ можно ассоциировать со значениями функций двух переменных $u(t, x)$ и $y(t, x)$ в точках $x = x_j = \varepsilon j$. Условие (2) дает основание от системы (1), содержащей $2N$ уравнений, перейти к системе двух интегро-дифференциальных уравнений для пространственно распределенных функций $u(t, x)$, $y(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= vu(y - 1), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= q - y(1 + u) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t - T, x + s)ds, \end{aligned} \quad (3)$$

с периодическими краевыми условиями,

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x), \quad (4)$$

где функция $F(s) = \frac{1}{2}(F_+(s) + F_-(s))$ составлена из функций Гаусса с параметрами ε и ς ,

$$F_{\pm}(s) = \frac{1}{\varsigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(s \pm \varepsilon)^2}{2\varsigma^2}\right).$$

Мы используем функцию $F(s)$ для моделирования связей между элементами кольца, поскольку при $\varsigma \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t, x + s)ds = \frac{1}{2}\left(u(t, x + \varepsilon) + u(t, x - \varepsilon)\right) + o(1)$$

для любой непрерывной функции, в том числе для $u(t, x)$. Тогда интегральное слагаемое в уравнении (3) описывает связь между элементами кольца, при которой скорость накачки элемента в точке x наиболее сильно зависит от плотностей излучения двух элементов в точках $x \pm \varepsilon$, а сила связи между другими элементами кольца экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния между ними. Параметр ς характеризует ширину пространственной области эффективного взаимодействия элементов. Непрерывная модель будет наиболее адекватна дискретной модели цепочки, если область взаимодействия между элементами значительно меньше, чем расстояние ε между ними, поэтому в данной работе мы положим

$$\varsigma = \varepsilon^2 \sigma \ll 1. \quad (5)$$

Далее будем исследовать решения интегро-дифференциальной системы (3),(4) с бесконечномерным фазовым пространством $C_{[0, 2\pi]}(R^2) \times C_{[-T, 0]}(R^2)$ с малыми параметрами (2) и (5).

Система (3), (4) при $q > 1$ имеет однородное ненулевое состояние равновесия $u(x, t) = u_s(\gamma)$, $y(x, t) = y_s$, где

$$u_s(\gamma) = \frac{q-1}{1+\gamma}, \quad y_s = 1. \quad (6)$$

Для исследования устойчивости состояния равновесия перейдем к системе для малых отклонений от равновесных значений $(u - u_s) \rightarrow u$ и $(y - y_s) \rightarrow y$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= vu_s y + vuy, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -y(1+u_s) - u - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t-T, x+s)ds - uy, \\ u(t, x+2\pi) &\equiv u(t, x), \quad y(t, x+2\pi) \equiv y(t, x). \end{aligned} \quad (7)$$

Опуская нелинейные слагаемые vuy и uy в системе (7), приходим к линеаризованной около нуля системе, решения которой ищем в виде

$$u = u_k \exp(ikx + \lambda_k t), \quad y = y_k \exp(ikx + \lambda_k t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s) \exp(iks) ds = \frac{1}{2} [\exp(ik\varepsilon) + \exp(-ik\varepsilon)] \exp\left(-\varepsilon^2 k^2 \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2}\right)$$

Тогда для нахождения значений $\lambda = \lambda_k$ получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + (1+u_s)\lambda + vu_s[1 + \gamma g(z) \exp(-\lambda T)] = 0, \quad (8)$$

где

$$g(z) = \cos(z) \exp\left(-z^2 \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2}\right), \quad z = \varepsilon k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

Справедливы следующие утверждения общего характера. Пусть при всех $z \in (-\infty, \infty)$ все корни уравнения (8) имеют отрицательные вещественные части. Тогда все решения краевой задачи (7) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же найдутся такие z, γ , что уравнение (8) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то при всех достаточно малых ε нулевое решение неустойчиво и в малой его окрестности не существует аттракторов этой краевой задачи. При таких условиях задача о динамике нелинейной системы (7) становится нелокальной.

Далее будем исследовать решения системы (7) в локальной окрестности критических значений z_0, γ_0 , при которых характеристическое уравнение (8) имеет корень (корни) λ с нулевой или близкой к нулю вещественной частью, а все остальные корни имеют отрицательную вещественную часть.

1.1. Бифуркации коразмерности два Заметим, что при $\gamma = 0$ все корни уравнения (8) имеют отрицательную действительную часть. Определим, при каком минимальном значении $\gamma = \gamma_0 > 0$ и при каких $z = z_0$ характеристическое уравнение (8) имеет корень $\lambda = i\omega$ с нулевой вещественной частью. Сначала положим $\sigma = 0$, при этом $g(z) = \cos z$. Подставляя $\lambda = i\omega$ в уравнение (8) и разделяя мнимую и действительную части равенства, получаем систему

$$\begin{aligned}\omega^2 - vu_s &= vu_s\gamma \cos z \cos \omega T, \\ (1 + u_s)\omega &= vu_s\gamma \cos z \sin \omega T.\end{aligned}\tag{10}$$

Отсюда имеем

$$\omega^2 = [vu_s - (1 + u_s)^2/2] \pm \sqrt{D},\tag{11}$$

$$D = (1 + u_s)^4/4 - vu_s(1 + u_s)^2 + (vu_s\gamma \cos z)^2,$$

т.е. при некоторых γ возможны два значения $\omega = \omega_1(\gamma, z)$ и $\omega = \omega_2(\gamma, z)$, соответствующие знакам «+» и «-» перед корнем из D . Далее, подставляя $\omega = \omega_{1,2}(\gamma, z)$ и $u_s = u_s(\gamma)$ в одно из уравнений системы (10), находим минимальный положительный корень γ из всех возможных при $z \in [0, 2\pi]$ и $\omega_{1,2}$. Расчеты показывают, что такой корень соответствует $z = z_{01} = 0$, при этом $\cos z_{01} = 1$, или $z = z_{02} = \pi$, при этом $\cos z_{02} = -1$. Будем обозначать полученное критическое значение $\gamma_0 = \gamma_0(T, z_0)$, где $z_0 = z_{01}$ или $z_0 = z_{02}$.

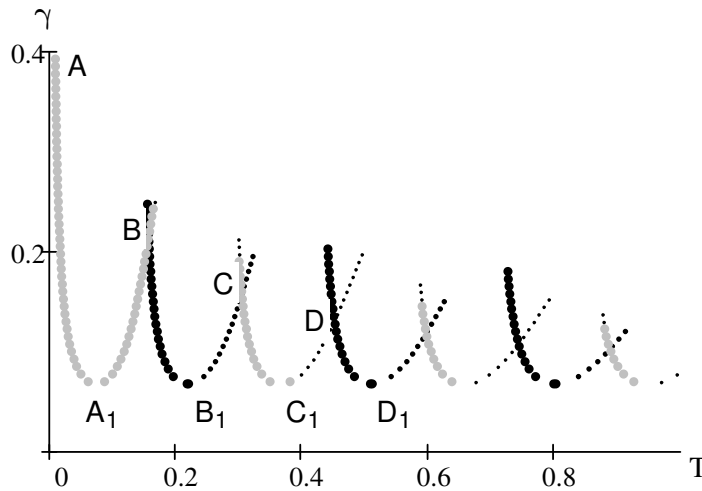


Рис. 1. Бифуркационные значения коэффициента связи γ_0 в зависимости от запаздывания T для системы (7) при $v = 10^3$, $q = 1.5$, $\sigma = 0$ и $z_0 = z_{01} = 0$ (выделены серым цветом) или $z_0 = z_{02} = \pi$ (выделены черным цветом). Ветви слева (справа) от точек локальных минимумов $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ соответствуют возбуждениям мод с частотой ω_1 (ω_2). Точки пересечения ветвей B, C, D, \dots соответствуют бифуркациям коразмерности два. **Кружками** (точками) выделены параметры, соответствующие супер-(суб-) критическим бифуркациям.

На рис. 1 показаны результаты расчета бифуркационных значений коэффициента связи γ_0 в зависимости от запаздывания T по формулам (10), (11). Граница устойчивости состоит из множества ветвей, соответствующих $z_0 = z_{01} = 0$ (выделены серым цветом) или $z_0 = z_{02} = \pi$ (выделены черным цветом). От каждого локального экстремума (точки

A_1, B_1, C_1, \dots) отходят по две ветви: левые дуги соответствуют возбуждению мод с частотой ω_1 , правые дуги – мод с частотой ω_2 . Точки локальных минимумов значений $\gamma_0(T, z_0)$ определяются условием $\omega_1 = \omega_2$.

Обратим внимание, что одно и то же значение $\gamma_0(T, z_0)$ отвечает и $z = z_n = z_0 + 2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Критические значения z_n определяют «центральные» значения волновых чисел $k_{mn} = z_n \varepsilon^{-1} + m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ тех мод вида $\exp(ik_{mn}x + i\omega t)$, которые возбуждаются при потере устойчивости стационарного состояния. Следовательно, при $\gamma = \gamma_0$ возбуждаются моды с волновыми числами k_{mn} из множеств, соответствующих $z_{01} = 0$,

$$K_0 = \{2\pi n \varepsilon^{-1} + m, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (12)$$

или $z_{02} = \pi$,

$$K_\pi = \{\pi \varepsilon^{-1} + \theta + 2\pi n \varepsilon^{-1} + m, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (13)$$

где мы ввели поправка $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$, чтобы дополнить значение $\pi \varepsilon^{-1}$ до целого числа и обеспечить выполнение краевых условий. Поскольку $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$, то числа $2\pi n \varepsilon^{-1} = Nn$ – целые, следовательно, $\theta = 1/2$ ($\theta = 0$), если число лазеров в цепочке N нечетное (четное).

Из диаграммы на рис. 1 видно, что при увеличении запаздывания T чередуются участки границы, отвечающие четырем различным критическим случаям: на участке AA_1 возбуждаются моды с частотой $\omega = \omega_1$ и с волновыми числами $k_{mn} \in K_0$, на A_1B – с частотой $\omega = \omega_2$ и с волновыми числами $k_{mn} \in K_0$, на BB_1 – с частотой $\omega = \omega_1$ и с волновыми числами $k_{mn} \in K_\pi$, на B_1C – с частотой $\omega = \omega_2$ и с волновыми числами $k_{mn} \in K_\pi$, и так далее на участках CC_1, C_1D, \dots имеем критические случаи в той же последовательности.

В работе [29] была изучена локальная динамика системы в окрестности каждого такого критического случая и показана возможность (при суперкритической бифуркации) возникновения синфазных колебаний в цепочке лазеров при возбуждении мод с волновыми числами из K_0 (например, на участках AA_1, CC_1) или антифазных колебаний в цепочке лазеров при возбуждении мод с волновыми числами из K_π (например, на участках BB_1, DD_1).

В данной работе мы сосредоточимся на изучении локальной динамики системы (7) при бифуркациях коразмерности два, которые имеют место в точках пересечения бифуркационных ветвей. Возможны два варианта бифуркаций, в окрестности которых возбуждаются моды с разными частотами и волновыми числами из разных множеств:

(i) с частотой ω_1 и $k_{mn} \in K_\pi$, а также моды с частотой ω_2 и $k_{mn} \in K_0$ (точки B, D, \dots),

(ii) с частотой ω_1 и $k_{mn} \in K_0$, а также моды с частотой ω_2 и $k_{mn} \in K_\pi$ (точки C, \dots).

Для расчета параметров бифуркации коразмерности два нужно систему (10), (11) при $z = z_{01} = 0$ и при $z = z_{02} = \pi$, учитывая $\omega_{1,2}(\gamma, z_{01}) = \omega_{1,2}(\gamma, z_{02}) = \omega_{1,2}(\gamma)$, дополнить условием

$$\omega_1(\gamma) \sin(\omega_2(\gamma)T) = -\omega_2(\gamma) \sin(\omega_1(\gamma)T). \quad (14)$$

Далее будем обозначать T_0, γ_0 – критические значения параметров связей при бифуркациях коразмерности два, удовлетворяющие одновременно уравнениям (10), (11) и (14). Например, точка B на рис. 1 отвечает параметрам системы $T_0 = 0.157$ и $\gamma_0 = 0.2128$, при которых возбуждаются моды с частотой $\omega_1 = 22.23$ и волновыми числами из K_π , а также моды с частотой $\omega_2 = 18.12$ и волновыми числами из K_0 . В точке C на рис. 1, $T_0 = 0.3052$ и $\gamma_0 = 0.1578$, возбуждаются моды с частотой $\omega_1 = 22.184$ и волновыми числами $k_{mn} \in K_\pi$, а также моды с частотой $\omega_2 = 19.223$ и волновыми числами $k_{mn} \in K_0$.

Рассмотрим теперь решения линеаризованной системы при

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_{01}, \quad T = T_0 + \varepsilon^2 T_{01}, \quad (15)$$

где малые добавки $\varepsilon^2 \gamma_{01}$ и $\varepsilon^2 T_{01}$ характеризуют отклонения от бифуркационных значений γ_0 , T_0 , и при $\sigma \neq 0$. Подставляя (15) в уравнение (8), получаем две группы корней λ_{mn} , представимые в виде ряда по степеням ε , с главными членами $i\omega_0 = i\omega_{1,2}(\gamma_0)$,

$$\lambda_{mn} = i\omega_0 + \varepsilon \lambda_{mn1} + \varepsilon^2 \lambda_{mn2} + O(\varepsilon^3), \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

где $\lambda_{mn1} = 0$, $\lambda_{mn2} = \alpha + v_x m + v_y 2\pi n - D_x m^2 - D_y (2\pi n)^2$, и коэффициенты α , $v_{x,y}$, $D_{x,y}$ рассчитываются при $z_0 = 0$ или $z_0 = \pi$ в зависимости от типа бифуркации (i) или (ii),

$$\begin{aligned} \alpha(\omega_0, z_0) &= \delta(\omega_0, z_0) \left[\frac{-1 + e^{i\omega_0 T_0} (1 + i\omega_0 v^{-1}) \cos z_0}{\gamma_0 (1 + \gamma_0)} \gamma_{01} + i\omega_0 T_{01} + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\sigma^2 z_0^2}{2} \right], \\ v_x(\omega_0, z_0) &= \delta(\omega_0, z_0) \theta, \quad v_y(\omega_0, z_0) = \delta(\omega_0, z_0) \sigma^2 z_0, \\ D_x(\omega_0, z_0) &= \delta(\omega_0, z_0) / 2, \quad D_y(\omega_0, z_0) = \delta(\omega_0, z_0) \sigma^2 / 2, \\ \delta(\omega_0, z_0) &= \gamma_0 v u_0 e^{-i\omega_0 T_0} \cos z_0 / p(\omega_0, z_0), \\ p(\omega_0, z_0) &= 2i\omega_0 + 1 + u_0 - T_0 \gamma_0 v u_0 e^{-i\omega_0 T_0} \cos z_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из представления (16) следует, что характеристическое уравнение имеет бесконечно много корней, действительная часть которых стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. рассматриваемые критические случаи имеют (асимптотически) бесконечную размерность.

Замечание 1. Как существование точек бифуркации коразмерности два, так и комбинации возбуждаемых при этом мод, зависят от способа реализации связей в цепочке. В рассматриваемой здесь системе, моделирующей динамику цепочки с двусторонними связями, возбуждаются моды с разными частотами, ω_1 и ω_2 , и волновыми числами из разных множеств, K_0 и K_π . Ранее в работе [30] было показано, что в модели цепочки лазеров с диффузионными связями с учетом собственной обратной связи для каждого элемента, при бифуркациях коразмерности два возбуждаются моды с разными частотами, ω_1 и ω_2 , и с волновыми числами из одного и того же множества K_π . В модели кольца лазеров с односторонними связями [28], критическое значение γ_0 не зависит от запаздывания и отсутствуют бифуркации коразмерности два.

2. Построение квазинормальной формы

Для определенности будем изучать решения системы (7) в малой окрестности критического случая (i), при котором возбуждаются два множества мод вида $\sim \exp(\lambda_{mn} t + k_{mn} x)$, где $\omega = \omega_1$, $k_{mn} \in K_\pi$ и моды с $\omega = \omega_2$ и волновыми числами $k_{mn} \in K_0$. Этому случаю отвечают, например, параметры точек B и D на рис. 1. Для критического случая (ii) все последующие формулы справедливы при замене индексов частот $1 \leftrightarrow 2$.

Каждому характеристическому корню $\lambda_{mn}(\varepsilon)$ соответствует частное решение линеаризованной системы в виде бегущей волны с волновым числом k_{mn} и с частотой равной мнимой части корня λ_{mn} . Общее решение $u(t, x)$, $y(t, x)$ линеаризованной краевой задачи есть сумма всех возбужденных мод. Как следует из (16), частоты мод отличаются от ω_1 или ω_2 на величины порядка ε^2 . Поэтому общее решение в виде суммы мод удобно записать, выделив в качестве множителей выражения для главных несущих волн, $\exp(iR_1)$ и $\exp(iR_2)$ с

фазами $R_1 = \kappa_1 x + \omega_1 t$ и $R_2 = \kappa_2 x + \omega_2 t$, где $\kappa_1 = \pi \varepsilon^{-1} + \theta$, $\kappa_2 = 0$, $\omega_{1,2}$ – главные частоты, тогда

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} \xi e^{iR_1} + \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \eta e^{iR_2}, \quad (18)$$

с амплитудами

$$\xi = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mn} e^{(imX+inY+O(\varepsilon^2)t)}, \quad \eta = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \eta_{mn} e^{(imX+inY+O(\varepsilon^2)t)},$$

где ξ_{mn} , η_{mn} – некоторые постоянные, определяемые начальными условиями, $X = x$ и $Y = 2\pi \varepsilon^{-1} x$ – пространственные аргументы и $r_{1,2} = i\omega_{1,2}(vu_0)^{-1}$. Заметим, что бесконечные суммы ξ и η можно рассматривать как Фурье разложение некоторых функций $\xi(X, Y)$ и $\eta(X, Y)$, 2π -периодичных по обоим аргументам, если пренебречь членами $O(\varepsilon^2)t$.

Для нахождения решений нелинейной краевой задачи (7) в локальной окрестности бифуркации коразмерности два будем предполагать, что в (18) амплитуды мод ξ_{mn} и η_{mn} медленно меняются во времени, и введем функции $\xi(\tau, X, Y)$, $\eta(\tau, X, Y)$, зависящие от медленной временной переменной $\tau = \varepsilon^2 t$ и 2π -периодичные по пространственным аргументам X, Y . Решение $u(t, x, \tau, X, Y)$ и $y(t, x, \tau, X, Y)$ нелинейной краевой задачи (7) представим в виде ряда по степеням малого параметра ε :

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} \xi e^{iR_1} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \eta e^{iR_2} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} u_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^4) + c.c. \quad (19)$$

Здесь функции

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_2 &= \varepsilon^2 (u_{20} + u_{21} e^{i2R_1} + u_{22} e^{i2R_2} + u_{23} e^{i(R_1+R_2)} + u_{24} e^{i(R_1-R_2)} + c.c.), \\ \varepsilon^2 y_2 &= \varepsilon^2 (y_{20} + u_{21} e^{i2R_1} + y_{22} e^{i2R_2} + y_{23} e^{i(R_1+R_2)} + y_{24} e^{i(R_1-R_2)} + c.c.), \\ \varepsilon^3 u_3 &= \varepsilon^3 (u_{31} e^{iR_1} + u_{32} e^{iR_2} + \dots + c.c.), \dots \end{aligned}$$

являются величинами 2го, 3го, ... порядка по степеням ε и описывают динамику медленных амплитуд всех гармоник основных частот. Все амплитуды гармоник, как и главные амплитуды $\xi(\tau, X, Y)$ и $\eta(\tau, X, Y)$, являются 2π -периодичными по пространственным переменным X, Y .

Подставим ряды (19) в систему (7) при $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_{01}$, $T = T_0 + \varepsilon^2 T_{01}$ и будем собирать коэффициенты при членах одного порядка ε и одинаковых гармониках. Тогда приходим к равенствам, из которых последовательно находим амплитуды,

$$\begin{aligned} u_{20} &= 0, \quad y_{20} = 0, \\ u_{21} &= \frac{r_1}{u_0} C_1 \xi^2, \quad y_{21} = \frac{r_1}{u_0} (2r_1 C_1 - 1) \xi^2, \\ u_{22} &= \frac{r_2}{u_0} C_2 \eta^2, \quad y_{22} = \frac{r_2}{u_0} (2r_2 C_2 - 1) \eta^2, \\ u_{23} &= \frac{r_3}{u_0} C_3 \xi \eta, \quad y_{23} = \frac{r_3}{u_0} [r_3 C_3 - 1] \xi \eta, \\ u_{24} &= \frac{r_4}{u_0} C_4 \xi \eta^*, \quad y_{24} = \frac{r_4}{u_0} [r_4 C_4 - 1] \xi \eta^*, \end{aligned}$$

где $r_{1,2} = i\omega_{1,2}(vu_0)^{-1}$, $r_3 = r_1 + r_2$, $r_4 = r_1 - r_2$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_4 = \omega_1 - \omega_2$ и

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= \frac{2i\omega_{1,2} + 1}{2r_{1,2}(i2\omega_{1,2} + 1 + u_0) + 1 + \gamma_0 e^{-i2\omega_{1,2}T_0}}, \\ C_{3,4} &= \frac{i\omega_{3,4} + 1}{r_{3,4}[i\omega_{3,4} + 1 + u_0] + 1 - \gamma_0 e^{-i\omega_{3,4}T_0}}. \end{aligned}$$

Из условия разрешимости системы относительно амплитуд u_{31} , y_{31} , находим, что комплексные функции $\xi(\tau, X, Y)$ и $\eta(\tau, X, Y)$ должны удовлетворять системе уравнений,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \alpha_1 \xi + \xi(L_{11}|\xi|^2 + L_{12}|\eta|^2) + v_1 \frac{\partial \xi}{\partial X} + v_2 \frac{\partial \xi}{\partial Y} + D_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + D_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} &= \alpha_2 \xi + \eta(L_{21}|\xi|^2 + L_{22}|\eta|^2) + v_3 \frac{\partial \eta}{\partial X} + v_4 \frac{\partial \eta}{\partial Y} + D_3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + D_4 \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2}\end{aligned}\quad (20)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}\xi(X, Y) &= \xi(X + 2\pi, Y), \quad \xi(X, Y) = \xi(X, Y + 2\pi), \\ \eta(X, Y) &= \eta(X + 2\pi, Y), \quad \eta(X, Y) = \eta(X, Y + 2\pi),\end{aligned}$$

где $\alpha_1 = \alpha(\omega_1, \pi)$, $v_1 = v_x(\omega_1, \pi)$, $D_1 = D_x(\omega_1, \pi)$, $D_2 = D_y(\omega_1, \pi)$, $\alpha_2 = \alpha(\omega_2, 0)$, $v_3 = v_x(\omega_2, 0)$, $D_3 = D_x(\omega_2, 0)$, $D_4 = D_y(\omega_2, 0)$, и коэффициенты при нелинейных членах

$$\begin{aligned}L_{11} &= p_1 \frac{r_1}{u_0} (r_1 C_1 - 1), \quad L_{12} = p_1 \frac{r_3}{u_0} (r_1 C_3 - 1) + p_1 \frac{r_4}{u_0} (r_1 C_4 - 1), \\ L_{21} &= p_1 \frac{r_3}{u_0} (r_2 C_3 - 1) + p_1 \frac{r_4^*}{u_0} (r_2 C_4^* - 1), \quad L_{22} = p_2 \frac{r_2}{u_0} (r_2 C_2 - 1),\end{aligned}$$

$$p_1 = \frac{(i\omega_1 + 1)v}{p(\omega_1, \pi)}, \quad p_2 = \frac{(i\omega_2 + 1)v}{p(\omega_2, 0)},$$

величины $\alpha(\omega_0, z_0)$, $v_x(\omega_0, z_0)$, $v_y(\omega_0, z_0)$, $D_x(\omega_0, z_0)$, $D_y(\omega_0, z_0)$, $\delta(\omega_0, z_0)$, $p(\omega_0, z_0)$ – определены в равенствах (17).

Следующая теорема устанавливает связь между решениями краевой задачи (20) и решениями исходной системы, которая вытекает непосредственно из приведенного вывода.

Теорема 1. Пусть краевая задача (20) имеет решение $\xi_0(\tau, X, Y)$, $\eta_0(\tau, X, Y)$, ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ и при всех $X \in (0, 2\pi]$, $Y \in (0, 2\pi]$. Тогда функции

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ y(t, x) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} \xi_0(\varepsilon^2 t, x, 2\pi \varepsilon^{-1} x) e^{iR_1} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \eta_0(\varepsilon^2 t, x, 2\pi \varepsilon^{-1} x) e^{iR_2} + c.c., \quad (21)$$

$R_1 = (\pi \varepsilon^{-1} + \theta)x + \omega_1 t$, $R_2 = \omega_2 t$, удовлетворяют краевой задаче (7) при $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_{01}$, $T = T_0 + \varepsilon^2 T_{01}$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Таким образом, краевая задача (20) выполняет роль квазинормальной формы, поскольку ее нелокальная динамика определяет, при достаточно малых ε , поведение всех решений нелинейной задачи (7) с начальными условиями из достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия.

Квазинормальная форма (20) является нелинейной нестационарной 2π -распределенной по X, Y системой и может иметь множество решений. Далее рассмотрим только простейшие однородные по пространственным переменным решения и соответствующие им решения в модели цепочки лазеров (1).

3. Однородные решения квазинормальной формы

Положим $\xi(\tau, X, Y) = \xi(\tau) = \rho_1(\tau) \exp[i\phi_1(\tau)]$, $\eta(\tau, X, Y) = \eta(\tau) = \rho_2(\tau) \exp[i\phi_2(\tau)]$, тогда вместо системы (20) приходим к нормальной форме для динамики амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{d\tau} &= \rho_1(\mu_1 + a\rho_1^2 + b\rho_2^2), \\ \frac{d\rho_2}{d\tau} &= \rho_2(\mu_2 + c\rho_1^2 + d\rho_2^2), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mu_{1,2} = \text{Re } \alpha_{1,2}$, $a = \text{Re } L_{11}$, $b = \text{Re } L_{12}$, $c = \text{Re } L_{21}$, $d = \text{Re } L_{22}$, а поведение фаз $\phi_{1,2}(\tau)$ полностью определяется динамикой амплитуд.

Решения нормальной формы (22) были детально изучены ранее, например, в работе [21]. Ниже используем полученные результаты с учетом значений коэффициентов для точки $\gamma_0 = 0.1329$, $T_0 = 0.4515$ – точки D на рис. 1, в которой пересекаются две бифуркационные ветви, соответствующие возбуждению мод с частотой $\omega_1 = 22.148$ и волновыми числами из K_π ($z_0 = \pi$) и мод с частотой $\omega_2 = 19.75$ и волновыми числами из K_0 ($z_0 = 0$). Фрагмент бифуркационной диаграммы в более крупном масштабе приведен на рис. 2.

Коэффициенты $\mu_{1,2}$, как следует из (20) и (17), зависят от параметров надкритичности T_{01}, γ_{01} , которые определяют отклонения времени задержки T и коэффициента связи γ от точки бифуркации (T_0, γ_0) , и могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если $\mu_{1,2} < 0$, то система находится в докритической области (устойчиво состояние равновесия), а при других знаках – в других секторах диаграммы на рис. 2.

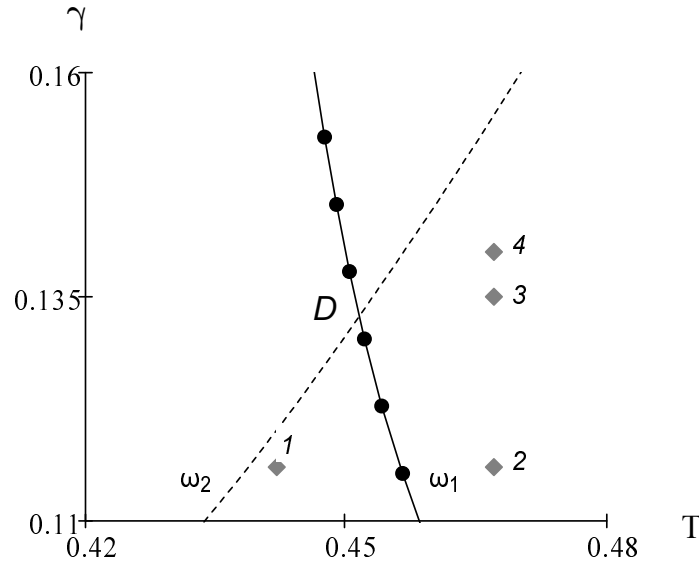


Рис. 2. Фрагмент рис. 1 в окрестности точки $\gamma_0 = 0.1329$ и $T_0 = 0.452$ – точки D пересечения двух бифуркационных ветвей, соответствующих возбуждению мод с частотой ω_1 и волновыми числами из K_π (черные кружки) и мод с частотой ω_2 и волновыми числами из K_0 (точки). Ромбами отмечены параметры γ, T , при которых в цепочке могут наблюдаться: 1 – неустойчивые синфазные ω_2 -колебания (24); 2 – устойчивые антифазные ω_1 -колебания (28); 3 – устойчивые 2-х частотные квазипериодические колебания (32); 4 – многочастотные квазипериодические колебания (34).

Коэффициенты a, b, c, d (ляпуновские величины) в нормальной форме (22) зависят только от критических значений T_0, γ_0 . По формулам (20) и (17) для точки D получаем:

$a = -4.855$, $b = -12.578$, $c = 8.956$, $d = 2.121$. Следовательно, имеем $a, b < 0$, $c, d > 0$, кроме того $\Delta = ad - bc > 0$.

Замечание 2. Знаки ляпуновских величин a и d определяют направление бифуркации при возбуждении мод с частотой ω_1 или ω_2 . При $a, d < 0$ ($a, d > 0$) бифуркация является суперкритической (субкритической). На рис. 1 участки границы, где $a, d < 0$ ($a, d > 0$) выделены кружками (точками). Видно, что для ω_1 -мод имеет место, как правило, суперкритическая бифуркация ($a < 0$). Для ω_2 -мод, за исключением участка A_1B , имеет место субкритическая бифуркация ($d > 0$). Такое чередование направления бифуркации вдоль границы устойчивости стационарного состояния для мод с разной частотой наблюдается при достаточно больших значениях параметров T и $v \gg 1$. Например, для построения диаграммы на рис. 1 мы использовали значение $v = 10^3$, которое типично для полупроводниковых лазеров. Таким образом, в окрестности точек бифуркации коразмерности два, за исключением точки B , при возбуждении мод с частотами ω_1 и ω_2 направление бифуркаций противоположно.

Следуя результатам работы [21], ниже перечислим возможные ненулевые решения нормальной формы (22), соответствующие им решения распределенной системы (7) и решения для исходной модели цепочки (1).

(1) Стационарное состояние

$$\rho_1(\tau) = \rho_{11} = 0, \quad \rho_2(\tau) = \rho_{21} = (-\mu_2/d)^{1/2} \quad (23)$$

существует и может быть устойчиво при $\mu_2 > 0$ и $d < 0$. Этому состоянию, по Теореме 1, соответствует решение краевой задачи (7),

$$u(t, x) = 2\varepsilon\rho_{21} \cos(\kappa_2x + \Omega_2t) + O(\varepsilon^2) \quad (24)$$

с волновым числом $\kappa_2 = 0$ и частотой $\Omega_2 = \omega_2 + \varepsilon^2\omega_{21}$, $\omega_{21} = \text{Im } \alpha_2 + \rho_{21}^2 \text{Im } L_{22}$. В свою очередь, решение (24) можно ассоциировать с периодическими колебаниями интенсивности излучения лазеров, локализованных на кольце в точках $x = x_j = \varepsilon j$,

$$u_j(t) = u(t, x_j) = 2\varepsilon\rho_{21} \cos(\Omega_2t) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

со сдвигом фаз для соседних элементов $\varepsilon\kappa_2 = 0$. Следовательно, при возникновении неустойчивости стационарной генерации можно ожидать синфазные ω_2 -колебания излучения соседних лазеров. Такой режим может существовать и быть устойчивым в окрестности точки B на рис. 1, где ляпуновская величина $d < 0$. При параметрах из окрестности точки D , например, отмеченных на рис. 2 ромбом 1, синфазный режим хотя и может существовать, но является неустойчивым поскольку в этом случае $d > 0$.

(2) Второе стационарное состояние нормальной формы (22) имеет вид

$$\rho_1(\tau) = \rho_{12} = (-\mu_1/a)^{1/2}, \quad \rho_2(\tau) = \rho_{22} = 0. \quad (25)$$

Это состояние существует и устойчиво при $a < 0$ в секторе, ограниченном неравенствами

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_2 < -\frac{\mu_1}{2}. \quad (26)$$

Как следует из теоремы 1, равновесию (25) соответствует решение краевой задачи (7) в виде бегущей волны,

$$u(t, x) = 2\varepsilon\rho_{12} \cos(\kappa_1x + \Omega_1t) + O(\varepsilon^2) \quad (27)$$

с волновым числом $\kappa_1 = \pi\varepsilon^{-1} + \theta$ и частотой $\Omega_1 = \omega_1 + \varepsilon^2\omega_{12}$, $\omega_{12} = \text{Im } \alpha_1 + \rho_{12}^2 \text{Im } L_{11}$. В свою очередь, бегущую волну (27) можно ассоциировать с колебаниями интенсивности излучения лазеров $u_j(t) = u(t, x_j)$, локализованных на кольце в точках $x = x_j = \varepsilon j$, $j = 1, 2, \dots, N$,

$$u_j(t) = 2\varepsilon\rho_{12} \cos(\varepsilon\kappa j + \Omega_2 t) + O(\varepsilon^2), \quad (28)$$

причем сдвиг фаз колебаний соседних элементов кольца равен $\varepsilon\kappa = \pi + \varepsilon/2$ (или π), если N – четное (или нечетное). Следовательно, при дестабилизации стационарной генерации можно ожидать антифазные (или близкие к антифазным) ω_1 -колебания излучения соседних лазеров. Поскольку для точки D ляпуновская величина $a < 0$, то антифазный режим может быть устойчивым, например, при параметрах, отмеченных на рис. 2 ромбом 2.

(3) Третье равновесное состояние в нормальной форме (22) имеет вид

$$\rho_1(\tau) = \rho_{13} = (\mu_2 b - \mu_1 d)^{1/2} \Delta^{-1/2}, \quad \rho_2(\tau) = \rho_{23} = (\mu_1 c - \mu_2 a)^{1/2} \Delta^{-1/2}. \quad (29)$$

Состояние (29) может существовать и быть устойчивым, если знаки ляпуновских величин a и d противоположны, $\Delta = ad - bc > 0$ и

$$\mu_2 > -\mu_1 \frac{d}{b}, \quad \mu_2 < \mu_1 \frac{d(a-c)}{a(b-d)}. \quad (30)$$

Стационарное решение (29) определяет решение краевой задачи (7) точно до $O(\varepsilon^2)$ в виде суммы волн,

$$u(t, x) = 2\varepsilon[\rho_{13} \cos(\kappa_1 x + \Omega_{13} t) + \rho_{23} \cos(\kappa_2 x + \Omega_{23} t)], \quad (31)$$

где волновые числа $\kappa_1 = \pi\varepsilon^{-1} + \theta$, $\kappa_2 = 0$ и частоты $\Omega_{13} = \omega_1 + \varepsilon^2\omega_{13}$, $\omega_{13} = \text{Im } \alpha_1 + \text{Im } L_{11}\rho_{13}^2 + \text{Im } L_{12}\rho_{23}^2$, $\Omega_{23} = \omega_2 + \varepsilon^2\omega_{23}$, $\omega_{23} = \text{Im } \alpha_2 + \text{Im } L_{21}\rho_{13}^2 + \text{Im } L_{22}\rho_{23}^2$.

В свою очередь, решение (31) может быть ассоциировано с 2-х частотными колебаниями интенсивности излучения связанных в цепочку лазеров, $u_j(t) = u(t, \varepsilon j)$. На рис. 3, а показан фазовый портрет двухчастотной квазипериодической динамики в плоскости интенсивности генерации двух соседних элементов цепочки $u_j(t), u_{j+1}(t)$, соответствующий стационарному решению (22) в нормальной форме. Такой режим может существовать и быть устойчивым при параметрах, отмеченных на рис. 2 ромбом 3 в окрестности точки D , поскольку в этом случае ляпуновские величины $a < 0$ и $d > 0$.

(4) Четвертое нестационарное решение нормальной формы (22) появляется в результате бифуркации равновесной точки (ρ_{13}, ρ_{23}) на границе сектора

$$\mu_2 = \mu_1 \frac{d(a-c)}{a(b-d)}, \quad (32)$$

например, для параметров, отмеченных ромбом 4 на рис. 2. При этом нормальная форма (22) становится интегрируемой, а точка равновесия становится центром, окруженным множеством циклов в фазовом пространстве, как показано на рис. 4, левая панель. Отмечены центр (ρ_{13}, ρ_{23}) , седловые состояния $(\rho_{11} = 0, \rho_{21})$ и $(\rho_{12}, \rho_{22} = 0)$, и циклы, которым отвечают периодические решения с некоторой частотой ω_4 , зависящей в том числе от начальных условий,

$$\rho_{14}(\tau) = \rho_{14}(\tau + 2\pi\omega_4^{-1}), \quad \rho_{24}(\tau) = \rho_{24}(\tau + 2\pi\omega_4^{-1}). \quad (33)$$

На рис. 4, справа, показаны динамика цикла, близкого к гетероклиническому. Отметим, что решения являются нейтрально устойчивыми. Уточнить устойчивость можно отдельно,

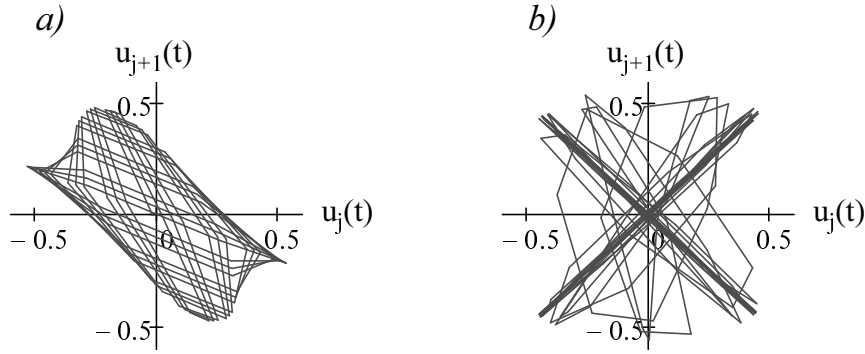


Рис. 3. Фазовые портреты квазипериодической динамики в плоскости интенсивности генерации двух соседних элементов цепочки $u_j(t), u_{j+1}(t)$ при параметрах, соответствующих а) стационарному решению (29) в нормальной форме; б) гетероклиническому циклу (33) в нормальной форме.

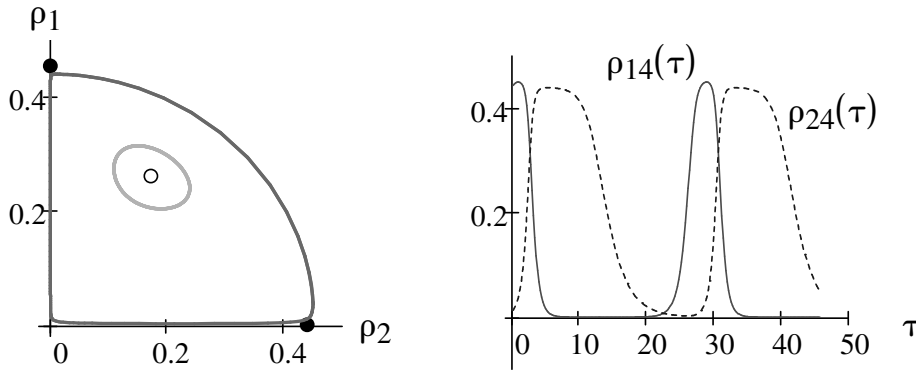


Рис. 4. Слева: фазовый портрет системы (22) с параметрами $a = -4.855, b = -12.578, c = 8.956, d = 2.121$ и при $\mu_1 = 1, \mu_2 = -0.41$, удовлетворяющим условию (32). Показаны два цикла, окружающие центр ($\rho_{13} = 0.172, \rho_{23} = 0.261$), один из которых малой амплитуды окружает центр, а второй цикл близок к гетероклиническому циклу, связывающему седловые состояния ($\rho_{11} = 0, \rho_{21} = 0.454$) и ($\rho_{12} = 0.44, \rho_{22} = 0$). Справа: временная динамика $\rho_{14}(\tau), \rho_{24}(\tau)$, соответствующая второму циклу.

для чего необходимо учесть в квазинормальной форме (20), а затем и в нормальной форме (22), члены более высокого порядка малости [21].

Периодические функции (33), по теореме 1, определяют решения краевой задачи (7),

$$u(t, x) = 2\varepsilon[\rho_{14}(\varepsilon^2 t) \cos(\kappa_1 x + \omega_1 t) + \rho_{24}(\varepsilon^2 t) \cos(\kappa_2 x + \omega_2 t)], \quad (34)$$

которые можно охарактеризовать как многочастотные.

Полученное решение (34), в свою очередь, можно ассоциировать с многочастотными колебаниями интенсивности излучения лазеров $u_j(t) = u(t, x_j)$, локализованных на кольце в точках $x = x_j = \varepsilon j, j = 1, 2, \dots, N$. Отметим, что частота $\varepsilon^2 \omega_4$ значительно меньше по сравнению с частотами ω_1 и ω_2 . Кроме того, если решения $\rho_{14}(\tau), \rho_{24}(\tau)$ соответствуют фазовой траектории близкой к гетероклиническому циклу, то, как показано на рис. 4, справа, система проводит длительное время около состояний ($\rho_{11} = 0, \rho_{21}$) или ($\rho_{12}, \rho_{22} = 0$) и быстро переходит от одного состояния к другому. Такой режим может существовать и быть устойчивым при параметрах, отмеченных на рис. 2 ромбом 3 в окрестности точки D , поскольку в этом случае ляпуновские величины $a < 0$ и $d > 0$.

На рис. 3, *b* показан фазовый портрет квазипериодической динамики в плоскости интенсивности генерации двух соседних элементов цепочки $u_j(t), u_{j+1}(t)$, соответствующий гетероклиническому циклу в нормальной форме с параметрами, указанными в подписи к рис. 4. Отрезки фазовой траектории вдоль биссектрисы первого координатного угла отвечают синхронным ω_2 -колебаниям элементов цепочки. Отрезки фазовой траектории вдоль биссектрисы второго координатного угла отвечают антифазным ω_1 -колебаниям элементов цепочки. В результате временная динамика цепочки лазеров будет демонстрировать медленную периодическую смену режимов полной синхронизации ω_2 -колебаний и антифазной синхронизации ω_1 -колебаний.

Поскольку решения нормальной формы являются нейтрально устойчивыми, то можно наблюдать описанный режим по крайней мере на асимптотически долгом временном промежутке.

Замечание 3. *Квазинормальная форма (20) является нелинейной нестационарной 2π -распределенной по X, Y системой и имеет не только рассмотренные однородные решения, но и множество неоднородных и нестационарных решений. Каждому из них будет соответствовать еще более сложный режим генерации цепочки связанных лазеров [32].*

4. Заключение

В работе представлен локальный анализ распределенной интегро-дифференциальной системы, моделирующей динамику генерации большой цепочки идентичных лазеров с двупаправленными запаздывающими связями. Получены критические значения коэффициента связи и запаздывания в цепи связи, соответствующие бифуркациям коразмерности два. При этом стационарный режим генерации становится неустойчивым и одновременно возбуждаются две группы мод с различными частотами ω_1 и ω_2 и волновыми числами из различных множеств K_0 и K_π . Такие бифуркации реализуются именно при рассмотренном *двустороннем* способе связи элементов в цепочке, а при других способах связи комбинации возбуждаемых мод могут быть другими. Например, в модели с *диффузионными* связями с учетом собственной обратной связи для каждого элемента [30], при бифуркациях коразмерности два возбуждаются моды с разными частотами и с волновыми числами из одного и того же множества K_π , а в модели с *односторонними* связями [28] бифуркации коразмерности два отсутствуют.

Показано, что размерность критических случаев стремится к бесконечности при неограниченном увеличении числа элементов в цепочке. Предложен алгоритм построения квазинормальных форм – уравнений для медленно меняющихся амплитуд несущих волн. В качестве квазинормальной формы получена система двух уравнений в частных производных типа Гинзбурга-Ландау с периодическими краевыми условиями. Нелокальная динамика квазинормальной формы определяет решения исходной распределенной системы уравнений.

Мы проанализировали простейшие однородные решения квазинормальной формы с коэффициентами, которые рассчитали исходя из возможных параметров модели цепочки лазеров класса В. Одно из однородных стационарных решений соответствует режиму синфазных одночастотных колебаний интенсивности излучения лазеров в цепочке. Второе стационарное решение отвечает режиму антифазных одночастотных колебаний. Такие одночастотные режимы могут быть устойчивыми в случае суперкритической бифуркации.

Еще одно ненулевое стационарное решение нормальной формы отвечает режиму двухчастотных колебаний исходной системы. Режим квазипериодических колебаний может реа-

лизоваться и быть устойчивым в локальной окрестности точке бифуркации коразмерности два только в случае, если бифуркации для мод с одной частотой суперкритические, а для мод с другой частотой – субкритические. Именно это условие выполняется для типичных параметров лазеров класса В.

При том же условии – противоположное направление бифуркаций для мод с разной частотой в точке бифуркации коразмерности два – в фазовом пространстве нормальной формы возможно образование циклов, которым будут отвечать сложные многочастотные колебания исходной системы. В частности, цикл в нормальной форме может проявиться в динамике генерации цепочки лазеров с двусторонней запаздывающей связью как медленное периодическое чередование режимов синфазной и антифазной синхронизации.

Таким образом, полученная квазинормальная форма позволяет описать ряд коллективных динамических эффектов в цепочке. Такой подход может быть использован для исследований и более сложных режимов генерации лазеров в цепочке на основе других неоднородных нестационарных решений квазинормальной формы, полученных ранее при изучении уравнений типа Гинзбурга-Ландау [32].

Список литературы

1. Soriano M. C., Ojalvo J. G., Mirasso C. R., Fischer I. Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers // *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85. P. 421.
2. Nixon M., Fridman M., Ronen E., Friesem A. A., Davidson N., Kanter I. Controlling synchronization in large laser networks // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 108. P. 214101.
3. Nixon M., Ronen E., Friesem A. A., Davidson N. Observing geometric frustration with thousands of coupled lasers // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110. P. 184102.
4. Ji Peng, Ye Jiachen, Mu Yu, Lin Wei, Tian Yang, Hens C., Perc Matja, Tang Yang, Sun Jie, Kurths Jurgen Signal propagation in complex networks // *Phys. Rep.* 2023. Vol. 1017. P. 1–96.
5. Shena J., Kominis Y., Bountis T., Kovanis V. Spatial control of localized oscillations in arrays of coupled laser dimmers // *Phys. Rev. E.* 2020. Vol. 102, no. 1. P. 012201.
6. Pando A., Gadasi S., Bernstein E., Stroev N., Friesem A., Davidson N. Synchronization in Coupled Laser Arrays with Correlated and Uncorrelated Disorder // *Phys. Rev. Lett.* 2024. Vol. 133. P. 113803.
7. Wicczorek S., Krauskopf B., Simpson T. B., Lenstra D. The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers // *Phys. Rep.* 2005. Vol. 416. P. 1–128.
8. Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A. Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Optics Communications.* 1999. Vol. 165, no. 4–6. P. 279–292.
9. Kovalev A. V., Islam Md. S., Locquet A., Citrin D. S., Viktorov E. A., Erneux T. Resonances between fundamental frequencies for lasers with large delayed feedbacks // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 99. P. 062219.
10. Hohl A., Gavrielides A., Erneux T., Kovanis V. Quasiperiodic synchronization for two delay-coupled semiconductor lasers // *Phys. Rev. A.* 1999. Vol. 59. P. 3941.
11. Loose A., Wunsche H.-J., Henneberger F. Synchronization of quasiperiodic oscillations to a periodic force studied with semiconductor lasers // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82. P. 035201.
12. Fan Y., Shore K. A., Chao X. Dynamics of Electrically Pumped Semiconductor Nano-Laser Arrays // *Photonics.* 2023. Vol. 10. P. 1249.
13. Kim M.-Y., Roy R., Aron J. L., Carr T. W., Schwartz I. B. Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: Theory and experiment // *Phys. Rev.*

- Lett. 2005. Vol. 94. P. 088101.
14. *Vicente R., Tang S., Mulet J., Mirasso R., J. Liu ia-Ming* Dynamics of semiconductor lasers with bidirectional optoelectronic coupling: Stability, route to chaos, and entrainment // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 046216.
 15. *Vicente R., Tang S., Mulet J., Mirasso R., Liu Jia-Ming* Synchronization properties of two self-oscillating semiconductor lasers subject to delayed optoelectronic mutual coupling // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 047201.
 16. *Kozyreff G., Vladimirov A. G., Mandel Paul* Dynamics of a semiconductor laser array with delayed global coupling // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 016613.
 17. *Mehrabbeik Mahtab, Jafari Sajad, Meucci Riccardo, Perc Matja* Synchronization and multi-stability in a network of diffusively coupled laser models // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2023. Vol. 125. P. 107380.
 18. *Shena J., Hizanidis J., Kouvaris N. E., Tsironis G. P.* Localized patterns in star networks of class-B lasers with optoelectronic feedback // Phys. Rev. A. 2018. Vol. 98. P. 053817.
 19. *Witte V. De, Meijer H. G. E.* Analysis of bifurcations of limit cycles with Lyapunov coefficients // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2014. Vol. 269. P. 40.
 20. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Two types of quasiperiodic partial synchrony in oscillator ensembles // Physical Review E. 2015. Vol. 92. P. 012919.
 21. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscillation, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag, 1983.
 22. *Emelianova Yu. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2013. Vol. 244. P. 36.
 23. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2006. T. 73. №. 5. P. 056202.
 24. *Anishchenko V. S., Nikolaev S. M.* Transition to chaos from quasiperiodic motions on a four-dimensional torus perturbed by external noise // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. T. 18. №. 09. P. 2733-2741.
 25. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Shchegoleva N. A., Stankevich N. V.* Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2019. Vol. 398. P. 1–12.
 26. *Kuznetsov A. P., Sedova Yu., Stankevich N.* Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics // Chaos, Solitons & Fractals. 2023. Vol. 169. P. 113–140.
 27. *Kashchenko S. A.* Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033147.
 28. *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A.* Phase-synchronized oscillations in a ring of pump-coupled lasers // Optics Communications. 2023. Vol. 545. P. 129688.
 29. *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A.* Antiphase and in-phase dynamics in laser chain models with delayed bidirectional couplings // Physica D. 2023. Vol. 467. P. 134223.
 30. *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A., Tolbey A. O.* Quasiperiodic dynamics in a large chain of pump-coupled lasers // NDCS. 2025. Vol. 28. P. 79–89.
 31. *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров // Москва: Наука , 1999. 368 с. ISBN 5-02-014375-8. *Khanin Ya.I.* Fundamentals of laser dynamics. Moscow, Nauka: 1999. 368 p. ISBN 5-02-014375-8.
 32. *Garcia-Morales V., Krischer K.* The complex Ginzburg-Landau equation: An introduction // Contemporary Physics. 2012. Vol. 53, no. 2. P. 79–95.

References

1. Soriano M. C., Ojalvo J. G., Mirasso C. R., Fischer I. Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers // *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85. P. 421.
2. Nixon M., Fridman M., Ronen E., Friesem A. A., Davidson N., Kanter I. Controlling synchronization in large laser networks // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 108. P. 214101.
3. Nixon M., Ronen E., Friesem A. A., Davidson N. Observing geometric frustration with thousands of coupled lasers // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110. P. 184102.
4. Ji Peng, Ye Jiachen, Mu Yu, Lin Wei, Tian Yang, Hens C., Perc Matja, Tang Yang, Sun Jie, Kurths Jurgen Signal propagation in complex networks // *Phys. Rep.* 2023. Vol. 1017. P. 1–96.
5. Shena J., Kominis Y., Bountis T., Kovanis V. Spatial control of localized oscillations in arrays of coupled laser dimmers // *Phys. Rev. E.* 2020. Vol. 102, no. 1. P. 012201.
6. Pando A., Gadasi S., Bernstein E., Stroev N., Friesem A., Davidson N. Synchronization in Coupled Laser Arrays with Correlated and Uncorrelated Disorder // *Phys. Rev. Lett.* 2024. Vol. 133. P. 113803.
7. Wieczorek S., Krauskopf B., Simpson T. B., Lenstra D. The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers // *Phys. Rep.* 2005. Vol. 416. P. 1–128.
8. Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A. Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Optics Communications.* 1999. Vol. 165, no. 4–6. P. 279–292.
9. Kovalev A. V., Islam Md. S., Locquet A., Citrin D. S., Viktorov E. A., Erneux T. Resonances between fundamental frequencies for lasers with large delayed feedbacks // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 99. P. 062219.
10. Hohl A., Gavrielides A., Erneux T., Kovanis V. Quasiperiodic synchronization for two delay-coupled semiconductor lasers // *Phys. Rev. A.* 1999. Vol. 59. P. 3941.
11. Loose A., Wunsche H.-J., Henneberger F. Synchronization of quasiperiodic oscillations to a periodic force studied with semiconductor lasers // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82. P. 035201.
12. Fan Y., Shore K. A., Chao X. Dynamics of Electrically Pumped Semiconductor Nano-Laser Arrays // *Photonics.* 2023. Vol. 10. P. 1249.
13. Kim M.-Y., Roy R., Aron J. L., Carr T. W., Schwartz I. B. Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: Theory and experiment // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 088101.
14. Vicente R., Tang S., Mulet J., Mirasso R., J. Liu ia-Ming Dynamics of semiconductor lasers with bidirectional optoelectronic coupling: Stability, route to chaos, and entrainment // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 046216.
15. Vicente R., Tang S., Mulet J., Mirasso R., Liu Jia-Ming Synchronization properties of two self-oscillating semiconductor lasers subject to delayed optoelectronic mutual coupling // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 047201.
16. Kozyreff G., Vladimirov A. G., Mandel Paul Dynamics of a semiconductor laser array with delayed global coupling // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. P. 016613.
17. Mehrabbeik Mahtab, Jafari Sajad, Meucci Riccardo, Perc Matja Synchronization and multi-stability in a network of diffusively coupled laser models // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2023. Vol. 125. P. 107380.
18. Shena J., Hizanidis J., Kovanis N. E., Tsironis G. P. Localized patterns in star networks of class-B lasers with optoelectronic feedback // *Phys. Rev. A.* 2018. Vol. 98. P. 053817.
19. Witte V. De, Meijer H. G. E. Analysis of bifurcations of limit cycles with Lyapunov coefficients // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2014. Vol. 269. P. 40.

20. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Two types of quasiperiodic partial synchrony in oscillator ensembles // *Physical Review E*. 2015. Vol. 92. P. 012919.
21. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscillation, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag, 1983.
22. *Emelianova Yu. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2013. Vol. 244. P. 36.
23. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // *Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2006. T. 73. №. 5. P. 056202.
24. *Anishchenko V. S., Nikolaev S. M.* Transition to chaos from quasiperiodic motions on a four-dimensional torus perturbed by external noise // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008. T. 18. №. 09. P. 2733-2741.
25. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Shchegoleva N. A., Stankevich N. V.* Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019. Vol. 398. P. 1–12.
26. *Kuznetsov A. P., Sedova Yu., Stankevich N.* Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023. Vol. 169. P. 113–140.
27. *Kashchenko S. A.* Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033147.
28. *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A.* Phase-synchronized oscillations in a ring of pump-coupled lasers // *Optics Communications*. 2023. Vol. 545. P. 129688.
29. *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A.* Antiphase and in-phase dynamics in laser chain models with delayed bidirectional couplings // *Physica D*. 2023. Vol. 467. P. 134223.
30. *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A., Tolbey A. O.* Quasiperiodic dynamics in a large chain of pump-coupled lasers // *NDCS*. 2025. Vol. 28. P. 79–89.
31. *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров // Москва: Наука, 1999. 368 с. ISBN 5-02-014375-8. *Khanin Ya.I.* Fundamentals of laser dynamics. Moscow, Nauka: 1999. 368 p. ISBN 5-02-014375-8.
32. *Garcia-Morales V., Krischer K.* The complex Ginzburg-Landau equation: An introduction // *Contemporary Physics*. 2012. Vol. 53, no. 2. P. 79–95.



Григорьева Елена Викторовна — родилась в 1957 году, окончила Белорусский государственный университет (1979). Работала в институте физики АН БССР, БГУ, в настоящий момент работает в БГЭУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в БГУ (2004) в области нелинейной динамики лазерных систем. Опубликовала более 100 научных и научно-методических трудов.

Республика Беларусь, 220070 Минск, Партизанский пр., 26
Белорусский государственный экономический университет
E-mail: grigorieva@tut.by
AuthorID (eLibrary.Ru): 24668

Кащенко Сергей Александрович — родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, директор объединенного института математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 500 научных работ и 10 монографий. За заслуги в разработке приоритетных направлений науки, создании научной школы, воспитании и подготовке научных кадров в 2020 году Сергей Александрович Кащенко награжден почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации». В 2023 году награжден медалью «За вклад в реализацию государственной политики в области образования и научно-технологического развития» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Победитель конкурса «Лучший ученый ЯрГУ в области естественных наук» (2023, 2024).



Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0002-8777-4302
AuthorID (eLibrary.Ru): 8238