



МЕТОД КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В АНАЛИЗЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ 2-ТОРА

Л.Б. Ряшко

На основе метода квазипотенциала исследуется стационарное распределение случайных траекторий в окрестности тороидальных многообразий стохастически возмущенных нелинейных систем. Для аппроксимации квазипотенциала используется квадратичная форма, задаваемая некоторой определенной на торе матричной функцией. Эта функция – стохастическая функция чувствительности – характеризует реакцию рассматриваемой системы на случайные возмущения, позволяет описать разброс случайных траекторий вблизи тора. Построение этой функции сводится к решению краевой задачи для линейного дифференциального матричного уравнения. Для случая 2-тора в трехмерном пространстве дается конструктивное решение этой задачи. Построение стохастической функции чувствительности – скалярной функции – сводится к решению некоторого функционального уравнения. Эффективность полученных результатов демонстрируется на примере.

Введение

Исследования последних лет показали, что разнообразие, наблюдаемое в поведении нелинейных динамических систем, можно свести к анализу относительно простых стационарных режимов (инвариантных многообразий) и их качественных преобразований (бифуркаций). Так, например, одним из стандартных сценариев перехода от порядка к хаосу служит цепь последовательных бифуркаций: положение равновесия (точка покоя) – периодические колебания (цикл) – квазипериодические колебания (тор) – хаотические колебания (странный аттрактор). Каждый такой переход сопровождается потерей устойчивости простого многообразия и рождением нового, более сложного устойчивого многообразия. Анализ устойчивости этих многообразий, исследование их чувствительности к возмущениям различной природы, является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики. Значительный интерес вызывает изучение реакции аттракторов

динамических систем на случайные возмущения. Если циклы и, тем более, точки покоя являются достаточно подробно исследованными объектами современной теории стохастической нелинейной динамики, то стохастически возмущенные тороидальные инвариантные многообразия еще только начинают рассматриваться. Тор, ставший после работ Пуанкаре, Данжуа и Арнольда [1] классическим объектом качественной теории дифференциальных уравнений, достаточно подробно исследовался с точки зрения его структурной устойчивости (КАМ-теория). Анализ устойчивости тороидальных многообразий к возмущению начальных данных даже в рамках детерминированной теории посвящено лишь небольшое число работ (см., например, [2–7]). Экспоненциальная среднеквадратическая устойчивость стохастически возмущенных тороидальных движений исследовалась в [8].

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

где x – n -мерный вектор, f – достаточно гладкая вектор-функция. Предполагается, что система (1) имеет инвариантное двумерное тороидальное многообразие Γ .

Поведение фазовых траекторий на тороидальной поверхности в общем случае может быть весьма сложным. В данной работе предполагается, что на многообразии Γ нет точек покоя и фазовые траектории системы (1) полностью покрывают тор Γ . При этом тороидальная поверхность может целиком состоять как из замкнутых фазовых траекторий – циклов и траекторий, к ним сходящихся (периодическая обмотка), так и из семейства незамкнутых траекторий, лежащих всюду плотно на Γ (квазипериодическая обмотка).

В формальных построениях будем исходить из возможности следующей параметризации 2-тора Γ (рис. 1). Пусть на Γ лежит некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая α (экватор), задаваемая функцией $\alpha(s)$ на интервале $0 \leq s \leq 1$ с условием $\alpha(0) = \alpha(1)$. Из каждой точки $\alpha(s)$ кривой α , как начальной, выходит решение $x(t, s)$ системы (1) с условием $x(0, s) = \alpha(s)$. Предполагается, что траектория $x(t, s)$, совершив оборот вокруг тора Γ , через

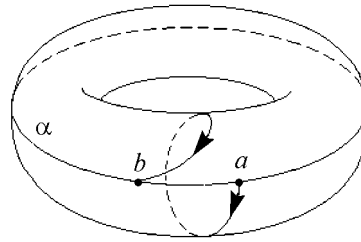


Рис. 1. α – замкнутая кривая (экватор), $a = x(0, s) = \alpha(s)$ – начальная точка решения $x(t, s)$, $b = x(T(s), s) = \alpha(\tau(s))$ – точка первого возвращения решения $x(t, s)$ на кривую α

некоторое время вновь пересечет кривую α . Пусть $T(s) = \min\{t > 0 \mid x(t, s) \in \alpha\}$ – момент первого возвращения траектории $x(t, s)$ на кривую α , при этом $x(T(s), s)$ есть точка возвращения. Пусть $\tau(s)$ такова, что $\alpha(\tau(s)) = x(T(s), s)$. Здесь $\tau(s)$ есть функция последования сечений Пуанкаре кривой α фазовыми траекториями системы (1). Естественная область изменения переменной s – окружность. При рассмотрении функции $\tau(s)$ на полуинтервале $[0, 1)$ неизбежно возникают разрывы. Для того чтобы обеспечить непрерывность $\tau(s)$, принято считать областью изменения s всю числовую ось. При этом функции $\alpha(s)$ и $\tau(s)$ являются периодическими $\alpha(s) = \alpha(s + 1)$, $\tau(s) = \tau(s + 1)$. Равенства $x(t, s) = x(t, s + 1)$, $x(T(s) + t, s) = x(t, \tau(s))$ позволяют распространить функцию $x(t, s)$ на всю плоскость $\Pi = \{(t, s) \mid -\infty < t < +\infty, -\infty < s < +\infty\}$.

Функция $x(t, s)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками 2-тора Γ и точками множества $\{(t, s) \mid 0 \leq t < T(s), 0 \leq s < 1\}$. Вектор-функции $\frac{\partial x(t, s)}{\partial t}$, $\frac{\partial x(t, s)}{\partial s}$ – линейно независимы. При этом для каждой точки γ на торе Γ можно указать $t = t(\gamma)$, $s = s(\gamma)$ такие, что $x(t, s) = \gamma$.

Рассмотрим в некоторой окрестности D тороидальной поверхности Γ функцию $\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка 2-тора Γ . Функция $\gamma(x)$ в общем случае может быть многозначной. Однако вблизи достаточно гладкой поверхности Γ все обстоит просто. При рассмотрении вопросов устойчивости окрестность D можно считать достаточно малой. При этом $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – вектор отклонения x от Γ – будет в D однозначной и гладкой функцией.

Определение 1. Тор Γ называется экспоненциально устойчивым (\mathcal{E} -устойчивым) в D , если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ выполняется условие

$$\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-lt}\|\Delta(x_0)\|,$$

где $x(t)$ – решение системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in D$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

\mathcal{E} -устойчивость тороидальных многообразий для детерминированных систем исследовалась в работах [2–7].

Исследование аттракторов нелинейных стохастических систем было начато в [9] и продолжено в большом числе работ (см., например, [10–15]). Для систем со случайными возмущениями стандартной моделью является стохастическая система Ито

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\dot{w}, \quad (2)$$

где $w(t)$ – n -мерный винеровский процесс; $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $(n \times n)$ -функция, определяющая зависимость помех от состояния системы; ε – параметр интенсивности возмущений. Предполагается, что $\det \sigma(x)|_{\Gamma} \neq 0$ – шумы на торе Γ являются невырожденными. В результате действия возмущений случайные траектории системы (2) покидают тороидальную поверхность и формируют вокруг нее некоторое случайное распределение.

Исчерпывающее вероятностное описание (плотность распределения $\rho(t, x, \varepsilon)$) случайного разброса траекторий возмущенной системы вокруг Γ дается уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК). Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся в (2) режим стохастических автоколебаний (стохастический аттрактор), то можно ограничиться исследованием стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК. Аналитическое исследование этого уравнения, даже в простейшем случае цикла на плоскости, представляет весьма сложную задачу. При малых шумах здесь возникают известные трудности, связанные с малыми коэффициентами при старших производных.

Соответствующая асимптотика стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$ в случае малых шумов задается функцией $v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon)$ – квазипотенциалом. При этом $\rho(x, \varepsilon) \approx K \cdot e^{-\frac{v(x)}{\varepsilon^2}}$. Квазипотенциал был введен в работах А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина в связи с решением известной задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из области, содержащей устойчивую точку покоя, и рассматривался в [16–18].

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби. Уравнение Гамильтона – Якоби выглядит проще, нежели исходное уравнение ФПК, однако и его точное решение является по-прежнему весьма сложной задачей. Здесь возможен конструктивный подход, связанный с введением еще одной асимптотики – малой окрестности исследуемого аттрактора. Для случая предельного цикла аппроксимация квазипотенциала исследовалась в [19].

В разделе 1 настоящей работы дается локальное описание квазипотенциала вблизи тора Γ . Аппроксимацией квазипотенциала $v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3)$ служит квадратичная форма $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))$, задаваемая определенной на Γ симметрической $(n \times n)$ -матрицей $\Phi(\gamma) = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma) \right]^+$ (+ означает псевдообращение). В результате асимптотика стационарной плотности распределения для рассматриваемого в работе случая, когда малы как шумы, так и отклонения от тора, может быть записана в форме нормального распределения с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$, дающей простое описание отклика рассматриваемой нелинейной системы на малые случайные возмущения. Функция $\Phi(\gamma)$ – стохастическая функция чувствительности тороидальной поверхности – позволяет сравнивать реакцию различных ее участков (разброс случайных траекторий) на вносимые помехи, предсказывая достаточно тонкие эффекты случайных воздействий. Возможности такого анализа для случая стохастически возмущенного цикла рассмотрены в [20–21]. В [22] с помощью функции чувствительности удалось провести конструктивный анализ стохастической модели Лоренца в цепи бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Данная работа посвящена разработке теории построения функции стохастической чувствительности для тороидальных многообразий. В разделе 1 для случая 2-тора получено параметрическое описание стохастической функции чувствительности $\Phi(\gamma)$ при помощи матрицы $W(t, s) = \Phi(x(t, s))$ на решениях $x(t, s)$, лежащих на тороидальной поверхности. Отыскание этой матрицы сводится к решению линейного дифференциального матричного уравнения.

В разделе 2 детально исследуется случай 2-тора в трехмерном пространстве. Здесь построение стохастической функции чувствительности – скалярной функции – сводится к решению некоторого функционального уравнения.

Эффективность полученных результатов демонстрируется в разделе 3, где дается пример конструктивного построения стохастической функции чувствительности и ее исследования в зависимости от параметров системы.

1. Аппроксимация квазипотенциала. Функция чувствительности для тора

Квазипотенциалом системы (2) в окрестности D тороидальной поверхности Γ является функция

$$v(x) = \inf_{u \in U} J(x, u), \quad J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^\top(\tau) S^{-1}(y(\tau)) u(\tau) d\tau, \quad S(y) = \sigma(y) \sigma^\top(y).$$

Здесь множество допустимых управлений U составляют n -мерные вектор-функции u ,

переводящие систему

$$\dot{y} = -f(y) + u \quad (1.1)$$

из начального положения $y(0) = x$ на тороидальную поверхность $\Gamma : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta(y(\tau)) = 0$.
Функция $v(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби

$$\left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \mathcal{S}(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.2)$$

с условиями

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad v|_{D \setminus \Gamma} > 0. \quad (1.3)$$

Квазипотенциал $v(x)$ в окрестности D является функцией Ляпунова для системы (1) и позволяет показать асимптотическую устойчивость тора Γ . Действительно, функция $v(x)$ в точках тора Γ обращается в нуль, а вне тора – положительна; производная $\dot{v}(x)$ в силу системы (1), благодаря (1.2), имеет вид

$$\dot{v} = \left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \mathcal{S}(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \leq 0$$

и обращается в нуль только в точках тора Γ . Функция v строго убывает и стремится к нулю на всяком решении системы (1), выходящем из начальной точки, расположенной около тора.

Квазипотенциал $v(x)$ обращается в минимум на тороидальной поверхности Γ , где вместе со своими частными производными первого порядка равен нулю. Поэтому первым приближением функции $v(x)$ вблизи тора Γ является квадратичная форма

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), \Psi(\gamma(x))\Delta(x)), \quad v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3),$$

задаваемая определенной на Γ функцией $\Psi(\gamma) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)$. В каждой точке γ тора Γ значение функции $\Psi(\gamma)$ – симметрическая неотрицательно определенная $(n \times n)$ -матрица.

Проведем через точку γ поверхности Γ произвольную гладкую кривую β , задаваемую параметрически функцией $\beta(\tau)$. Дифференцируя очевидное тождество $\frac{\partial v}{\partial x}(\beta(\tau)) \equiv 0$ по τ , получим тождество $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\beta(\tau)) \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} \equiv 0$, означающее, что

$$\Psi(\gamma)r(\gamma) \equiv 0, \quad (1.4)$$

где $r(\gamma)$ – произвольный вектор, касательный к тору Γ в точке γ . Условие (1.4) означает, что матрица $\Psi(\gamma)$ является вырожденной и имеет ранг $\text{rang}(\Psi(\gamma)) = n - 2$.

Значения функции $\Psi(\gamma)$ в точках тора удобно искать в параметрической форме. Воспользовавшись параметризацией 2-тора, связанной с семейством решений $x(t, s)$ детерминированной системы (1), перейдем от функции $\Psi(\gamma)$, заданной на Γ , к функции

$$V(t, s) = \Psi(x(t, s)), \quad (1.5)$$

заданной на Π . При этом, благодаря равенствам $x(t, s+1) = x(t, s)$, $x(T(s)+t, s) = x(t, \tau(s))$, должны выполняться условия

$$V(t, s+1) = V(t, s), \quad V(T(s)+t, s) = V(t, \tau(s)). \quad (1.6)$$

Равенство $\Psi(\gamma) = V(t(\gamma), s(\gamma))$ позволяет по функции $V(t, s)$ однозначно восстановить $\Psi(\gamma)$. При этом равенство (1.4), определяющее характер вырождения матриц $\Psi(\gamma)$, эквивалентно системе

$$V(t, s) \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} \equiv 0, \quad V(t, s) \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} \equiv 0,$$

которую, в свою очередь, можно записать в форме

$$V(t, s)y(t, s) = 0, \quad V(t, s)z(t, s) = 0. \quad (1.7)$$

Здесь

$$y(t, s) = f(x(t, s)), \quad (1.8)$$

а $z(t, s)$ – решение системы

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F(t, s)z, \quad \text{где } F(t, s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, s)) \quad (1.9)$$

с начальным условием $z(0, s) = \frac{da(s)}{ds}$.

Установленное таким образом соответствие функций $\Psi(\gamma)$ и $V(t, s)$ позволяет конструировать квазипотенциал $v(x)$ с помощью функций $V(t, s)$ – элементов пространства Σ . Пространство Σ составляют функции $V(t, s)$, определенные и достаточно гладкие на плоскости Π со значениями – симметрическими $(n \times n)$ -матрицами, для которых справедливы условия (1.6), (1.7).

В последующих построениях важную роль играют матрицы, связанные с проекторами на подпространство, ортогональное тороидальной поверхности.

Рассмотрим матрицу $P_{y,z}$, задающую оператор проектирования на подпространство, ортогональное плоскости, натянутой на векторы y и z . Введем матрицу $P(t, s) = P_{y(t,s),z(t,s)}$, где $y(t, s)$ и $z(t, s)$ определены в (1.8), (1.9) и задают плоскость касательную к 2-тору Γ в точке $x(t, s)$.

Отметим, что $P_{y,z} = P_y - \frac{P_y z z^\top P_y}{z^\top P_y z}$, $P_y = I - \frac{y y^\top}{y^\top y}$, $\text{rank}(P_{y,z}) = n - 2$.

Определение 2. Матрицу $V(t, s)$ из Σ будем называть $P(t, s)$ -положительно определенной в точке (t, s) , если для любого вектора u , такого, что $P(t, s)u \neq 0$ справедливо неравенство $(u, V(t, s)u) > 0$. Матрицу $V(t, s)$, являющуюся $P(t, s)$ -положительно определенной при любых $(t, s) \in \Pi$, будем называть P -положительно определенной.

В пространстве Σ рассмотрим конус матриц $\mathcal{K} = \{V \in \Sigma | V(t, s)\text{-неотрицательно определенная при любых } (t, s) \in \Pi\}$ и множество $\mathcal{K}_P = \{V \in \Sigma | V - P\text{-положительно определенная}\}$.

Дифференцируя уравнение Гамильтона – Якоби (1.2) в предположении достаточной гладкости квазипотенциала $v(x)$ и подставляя $x = x(t, s)$, получим для $V(t, s)$ матричное дифференциальное уравнение Бернулли

$$\frac{\partial V(t, s)}{\partial t} + F^\top(t, s)V(t, s) + V(t, s)F(t, s) + V(t, s)S(t, s)V(t, s) = 0, \quad V \in \Sigma, \quad (1.10)$$

где

$$F(t, s) = \frac{\partial f(x(t, s))}{\partial x}, \quad S(t, s) = \mathcal{S}(x(t, s)) = \sigma(x(t, s))\sigma^\top(x(t, s)).$$

Рассмотрим наряду с (1.7) линейное матричное уравнение

$$\frac{\partial W(t, s)}{\partial t} = F(t, s)W(t, s) + W(t, s)F^\top(t, s) + P(t, s)S(t, s)P(t, s), \quad W \in \Sigma. \quad (1.11)$$

Лемма 1. Пусть тор Γ системы (1) является \mathcal{E} -устойчивым. Тогда уравнение (1.11) имеет единственное решение $W \in \mathcal{K}$.

Доказательство. \mathcal{E} -устойчивость тора означает [7], что для любого элемента $C \in \mathcal{K}$ существует единственное решение $V \in \mathcal{K}$ матричного уравнения Ляпунова $L[V] = -C$, где оператор Ляпунова L имеет вид

$$L[V] = \frac{\partial V(t, s)}{\partial t} + F^\top(t, s)V(t, s) + V(t, s)F(t, s).$$

Поскольку конус \mathcal{K} – воспроизводящий в Σ [23], то оператор L обратим на всем пространстве Σ . Для пространства Σ со скалярным произведением

$$\langle V, W \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr}(V(t, s)W(t, s)) dt$$

оператор L^* , сопряженный к L , имеет следующее представление

$$L^*[W] = -\frac{\partial W(t, s)}{\partial t} + F(t, s)W(t, s) + W(t, s)F^\top(t, s).$$

При этом уравнение (1.11) можно записать в виде $L^*[W] + PSP = 0$. Единственным решением этого уравнения будет $W = -(L^{-1})^*[PSP] \in \mathcal{K}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть W – решение (1.11). Тогда $V = W^+$ – решение (1.10).

Доказательство. Умножая (1.11) слева и справа на V , получим

$$V\dot{W}V = VFP + PF^\top V + VSV. \quad (1.12)$$

Здесь $\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial t}$. Дифференцируя равенство $V = VWV$, получим $\dot{V} = \dot{V}P + V\dot{W}V + P\dot{V}$, откуда следует $V\dot{W}V = \dot{V} - \dot{V}P - P\dot{V}$. Умножая последнее равенство слева и справа на P , получим $V\dot{W}V = -P\dot{V}P$, откуда, с учетом (1.12), следует

$$P[\dot{V} + VF + F^\top V + VSV]P = 0. \quad (1.13)$$

Для произвольного вектора $r = r(t, s)$ из плоскости, натянутой на векторы $y(t, s)$, $z(t, s)$, с учетом $Vr = 0$, выполняется

$$[\dot{V} + VF + F^\top V + VSV]r = [\dot{V} + VF]r = [\dot{V}r] = 0. \quad (1.14)$$

Из (1.13), (1.14) следует, что $V = W^+$ – решение (1.10). Лемма 2 доказана.

Полученные результаты дают возможность записать аппроксимацию квазипотенциала

$$v(x) \approx \varphi(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x)), \quad \Phi(\gamma) = W(t(\gamma), s(\gamma)),$$

используя решение $W(t, s)$ линейного матричного уравнения (1.11).

Теорема 1. Для квазипотенциала $v(x)$ в окрестности D тора Γ справедлива аппроксимация

$$v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3). \quad (1.15)$$

Доказательство. При выводе уравнений (1.10), (1.11) предполагалось, что квазипотенциал $v(x)$ – достаточно гладкая функция. Приведем независимое доказательство, не использующее предположений гладкости.

Разность $R(x, u) = J(x, u) - \varphi(x)$ представим в интегральном виде

$$R(x, u) = \int_0^\infty G(y(s), u(s)) ds, \quad G(y, u) = \frac{1}{2} u^\top \mathcal{S}^{-1}(y) u + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(y), -f(y) + u \right).$$

Здесь $y(t), u(t)$ – состояние и управление системы (1.1).

Управление $u_0(y) = -\mathcal{S}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y)$ минимизирует по u функцию $G(y, u)$

$$G(y, u) \geq G(y, u_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(y), \mathcal{S}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y) \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(y), f_0(y) \right)$$

и формирует замкнутую систему

$$\dot{y} = f_0(y), \quad f_0(y) = -f(y) + u_0(y). \quad (1.16)$$

Функции $\eta(t, s) = x(-t, s)$ являются решениями системы (1.16) и задают параметрическое описание тороидальной поверхности Γ .

Используя [7], запишем аппроксимацию оператора Ляпунова $\mathcal{L}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, f_0 \right)$ системы (1.16) вблизи тора в форме

$$\mathcal{L}\varphi = \frac{1}{2} (\Delta(y), \Theta(\gamma(y))\Delta(y)) + O(\|\Delta(y)\|^3), \quad (1.17)$$

где

$$Q(t, s) = \Theta(\eta(t, s)) = \frac{\partial V_0(t, s)}{\partial t} + F_0^\top(t, s)V_0(t, s) + V_0(t, s)F_0(t, s), \quad (1.18)$$

$$V_0(t, s) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\eta(t, s)), \quad F_0(t, s) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(\eta(t, s)) = -\frac{\partial f}{\partial x}(\eta(t, s)) - S_0(t, s)V_0(t, s),$$

$$S_0(t, s) = \mathcal{S}(\eta(t, s)).$$

Подставляя в (1.18) $\eta(t, s) = x(-t, s)$ и учитывая (1.10), получим

$$\begin{aligned} Q(t, s) &= -\frac{\partial V(-t, s)}{\partial t} - F^\top(-t, s)V(-t, s) - \\ &- V(-t, s)F(-t, s) - 2V(-t, s)S(-t, s)V(-t, s) = \\ &= -V(-t, s)S(-t, s)V(-t, s) = -V_0(t, s)S_0(t, s)V_0(t, s). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Полученное соотношение, в частности, означает [7], что для замкнутой системы (1.16) тор является Э-устойчивым.

Из аппроксимации

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(y), \mathcal{S}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y) \right) = (\Delta(y), \Omega(\gamma(y))\Delta(y)) + O(\|\Delta(y)\|^3),$$

где

$$M(t, s) = \Omega(\eta(t, s)) = V_0(t, s)S_0(t, s)V_0(t, s),$$

и соотношений (1.17)-(1.19) следует

$$G(y, u_0(y)) = O(\|\Delta(y)\|^3), \quad R(x, u_0) = O(\|\Delta(x)\|^3), \quad (1.20)$$

$$G(y, u_0(y)) \geq -|O(\|\Delta(y)\|^3)|, \quad R(x, u_0) \geq -|O(\|\Delta(x)\|^3)|.$$

В результате для $v(x)$ получаем оценку снизу

$$v(x) = \inf_{u \in U} J(x, u) \geq \varphi(x) - |O(\|\Delta(x)\|^3)|. \quad (1.21)$$

Из соотношений $v(x) \leq J(x, u_0) = \varphi(x) + R(x, u_0)$ и (1.20) следует оценка сверху

$$v(x) \leq \varphi(x) + |O(\|\Delta(x)\|^3)|. \quad (1.22)$$

Из (1.21) и (1.22) вытекает неравенство

$$|v(x) - \varphi(x)| \leq |O(\|\Delta(x)\|^3)|,$$

которое и доказывает теорему.

Полученная аппроксимация $\varphi(x)$ квазипотенциала $v(x)$ позволяет представить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения

$$\rho(x, \varepsilon) \approx \rho_*(x, \varepsilon) = K \exp \left(-\frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$. Эта матрица характеризует разброс случайных траекторий системы (2) в точке γ тороидальной поверхности. Пусть $\lambda_1(\gamma) \geq \lambda_2(\gamma) \geq \dots \geq \lambda_n(\gamma)$ – собственные числа, а $h_1(\gamma), h_2(\gamma), \dots, h_n(\gamma)$ – ортонормированный базис собственных векторов матрицы $\Phi(\gamma)$. Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ матрица $\Phi(\gamma)$ вырождена ($\text{rank} \Phi(\gamma) = n - 2$), то $\lambda_{n-1}(\gamma) = \lambda_n(\gamma) \equiv 0$. Соответствующие собственные векторы $h_{n-1}(\gamma)$ и $h_n(\gamma)$ лежат в касательной плоскости к тору. Остальные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ при невырождающихся на Γ шумах системы (2) строго положительны и задают при каждом γ разброс случайных траекторий в направлении векторов h_1, \dots, h_{n-2} (базиса нормальной гиперплоскости).

Матрица $\Phi(\gamma)$ характеризует реакцию системы (2) вблизи тора Γ на случайные входные воздействия. Если систему (2) рассматривать как некоторый преобразователь стохастического входа (стационарный винеровский процесс $w(t)$) в стохастический выход (стационарное распределение случайных траекторий вокруг Γ), то ее собственные значения задают коэффициенты усиления ($\lambda_i > 1$) и ослабления ($\lambda_i < 1$) этого преобразователя. Функция $\Phi(\gamma)$ – стохастическая функция чувствительности тора – позволяет описать неравномерность разброса случайных траекторий около тора по всем направлениям, указать участки тороидальной поверхности, наиболее и наименее чувствительные к помехам.

2. Стохастическая чувствительность 2-тора в трехмерном пространстве

Рассмотрим систему (2) при $n = 3$. Матрица проектирования $P(t, s)$ имеет в этом случае ранг, равный единице, и может быть представлена в виде $P(t, s) = p(t, s)p^\top(t, s)$, где $p(t, s)$ – вектор единичной длины, ортогональный векторам $y(t, s)$ и $z(t, s)$. При этом матрица W решения (1.11), задающая разброс случайных траекторий вблизи 2-тора, также имеющая ранг, равный единице, может быть записана в виде $W(t, s) = \mu(t, s)P(t, s)$. Матрица проектирования $P(t, s)$ однозначно находится по исходной детерминированной тороидальной поверхности Γ . Таким образом, задача построения стохастической функции чувствительности здесь сводится к отысканию скалярной функции $\mu(t, s)$. Эта функция задает дисперсию разброса случайных траекторий в направлении нормали к тору Γ в точке $x(t, s)$.

Лемма 3. Матрица $W(t, s) = \mu(t, s)P(t, s)$ является решением уравнения (1.11) тогда и только тогда, когда скалярная функция $\mu(t, s)$ является решением системы

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, s) = a(t, s)\mu(t, s) + b(t, s) \quad (2.1)$$

с условиями

$$\mu(t, s + 1) = \mu(t, s), \quad (2.2)$$

$$\mu(T(s) + t, s) = \mu(t, \tau(s)). \quad (2.3)$$

Здесь

$$a(t, s) = p^\top(t, s)[F^\top(t, s) + F(t, s)]p(t, s), \quad b(t, s) = p^\top(t, s)S(t, s)p(t, s).$$

Доказательство. Действительно, подставляя решение $W(t, s) = \mu(t, s)p(t, s) \times p^\top(t, s)$ в уравнение (1.11), получим

$$\dot{\mu}pp^\top + \mu(\dot{p}p^\top + p(\dot{p})^\top) = \mu(Fpp^\top + pp^\top F^\top) + pp^\top Sp^\top.$$

Умножая слева на p^\top и справа на p , учитывая тождества $p^\top p \equiv 1$, $(p^\top \dot{p}) = \dot{p}^\top p + p^\top \dot{p} \equiv 0$, получим уравнение для μ

$$\dot{\mu} = p^\top(F + F^\top)p\mu + p^\top Sp.$$

Доказательство обратного утверждения легко следует из приведенных выше выкладок. Лемма 3 доказана.

В итоге при $n = 3$ отыскание стохастической функции чувствительности сводится к решению скалярного уравнения (2.1) с условиями (2.2), (2.3).

Общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\mu(t, s) = g(t, s)[c(s) + h(t, s)], \quad (2.4)$$

где $g(t, s)$ и $h(t, s)$ – известные функции

$$g(t, s) = \exp\left(\int_0^t a(\tau, s)d\tau\right), \quad h(t, s) = \int_0^t \frac{b(\tau, s)}{g(\tau, s)}d\tau, \quad (2.5)$$

а $c(s)$ – неизвестная функция, играющая для $\mu(t, s)$ роль начальной: $\mu(0, s) = c(s)$. Условие (2.2) приводит к уравнению $c(s + 1) = c(s)$. Условие (2.3) ведет к соотношению

$$g(T(s), s)[c(s) + h(T(s), s)] = c(\tau(s)).$$

Обозначим

$$\alpha(s) = g(T(s), s), \quad \beta(s) = \alpha(s)h(T(s), s). \quad (2.6)$$

В итоге для функции $c(s)$ получаем функциональное уравнение

$$c(\tau(s)) = \alpha(s)c(s) + \beta(s) \quad (2.7)$$

с условием

$$c(s + 1) = c(s). \quad (2.8)$$

Таким образом, построение стохастической функции чувствительности $\mu(t, s)$ для 2-тора в трехмерном пространстве по формулам (2.4),(2.5) сводится к решению функционального уравнения (2.7) с условием (2.8). Существование и единственность решения (2.7)-(2.8) в случае Э-устойчивости тора Γ системы (1) непосредственно следует из леммы 1 и леммы 3.

Решение $\bar{c}(s)$ системы (2.7)-(2.8) может быть найдено методом установления. Рассмотрим последовательности $s_0 = s, s_1, \dots, s_k, \dots$, где $s_{k+1} = \tau(s_k)$, и $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k, \dots$, где $\bar{c}_k = \bar{c}(s_k)$. Значения \bar{c}_k , благодаря (2.7), связаны уравнением

$$\bar{c}_{k+1} = \alpha_k \bar{c}_k + \beta_k, \quad \alpha_k = \alpha(s_k), \quad \beta_k = \beta(s_k). \quad (2.9)$$

Для элементов \bar{c}_k рассмотрим приближения c_k , задаваемые рекуррентной формулой

$$c_{k+1} = \alpha_k c_k + \beta_k,$$

где c_0 – некоторое приближение для \bar{c}_0 .

Теорема 2. Пусть тор Γ является Э-устойчивым. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} (c_k - \bar{c}_k) = 0$ независимо от выбора начального приближения c_0 .

Доказательство. Погрешность $r_k = c_k - \bar{c}_k$ удовлетворяет уравнению $r_{k+1} = \alpha_k r_k$ и связана с погрешностью r_0 соотношением $r_k = q_k r_0$, где $q_k = \prod_{i=0}^{k-1} \alpha_i$.

Для величины q_k справедливо [7] представление

$$q_k = \exp \left(\int_0^{T_k(s)} a(t, s) dt \right),$$

где $T_k(s)$ – время, необходимое для прохождения траектории $x(t, s)$ по спирали, состоящей из k витков.

Необходимым и достаточным условием Э-устойчивости тора в системе (1) является [7] неравенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(t, s) dt < 0. \quad (2.10)$$

Условие (2.10) означает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0$ и, следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$ независимо от выбора c_0 .

3. Пример

Рассмотрим в трехмерном пространстве переменных (x, y, z) 2-тор Γ , задаваемый уравнением

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = r_0^2, \quad 0 < r_0 < 1.$$

В канонических переменных r, φ, ψ , связанных с исходными переменными x, y, z соотношениями $x = (2+r \cos \psi) \cos \varphi$, $y = (2+r \cos \psi) \sin \varphi$, $z = r \sin \psi$, тороидальная поверхность задается следующим образом:

$$r = r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Рассмотрим в новых переменных стохастическую систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r) + \varepsilon \sqrt{\sigma(\varphi, \psi)} \dot{w}, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\psi} &= \nu, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $f(r) = \frac{A}{4} r [(\frac{r}{r_0})^2 - 1]$ и $\sigma(\varphi, \psi) = 1 + B \cos(\varphi) + D \cos(\psi)$, $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Поскольку $f(r_0) = 0$, то для системы (3.1) при $\varepsilon = 0$ тор Γ является инвариантным многообразием и может быть параметрически задан семейством ее решений $r(t) \equiv r_0$, $\varphi(t, s) = \omega t + 2\pi s$, $\psi(t) = \nu t$. Здесь роль одного из параметров играет время t , а параметр s задает начальное состояние $\varphi(0, s) = 2\pi s$. При этом $T(s) = \frac{2\pi}{\nu}$, $\tau(s) = \frac{\omega}{\nu} + s$.

Необходимым и достаточным условием Э-устойчивости детерминированного тора Γ будет неравенство $A < 0$.

Найдем функции $g(t, s)$, $h(t, s)$ и $c(s)$, задающие стохастическую функцию чувствительности (2.4) тора Γ для системы (3.1). В нашем примере коэффициенты уравнения (2.1) имеют вид $a(t, s) \equiv A$, $b(t, s) = \sigma(\omega t + 2\pi s, \nu t) = 1 + B \cos(\omega t + 2\pi s) + D \cos(\nu t)$. Из (2.5) следует

$$\begin{aligned} g(t, s) &= e^{At}, \\ h(t, s) &= \frac{1}{A}(1 - e^{-At}) + \\ &+ \frac{B}{A^2 + \omega^2} [e^{-At}(-A \cos(\omega t + 2\pi s) + \omega \sin(\omega t + 2\pi s)) + A \cos 2\pi s - \omega \sin 2\pi s] + \\ &+ \frac{D}{A^2 + \nu^2} [e^{-At}(-A \cos(\nu t) + \nu \sin(\nu t)) + A]. \end{aligned}$$

Коэффициенты (2.6) имеют вид

$$\alpha(s) \equiv \alpha = e^{\frac{2\pi A}{\nu}},$$

$$\beta(s) = \alpha \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} e^{-A\tau} (1 + B \cos(\omega\tau + 2\pi s) + D \cos(\nu\tau)) d\tau = K_0 + K_1 \cos(2\pi s) + K_2 \sin(2\pi s),$$

где

$$K_0 = (\alpha - 1) \left(\frac{1}{A} + \frac{AD}{A^2 + \nu^2} \right), \quad K_1 = \frac{B}{A^2 + \omega^2} (-A \cos \eta + \omega \sin \eta + A\alpha)$$

$$K_2 = \frac{B}{A^2 + \omega^2} (A \sin \eta + \omega \cos \eta - \omega\alpha), \quad \eta = \frac{2\pi\omega}{\nu}.$$

В рассматриваемом примере функциональное уравнение (2.6)-(2.7) имеет аналитическое решение

$$c(s) = c_0 + c_1 \cos(2\pi s) + c_2 \sin(2\pi s),$$

где

$$c_0 = \frac{K_0}{1 - \alpha}, \quad c_1 = \frac{K_1(\cos \eta - \alpha) - K_2 \sin \eta}{1 - 2\alpha \cos \eta + \alpha^2}, \quad c_2 = \frac{K_2(\cos \eta - \alpha) + K_1 \sin \eta}{1 - 2\alpha \cos \eta + \alpha^2}.$$

В итоге получаем стохастическую функцию чувствительности

$$\begin{aligned} \mu(t, s) = e^{At} & \left(c_1 \cos(2\pi s) + c_2 \sin(2\pi s) + \frac{B}{A^2 + \omega^2} (A \cos(2\pi s) - \omega \sin(2\pi s)) \right) + \\ & + \frac{B}{A^2 + \omega^2} (-A \cos(\omega t + 2\pi s) + \omega \sin(\omega t + 2\pi s)) + \frac{D}{A^2 + \nu^2} (-A \cos(\nu t) + \nu \sin(\nu t)) - \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

Данная формула задает связь значений стохастической функции чувствительности с параметрами системы. Рассмотрим зависимость функции чувствительности μ от параметров A , B , D , ω и ν . При уменьшении параметра A функция μ убывает. Параметр A характеризует степень устойчивости детерминированного тора. Как видим, увеличение степени устойчивости детерминированного тора ведет к уменьшению стохастической чувствительности. Параметры B и D характеризуют перепад интенсивности случайных возмущений при движении вблизи тора. Увеличение B и D приводит к соответствующему увеличению перепада значений стохастической чувствительности μ .

Зависимость μ от частот вращений ω и ν удобно изобразить графически.

На рис. 2 представлены графики стохастической функции чувствительности при $A = -1$, $B = 0.5$, $D = 0.4$ для различных значений параметров ω и ν . Слева в плоскости переменных (s, μ) приведены графики $\mu(t_k, s)$ для некоторого набора t_k . Справа – графики функции $\mu(t, s)$ в трехмерном пространстве. Как видно из рис. 2, значения μ при движении вдоль тороидальной поверхности существенно изменяются: а) при $\omega = 1$, $\nu = 1$ значения μ лежат в интервале $(0.4, 1.6)$; б) при $\omega = 1$, $\nu = 3$ значения μ лежат в интервале $(0.5, 1.5)$; в) при $\omega = 3$, $\nu = 1$ значения μ лежат в интервале $(0.6, 1.4)$; г) при $\omega = 3$, $\nu = 3$ значения μ лежат в интервале $(0.7, 1.3)$.

Соответствующим образом будет меняться и разброс случайных траекторий около тороидальной поверхности.

Увеличение частот вращения ω и ν , приводящее к увеличению скорости движения вдоль тороидальной поверхности, ведет к уменьшению перепада значений стохастической функции чувствительности μ . Увеличение ω и ν улучшает стохастическое перемешивание случайных траекторий, делая их разброс около тора более однородным.

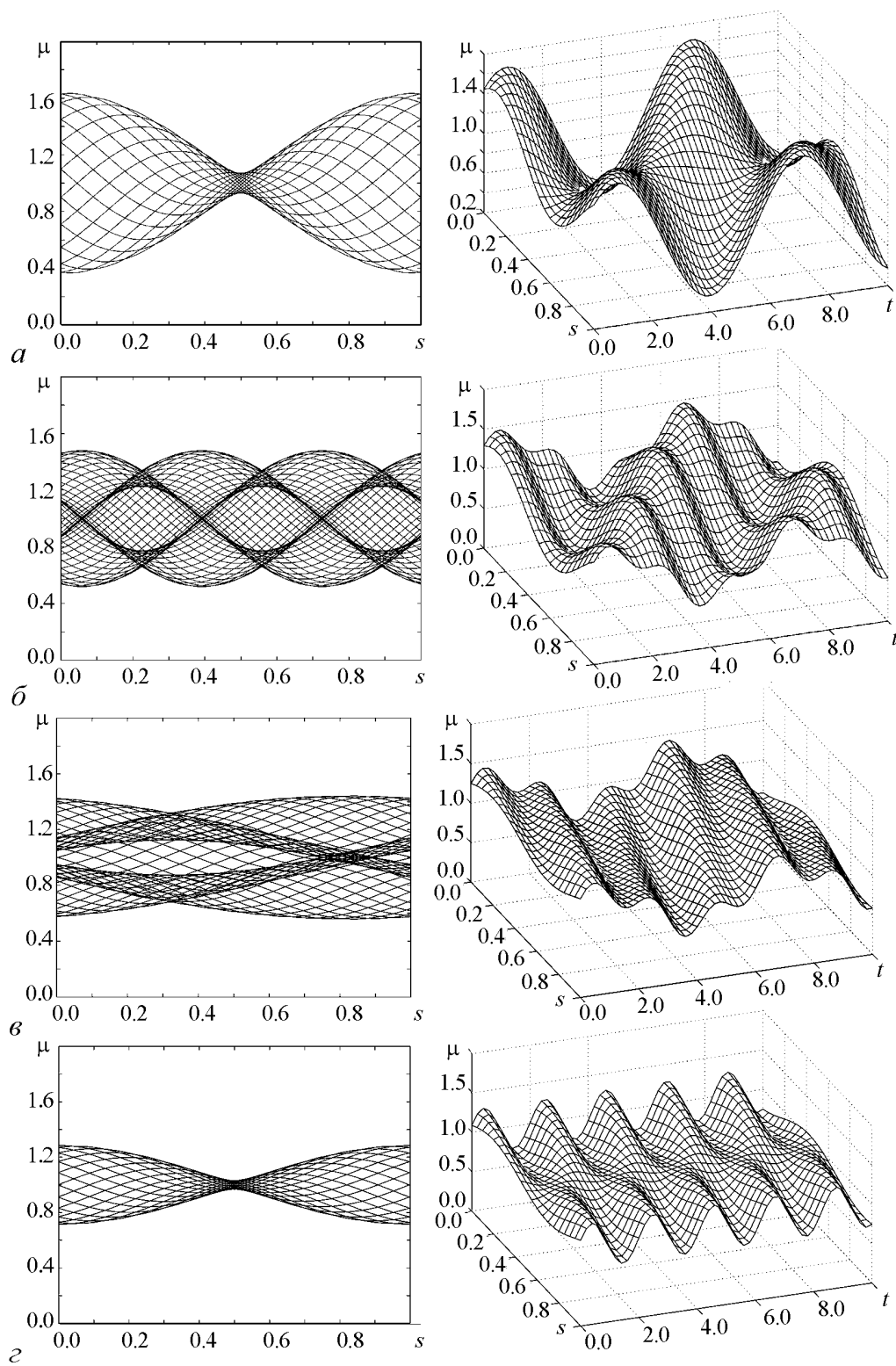


Рис. 2. Стохастическая функция чувствительности: $a - \omega = 1, \nu = 1$; $\text{б} - \omega = 1, \nu = 3$; $\text{в} - \omega = 3, \nu = 1$; $\text{з} - \omega = 3, \nu = 3$

На рис. 3 для $A = -1$, $B = 0.5$, $D = 0.4$, $\omega = 1$, $\nu = 1$ представлен график (сплошная линия) теоретической функции чувствительности $\mu(t, s)$ при фиксированном значении $s = 0$. Соответствующие значения эмпирической функции чувствительности $\mu_i^* = \frac{D_i}{\varepsilon^2}$, где D – эмпирическая дисперсия, получены прямым численным моделированием случайных траекторий (изображены звездочками).

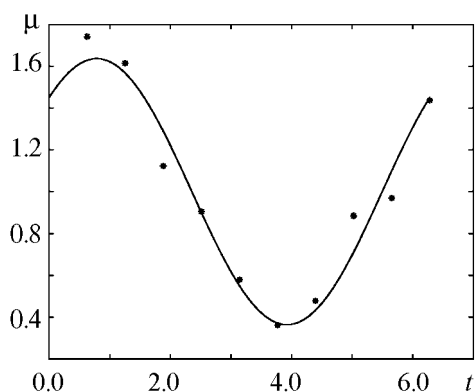


Рис. 3. Теоретическая (сплошная линия) и эмпирическая (звездочки) стохастическая чувствительность

Как видим, хорошее соответствие позволяет использовать представленную в работе конструкцию теоретической функции чувствительности в описании особенностей распределения случайных траекторий около тороидальной поверхности.

Как видим, хорошее соответствие позволяет использовать представленную в работе конструкцию теоретической функции чувствительности в описании особенностей распределения случайных траекторий около тороидальной поверхности.

Заключение

В работе на основе аппроксимации квазипотенциала введена конструкция функции стохастической чувствительности для динамической системы, аттрактором которой является двумерное тороидальное многообразие. Построение этой функции сводится к некоторой краевой задаче для линейного матричного дифференциального уравнения. В случае трехмерного пространства для этой задачи получено аналитическое решение. Приведенный пример показывает, что функция стохастической чувствительности является удобным инструментом в исследовании разброса стохастически возмущенных траекторий вблизи тороидальных многообразий.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 06-01-00625 и № 04-01-9698 Урал.

Библиографический список

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. Неймарк Ю.И. Интегральные многообразия дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, №3. С. 321.
3. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. К вопросу об устойчивости квазипериодических движений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, №5. С. 824.
4. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. 304 с.
5. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф. Существование и устойчивость релаксационного тора. // Успехи математических наук. 1989. Т. 44, вып. 3(365). С. 161.

6. Колесов А.Ю. О существовании и устойчивости двумерного релаксационного тора // Математические заметки. 1994. Т. 56, вып. 6. С. 40.
7. Ряшко Л.Б. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости и стабилизации двумерного инвариантного тора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 4-5. С. 140.
8. Ryashko L.B. Exponential mean square stability of stochastically forced 2-torus // Nonlinearity. 2004. Vol. 17. P. 729.
9. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С.165.
10. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
11. Рытов С.М. Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
12. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
13. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
14. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
15. Soong T.T., Grigoriu M. Random vibration of mechanical and structural systems. RTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1993.
16. Венцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
17. Day M.V. Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems // Applied Mathematics and Optimization. 1994. Vol. 30. P. 79.
18. Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z. A direct approach to the exit problem // SIAM Journal Appl.Math. 1990. Vol. 50, №2. P. 595.
19. Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 1. С. 53.
20. Башкирцева И.А., Исакова М.Г., Ряшко Л.Б. Асимптотическое разложение квазипотенциала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, №10. С. 1319.
21. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, №5. С. 19.
22. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // Dynamic Systems and Applications. 2002. Vol. 11, №2. P. 293.
23. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985. 255 с.

Уральский государственный
университет, Екатеринбург

Поступила в редакцию 25.04.2005
После доработки 29.11.2005

QUASI-POTENTIAL METHOD FOR 2-TORUS STOCHASTIC SENSITIVITY ANALYSIS

L.B.Ryashko

On the basis of quasi-potential method the stationary distribution of random trajectories in a vicinity of toroidal manifolds of stochastically forced nonlinear systems is investigated. For the quasi-potential approximation the quadratic form defined by some matrix function is used. This function named stochastic sensitivity function characterizes the response of considered system on random disturbances. Construction of this function is reduced to the decision of a boundary problem for linear differential matrix equation. For 2-torus in three-dimensional space a constructive decision of this problem is given. Construction of stochastic sensitivity function is reduced to the decision of some functional equation. Efficiency of the presented results is shown on the example.



Ряшко Лев Борисович – окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996, 1998). Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами, автор ряда статей по данной тематике.
E-mail: lev.ryashko@usu.ru