

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА – ФРОБЕНИУСА
КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, А.С. Ремизов

Исследуются спектральные свойства линейного несамосопряженного оператора Перрона – Фробениуса для кусочно-линейного пилообразного отображения, ветви которого имеют одинаковый по модулю тангенс угла наклона и переводят отрезок своего определения на единичный интервал. Показано, что для произвольного числа ветвей отображения полиномиальные собственные функции оператора представляются (в зависимости от четности или нечетности числа ветвей) многочленами Бернулли, Эйлера или их линейной комбинацией. Соответствующие собственные числа выражаются через отрицательные степени числа ветвей отображения. Для отображения с нечетным числом ветвей и нулевым значением итеративной функции в нуле собственные числа являются кратными. Переход к инверсному отображению устраняет кратность собственных чисел оператора. Результаты получены методом, основанным на построении специальной аналитической производящей функции для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса. Знание решения спектральной задачи для кусочно-линейного отображения автоматически позволяет записать точное решение спектральной задачи для любых топологически сопряженных отображений, а также найти аналитическое представление для автокорреляционной функции траекторий и корреляционных функций связанных с ними наблюдаемых.

Введение

Как известно, одномерные отображения являются простейшими моделями динамического хаоса [1–7]. Со временем они не утратили своего и научного, и методологического значения для нелинейной науки. Собственно, первые серьезные шаги на пути ее изучения и начинаются со сценария М. Фейгенбаума перехода к хаосу, обнаруженного впервые именно для одномерных отображений. Второй важный пример связан с развивавшейся коллективом авторов во главе с И.Р. Пригожиным

фундаментальной концепцией определяющей роли хаоса в возникновении «стрелы времени» (необратимости физических процессов при наличии обратимого характера уравнений движения) с привлечением в качестве базового объекта теории простейшего диадического отображения (сдвига Бернулли) [6]. Интересен, далее, тот факт, что парадигма детерминированного хаоса заняла свою нишу в общей теории относительности, когда была открыта хаотическая осцилляция компонент метрического тензора согласно одномерному отображению Гаусса в однородной анизотропной космологической модели типа IX по Бианки вблизи особенности Mixmaster Universe – «перемешанный мир» [8, 9].

Привлекательные черты «малоразмерной нелинейной динамики» не исчерпываются конкретными применениями соответствующих моделей для описания нерегулярных процессов. Специфика отображений малой размерности заключается и в том, что в ряде случаев возможно *точное (аналитическое)* вычисление основных траекторных, вероятностных и спектральных характеристик отображений, включая нахождение точного решения задачи о скорости установления равновесного состояния в динамической системе, скорости расщепления корреляций траекторий отображения и корреляций возможных наблюдаемых, соотнесенных с этой траекторией. Аналитические решения для хаотических динамических систем, характеризующихся чувствительностью к начальным условиям и параметрам, отличаются высшей степенью достоверности, поскольку могут быть подвергнуты соответствующим проверкам вплоть до подстановки решений в исходные уравнения и организации эквивалентных аналитических вычислений¹. Исследование более сложных систем численными методами в связи с конечностью множества машинных чисел и ограниченной разрядностью представления чисел в компьютере² может сталкиваться с большими проблемами, вплоть до появления результатов, на самом деле являющихся машинными «фантомами» [11]. В этой ситуации представляет несомненный интерес глубокое математическое исследование «классики» нелинейных явлений как собственно математического объекта, так и в роли возможного инструмента для анализа новых нелинейных явлений.

Ключевым моментом при аналитическом исследовании автокорреляционных и асимптотических свойств одномерных хаотических отображений является нахождение решения спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса исследуемого отображения, то есть определение собственных функций и собственных чисел этого оператора [12]. Для сдвигов Бернулли, $x_{n+1} = Gx_n \pmod 1$, где G – произвольное положительное число, и инверсных сдвигов Бернулли, $x_{n+1} = 1 - Gx_n \pmod 1$, решение спектральной задачи для соответствующего оператора Перрона – Фробениуса получено [13, 14], причем в [12, 14, 15] предложена регулярная процедура для решения этой задачи, основанная на построении производящих функций для полиномиальных собственных функций оператора. В данной статье рассматриваются некоторые общие свойства подобных функций и *впервые полностью* решается задача аналитического нахождения собственных функций и собственных чисел для

¹Например, знание точного траекторного решения позволяет вычислить инвариантную плотность [2], которая, в свою очередь, является неподвижной точкой оператора Перрона – Фробениуса и т.п.

²Машинные числа – это конечный набор рациональных чисел, для которого не гарантировано выполнение правил арифметики, и результат существенно зависит от диапазона задания операндов (см., к примеру, [10]).

оператора Перрона – Фробениуса пилообразного и инверсного пилообразного отображений с произвольным коэффициентом (числом ветвей). До настоящего времени были известны лишь частные случаи решения подобной задачи – для пирамидального отображения (tent map) [16] и отображений с 3–6 кусочно-линейными составляющими итеративной функции [12, 17, 18]. В данной работе удалось унифицировать процедуру решения спектральной задачи и представить решение в виде, справедливом для отображения с любым числом кусочно-линейных участков итеративной функции «пилообразного» отображения.

1. Производящие функции для полиномиальных собственных функций и полиномиального ядра оператора Перрона – Фробениуса и их свойства

Рассмотрим одномерное отображение, определенное на единичном интервале,

$$x_{n+1} = f(x_n; \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_n \in (0, 1), \quad (1)$$

где $f(x)$ – нелинейная или кусочно-линейная итеративная функция; μ – параметр отображения, при котором (1) обладает хаотическими свойствами [1–7], в частности, характеризуемыми наличием инвариантной плотности $\psi_0(x; \mu)$. В дальнейшем явную запись параметра μ при записи траекторных, вероятностных и спектральных характеристик отображения будем опускать. Одна из форм записи соответствующего данному отображению линейного оператора Перрона – Фробениуса, характеризующего закон трансформации вероятностных распределений $\rho_n(x)$ случайных величин

$$X_n = f^n(X_0) = \underbrace{f(f(\dots f(X_0)))}_{n \text{ раз}}$$

под действием итераций, имеет вид [1–6, 19–22]:

$$\rho_{n+1}(x) = P\rho_n(x) = \int_0^1 \delta(x - f(\xi))\rho_n(\xi)d\xi. \quad (2)$$

Для конкретного отображения интеграл в правой части (2), благодаря фильтрующим свойствам δ -функции, легко вычисляется на каждом из подынтервалов монотонного изменения итеративной функции, что дает представление для оператора в форме функционального соотношения.

Инвариантная плотность $\psi_0(x)$ является неподвижной точкой оператора Перрона – Фробениуса ($P\psi_0(x) = \psi_0(x)$), а все остальные его собственные функции по определению удовлетворяют уравнению

$$P\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x) \equiv \int_0^1 \delta(x - f(\xi))\psi_n(\xi)d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где λ_n – собственное число, отвечающее собственной функции $\psi_n(x)$. Собственные функции оператора Перрона – Фробениуса подчиняются также дополнительному соотношению

$$\int_0^1 \psi_n(x)dx = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

($\delta_{m,n}$ – символ Кронекера). В самом деле, поскольку для любого значения $\xi \in (0, 1)$ итеративная функция хаотического отображения (1) не выводит точку за пределы единичного интервала ($f(\xi) \in (0, 1)$), то $\int_0^1 \delta(x - f(\xi)) dx = 1$, и при интегрировании (3) на единичном интервале получим

$$\begin{aligned} \lambda_n \int_0^1 \psi_n(x) dx &= \int_0^1 \int_0^1 \delta(x - f(\xi)) \psi_n(\xi) d\xi dx = \\ &= \int_0^1 \psi_n(\xi) d\xi \int_0^1 \delta(x - f(\xi)) dx = \int_0^1 \psi_n(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда (при $\lambda_n \neq 0$) и следует (4). Соотношение (4) в частных случаях удовлетворяется для полиномов Бернулли $B_n(x)$, являющихся собственными функциями для сдвигов Бернулли [6], и собственных функций отображения Гаусса $x_{n+1} = 1/x_n \pmod{1}$, $x_n \in (0, 1)$ [22].

Введем теперь в рассмотрение производящую функцию для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса, то есть некоторую аналитическую функцию, разложение которой в ряд Тейлора в качестве коэффициентов эти собственные функции и имеет. Итак, будем называть производящей функцией для системы собственных функций $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, оператора Перрона – Фробениуса такую функцию $\Psi(x, t)$, разложение которой в ряд по степеням t при достаточно малых t (обеспечивающих сходимость ряда) имеет вид:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (5)$$

Если в соотношении (5) положить $x = 0$, то получаемая функция от t

$$\Psi(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(0) \frac{t^n}{n!} \quad (6)$$

будет играть роль производящей функции для последовательности чисел $\psi_k(0)$ ³.

Из соотношения (4) следует, что производящая функция (5) удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_0^1 \Psi(x, t) dx = 1. \quad (7)$$

Выделив из производящей функции стандартным образом четную и нечетную части (по параметру t),

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{2} (\Psi(x, t) + \Psi(x, -t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k}(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad (8)$$

³Употребление слова «функция» по отношению к (5) или (6) отнюдь не означает, что речь идет о вычислении (5) или (6) в какой-либо точке t_0 ! Переменная t здесь является формальной, и сумма ряда $\Psi(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(0) \frac{t^n}{n!}$ смысла не имеет.

$$\Psi_o(x, t) = \frac{1}{2} (\Psi(x, t) - \Psi(x, -t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (9)$$

и учитывая, что в четную часть входит нулевая (по порядку) собственная функция (инвариантная плотность), для функций (8) и (9) получим следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^1 \Psi_e(x, t) dx = 1, \quad (10)$$

$$\int_0^1 \Psi_o(x, t) dx = 0. \quad (11)$$

В последующих разделах статьи будут найдены собственные функции и собственные числа оператора Перрона – Фробениуса для некоторых достаточно общих разновидностей хаотических кусочно-линейных отображений с равномерным инвариантным распределением – пилообразного и инверсного к нему отображений. Линейные ветви этих отображений имеют одинаковые по модулю тангенсы угла наклона и переводят отрезок своего определения полностью на единичный интервал.

Приобретенный авторами опыт позволяет сформулировать следующий универсальный сценарий решения спектральных задач для эволюционных операторов подобных кусочно-линейных отображений.

1. Выбор в качестве собственных функций оператора Перрона – Фробениуса целых рациональных функций – алгебраических многочленов (значения их коэффициентов в последующем подлежат определению)

$$\psi_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n = 1. \quad (12)$$

Подобный выбор собственных функций обусловлен тем, что оператор Перрона – Фробениуса преобразует аргумент функции, на которую он действует, по линейному закону, что не приводит к изменению степени полинома (структуры функции) и позволяет надеяться на «восстановление» полинома с численным корректирующим множителем после действия оператора.

2. Определение структуры собственных чисел оператора в результате подстановки многочленов как собственных функций в уравнение (3). Достигается это приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях независимой переменной x в левой и правой частях (3).

3. Выдвижение предположения о структуре производящей функции для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса. Формулировка (на основе конкретного вида оператора (3)) функциональных уравнений для компонент (8), (9) производящей функции и их решение с учетом найденных на предыдущем этапе значений собственных чисел и условий (10), (11).

Почему мы говорим о построении особой производящей функции? Естественно, коэффициенты полиномов, определяющих собственные функции оператора Перрона – Фробениуса, могут последовательно находиться из решения линейной системы уравнений, получаемых приравниванием в (3) коэффициентов при идентичных

степенных функциях. Но, во-первых, каждая собственная функция требует составления именно «своей» системы уравнений, а во-вторых, общее число таких систем является, в принципе, бесконечным. При введении производящей функции данные технические «силовые» приемы решения спектральной задачи обходятся, хотя уровень сложности в интеллектуальном плане даже, пожалуй, и повышается, поскольку успех в решении задачи связан с решением функциональных уравнений относительно четной и нечетной составляющих производящей функции.

Следует подчеркнуть, что условия (7), (10) и (11) являются общими, то есть они должны выполняться для *любого* отображения. Разумно попытаться (на основе априорного предположения о полиномиальном характере собственных функций) выбрать вполне определенный способ представления либо для производящей функции в целом, либо для ее четной и нечетной частей:

$$\Psi(x, t) = e^{xt}G(t); \quad (13)$$

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{2} (e^{xt}G_1(t) + e^{-xt}G_1(-t)); \quad (14)$$

$$\Psi_o(x, t) = \frac{1}{2} (e^{xt}G_2(t) - e^{-xt}G_2(-t)) \quad (15)$$

(функции $G(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ предполагаются дифференцируемыми). Подстановка (14)-(15) соответственно в (10) и (11) приводит к общим уравнениям, которым должны удовлетворять функции $G(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$:

$$G(t) = \frac{t}{e^t - 1}; \quad (16)$$

$$\frac{e^t - 1}{2t} (G_1(t) + e^{-t}G_1(-t)) = 1; \quad (17)$$

$$G_2(t) - e^{-t}G_2(-t) = 0 \quad (18)$$

(при исключении значения $t = 0$). Интересно, что решение (16) дает представление $\Psi(x, t)$ в форме производящей функции для полиномов Бернулли, что соответствует хаотическим отображениям в виде сдвигов Бернулли. Уравнения (17) и (18) должны использоваться при решении спектральных задач для кусочно-линейных отображений, отличных от сдвигов Бернулли, в сочетании с уравнением (3).

Представления (14) и (15) в виде произведения экспоненты $\exp(\pm xt)$ на функцию $G_1(t)$ или $G_2(t)$, зависящую только от параметра t , позволяет формулировать уравнения относительно $G_1(t)$ и $G_2(t)$, исходя из (3), в виде

$$F_1(G_1(t))F(e^{xt}, e^{-xt}) = 0, \quad F_2(G_2(t))F(e^{xt}, e^{-xt}) = 0 \quad (19)$$

(F, F_1, F_2 – некоторые функции), то есть сводить, по существу, задачу к решению уравнений

$$F_1(G_1(t)) = 0 \quad \text{и} \quad F_2(G_2(t)) = 0. \quad (20)$$

Попутно легко вычисляются возникающие суммы с помощью элементарной формулы суммирования для геометрической прогрессии.

Можно отметить, что решение уравнения (17) в виде $G_1(t) = mt/(e^{mt} - 1)$ существует для двух значений – $m = 1$ и $m = 2$:

$$G_1(t) = \frac{t}{e^t - 1}; \quad (21)$$

$$G_1(t) = \frac{2t}{e^{2t} - 1} = \frac{t}{e^t - 1} - \frac{t}{e^t + 1}. \quad (22)$$

Уравнению (17) отвечает и решение

$$G_1(t) = \frac{2t}{e^{2t} - 1} e^t = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{e^t + 1}. \quad (23)$$

Решение же уравнения (18) в форме $G_2(t) = mt/(e^{mt} - 1)$ или $G_2(t) = (m+1)/(e^{mt} + 1)$ существует только при $m = 1$:

$$G_2(t) = \frac{t}{e^t - 1}, \quad (24)$$

$$G_2(t) = \frac{2}{e^t + 1}. \quad (25)$$

2. Решение спектральной задачи для пилообразного отображения

В этом разделе мы ставим целью нахождение полиномиальных собственных функций оператора Перрона – Фробениуса (2) для кусочно-линейного пилообразного отображения, характеризуемого следующими друг за другом участками линейного возрастания и убывания итеративной функции, и для произвольного числа N ветвей монотонного изменения функции, представляемого в виде

$$x_{n+1} = f(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left((-1)^k N x_n + (-1)^{k+1} \left(k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) \right) \Theta_k(x), \quad (26)$$

где $\Theta_k(x)$ – индикаторная функция сегмента $[k/N, (k+1)/N)$, то есть

$$\Theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [k/N, (k+1)/N), \\ 0, & x \notin [k/N, (k+1)/N). \end{cases}$$

На рис. 1 показан частный вид (26) для $N = 5$. Отображению (26) отвечает оператор Перрона – Фробениуса

$$P_{(N)}\varphi(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi \left(\frac{1}{N} \left((-1)^k x + k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) \right). \quad (27)$$

Неподвижной точкой этого оператора, как нетрудно убедиться, является плотность равномерного распределения $\psi_0(x) = \Theta_{0,1}(x)$, где $\Theta_{0,1}(x)$ – индикаторная (характеристическая) функция единичного отрезка.

Случаи четного и нечетного числа ветвей в отображении (27) удобнее рассматривать по отдельности.

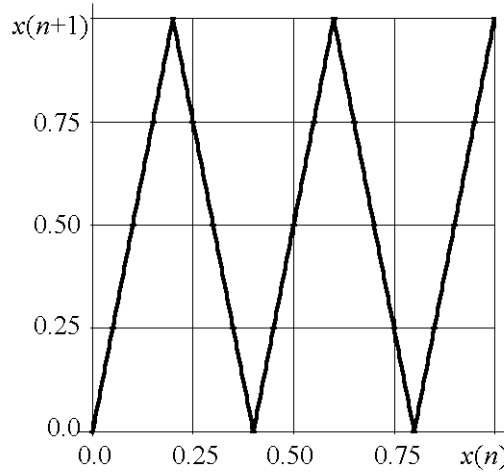


Рис. 1. Пилообразное отображение с пятью кусочно-линейными ветвями

2.1. Пилообразное отображение с четным числом ветвей. Оператор Перрона – Фробениуса (27) в этом случае переписывается как

$$P_{(N)}\varphi(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \varphi\left(\frac{x+2k}{N}\right) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \varphi\left(\frac{2(k+1)-x}{N}\right). \quad (28)$$

Тогда из (3) получим следующее уравнение, связывающее собственные функции $\psi_k(x)$ и собственные числа λ_k оператора:

$$\lambda_n \psi_n(x) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} \varphi_n\left(\frac{x+2k}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2-1} \varphi_n\left(\frac{2k+2-x}{N}\right) \right]. \quad (29)$$

Согласно описанной в разделе 1 схеме будем искать собственные функции оператора (29) в виде многочлена (12). Подставляя (12) в (29) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим прежде всего соотношение для собственных чисел оператора

$$\lambda_n = \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N/2-1} \frac{1}{N^n} + \sum_{l=0}^{N/2-1} \frac{(-1)^n}{N^n} \right]. \quad (30)$$

Таким образом, собственные числа с четными индексами (отвечающие четным по порядку собственным функциям) $n = 2l$, $l = 0, 1, 2, \dots$, выражаются как

$$\lambda_{2l} = \frac{1}{N^{2l}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (31)$$

а в случае нечетных номеров, $n = 2l + 1$, $l = 0, 1, 2, \dots$, собственные числа равны нулю

$$\lambda_{2l+1} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

Собственные функции с четными индексами удовлетворяют уравнению (29) с четными n ; найдем уравнение для их производящей функции $\Psi_e(x, t)$. Для этого (см.

(8)) умножим (29) для $n = 2l$ на $t^{2l}/(2l)!$ и просуммируем по l от 0 до ∞ . С учетом (31) получим следующее уравнение:

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N/2-1} \Psi_e\left(\frac{x+2l}{N}, Nt\right) + \sum_{l=0}^{N/2-1} \Psi_e\left(\frac{2l+2-x}{N}, Nt\right) \right]. \quad (33)$$

Производящую функцию $\Psi_e(x, t)$ будем искать в форме (14). Вспомогательная функция $G_1(t)$ должна одновременно удовлетворять уравнению (17) и уравнению, получаемому подстановкой (14) в (33),

$$G_1(t) = \frac{1}{N} \left(G_1(Nt) \frac{e^{Nt} - 1}{e^{2t} - 1} + G_1(-Nt) e^{-2t} \frac{e^{-Nt} - 1}{e^{-2t} - 1} \right). \quad (34)$$

Таким согласованным решением, как можно проверить непосредственной подстановкой, является (22).

Перед тем как записать окончательное выражение для производящей функции $\Psi_e(x, t)$, вспомним, что производящие функции для полных систем неортогональных на единичном сегменте полиномов Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$ определяются следующим образом [25]:

$$B(x, t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi \quad (35)$$

и

$$E(x, t) = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < \pi. \quad (36)$$

Соответственно, можно записать и производящие функции для полиномов Бернулли и Эйлера с четными и нечетными индексами

$$B_e(x, t) = \frac{1}{2} (B(x, t) + B(x, -t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}(x)}{(2n)!} t^{2n}, \quad (37)$$

$$B_o(x, t) = \frac{1}{2} (B(x, t) - B(x, -t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+1}(x)}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \quad (38)$$

$$E_e(x, t) = \frac{1}{2} (E(x, t) + E(x, -t)) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(x) \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad (39)$$

$$E_o(x, t) = \frac{1}{2} (E(x, t) - E(x, -t)) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}(x) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (40)$$

С использованием (35)–(40), можно записать выражение для производящей функции собственных функций оператора Перрона – Фробениуса пилообразного отображения с четным числом ветвей в форме линейной комбинации производящих функций для полиномов Бернулли с четными индексами и полиномов Эйлера с нечетными индексами:

$$\Psi_e(x, t) = B_e\left(\frac{x}{2}, 2t\right) = B_e(x, t) - \frac{t}{2} E_o(x, t) = B_e(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial E_e(x, t)}{\partial x}. \quad (41)$$

Следовательно, по определению (5) производящей функции собственные функции оператора Перрона – Фробениуса (28) могут рассматриваться как следующая комбинация полиномов Бернулли и Эйлера:

$$\psi_{2l}(x) = B_{2l}(x) - lE_{2l-1}(x) = B_{2l}(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} E_{2l}(x), \quad l = 1, 2, \dots \quad (42)$$

Производные от полиномов Эйлера [25] и их производящей функции введены в (41) и (42) для симметрии записи по нижним индексам.

С учетом уже известного результата (31) для собственных чисел оператора решение задачи на собственные функции оператора Перрона – Фробениуса (28) для пилообразного отображения с четным числом ветвей можно считать законченным. Интересно также выявить роль полиномов Бернулли и Эйлера в контексте исследования оператора (28). Покажем, что эти полиномиальные функции образуют ядро (нуль-пространство) линейного оператора (28). Подействовав оператором (28) на производящую функцию вида (15), получим

$$P_{(N)}\Psi_0(x, t) = (G_2(t) - e^{-t}G_2(-t)) \frac{1 - e^t e^{xt/N} + e^{(2-x)t/N}}{2N(1 - e^{2t/N})}. \quad (43)$$

Когда функция $G_2(t)$ определена формулами (24) или (25), выполняется (18) и соотношение (43) обращается в ноль. А это и означает, что производящими функциями полиномиального ядра оператора Перрона – Фробениуса (28) являются производящие функции (38) и (40) для полиномов Бернулли и Эйлера с нечетными индексами

$$P_{(N)}B_o(x, t) = 0; \quad P_{(N)}E_o(x, t) = 0. \quad (44)$$

Решение спектральной задачи в форме значений собственных чисел (31), (32) линейного оператора Перрона – Фробениуса и его полиномиальных собственных функций (42) и нуль-пространства $B_{2k+1}(x)$, $E_{2k+1}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) справедливо для произвольного четного количества ветвей отображения N . Так, для пирамидального отображения (tent map), формируемого двумя кусочно-линейными ветвями ($N = 2$), собственные функции определяются выражениями (42), а соответствующие собственные числа равны $\lambda_{2k} = 1/2^{2k}$.

2.2. Пилообразное отображение с нечетным числом ветвей. Рассмотрим теперь отображение (26) с кусочно-линейной итерируемой функцией, имеющей нечетное число отрезков монотонности. Оператор Перрона – Фробениуса в этом случае удобно представить в виде таких двух сумм:

$$P_{(N)}\varphi(x) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2} \varphi\left(\frac{x+2k}{N}\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \varphi\left(\frac{2k+2-x}{N}\right) \right]. \quad (45)$$

Уравнение (3), определяющее собственные функции, запишется в виде

$$\lambda_n \psi_n(x) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2} \psi_n\left(\frac{x+2k}{N}\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \psi_n\left(\frac{2k+2-x}{N}\right) \right]. \quad (46)$$

В случае полиномиальных собственных функций, как и в предыдущем случае, соотношение (46) позволяет получить следующее выражение для собственных чисел оператора:

$$\lambda_n = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2} \frac{1}{N^k} + \sum_{i=0}^{(N-1)/2-1} \frac{1}{(-N)^i} \right]. \quad (47)$$

При четном индексе $n = 2k$ выражение (47) сводится к результату (31), $\lambda_n = 1/N^n$, а вот нечетному индексу n отвечает значение собственного числа

$$\lambda_n = \frac{1}{N^{n+1}}, n = 2l + 1 (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (48)$$

Сравнивая (31) и (48), можно заметить, что в случае нечетного числа ветвей отображения (26) собственные числа оператора имеют кратность 2: любому собственному числу будут соответствовать две собственные функции – полином с четной нумерацией и полином с нечетной нумерацией.

Получим полиномиальное представление для собственных функций, найдя их производящие функции для четных и нечетных индексов. На основе (47) получим следующее уравнение для производящей функции собственных функций с четными индексами:

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \Psi_e\left(\frac{x+2k}{N}, Nt\right) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \Psi_e\left(\frac{2k+2-x}{N}, Nt\right). \quad (49)$$

Для производящей функции, порождающей собственные функции с нечетными индексами, получаем несколько иное функциональное уравнение:

$$\Psi_o(x, t) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \Psi_o\left(\frac{x+2k}{N}, Nt\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \Psi_o\left(\frac{2k+2-x}{N}, Nt\right). \quad (50)$$

Четную и нечетную производящие функции будем искать в виде (14) и (15), соответственно. Уравнение для $G_1(t)$, дополнительное к (17), получается подстановкой (14) в (49)

$$G_1(t) = \frac{1}{N} \frac{1}{e^{2t} - 1} \left(G_1(Nt) \left(e^{(N+1)t} - 1 \right) - G_1(-Nt) \left(e^{-(N-1)t} - 1 \right) \right). \quad (51)$$

Уравнениям (17) и (51) удовлетворяет функция (21), то есть четной производящей функцией для собственных функций оператора (45) является производящая функция (37) для полиномов Бернулли с четными индексами

$$\Psi_e(x, t) = B_e(x, t), \quad (52)$$

а решение спектральной задачи представляется в форме

$$\psi_n(x) = B_n(x), \quad \lambda_n = \frac{1}{N^n}, \quad n = 2l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (53)$$

Получим теперь явное выражение для нечетной части производящей функции $\Psi_o(x, t)$, подставив (18) в уравнение (45). Получим

$$G_2(t) = \frac{1}{e^{2t} - 1} \left(G_2(Nt) \left(e^{(N+1)t} - 1 \right) + G_2(-Nt) \left(e^{-(N-1)t} - 1 \right) \right). \quad (54)$$

Решение, удовлетворяющее как (18), так и (54), имеет вид (25), что дает для производящей функции следующее представление:

$$\Psi_o(x, t) = E_o(x, t). \quad (55)$$

Это означает, что собственными функциями оператора (50) являются также полиномы Эйлера с нечетными индексами

$$\psi_n(x) = E_n(x), \quad \lambda_n = \frac{1}{N^{n+1}}, \quad n = 2l - 1, \quad l = 1, 2, \dots, . \quad (56)$$

Так, для трехзвенного отображения ($N = 3$) каждому собственному числу $1/3^{2n}$ оператора Перрона – Фробениуса будут отвечать две собственные функции: $B_{2n}(x)$ и $E_{2n+1}(x)$.

Кратность собственных чисел оператора Перрона – Фробениуса (50) позволяет конструировать его собственные функции посредством линейной комбинации собственных функций – полиномов с четными и нечетными номерами, которым отвечают одинаковые собственные числа, например, в форме (42) (этому результату соответствует решение (22) для уравнения (17)).

3. Решение спектральной задачи для инверсного пилообразного отображения

На единичном сегменте отображение, инверсное к некоторому отображению $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_n \in (0, 1)$, определим как

$$x_{n+1} = \tilde{f}(x_n) = 1 - f(x_n), \quad x_n \in (0, 1). \quad (57)$$

Итеративную функцию инверсного пилообразного отображения можно представить в виде

$$x_{n+1} = \tilde{f}(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - (-1)^k N x_n - (-1)^{k+1} \left(k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) \right) \Theta_k(x) \quad (58)$$

(на рис. 2 показано пятизвенное инверсное отображение). Оператор Перрона – Фробениуса, отвечающий (57), имеет вид

$$\tilde{P}_{(N)} \rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \rho \left(\frac{1}{N} \left((-1)^k (1 - x) + k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) \right). \quad (59)$$

Процесс нахождения собственных чисел и полиномиальных собственных функций оператора (59) полностью совпадает с ходом решения аналогичной задачи для «исходного» отображения, но результаты для оператора (59) будут заметно отличаться от результатов раздела 2. Рассмотрим, как и выше, случаи четного и нечетного числа ветвей N монотонности исследуемого отображения (58).

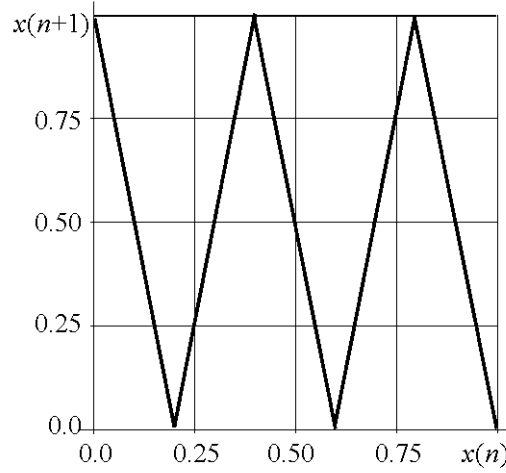


Рис. 2. Инверсное кусочно-линейное отображение с пятью ветвями

3.1. Инверсное отображение с четным числом ветвей. Для четного N оператор Перрона – Фробениуса (59) переписывается следующим образом:

$$\tilde{P}_{(N)}\rho(x) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N/2-1} \rho\left(\frac{x+2k+1}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2-1} \rho\left(1 - \frac{x+2k+1}{N}\right) \right), \quad (60)$$

а уравнение (3), определяющее собственные функции, –

$$\lambda_n \psi_n(x) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N/2-1} \psi_n\left(\frac{x+2k+1}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2-1} \psi_n\left(1 - \frac{x+2k+1}{N}\right) \right). \quad (61)$$

Как и в подразделе 2.1, в случае полиномиальных собственных функций собственные числа оператора (60) представляются формулами (31) и (32).

Последующие рассмотрения проводятся по уже введенному выше сценарию. Производящая функция для собственных функций с четными номерами, удовлетворяющая уравнению

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N/2-1} \Psi_e\left(\frac{x+2k+1}{N}, Nt\right) + \sum_{k=0}^{N/2-1} \Psi_e\left(1 - \frac{x+2k+1}{N}, Nt\right) \right), \quad (62)$$

ищется в виде (14). Уравнение для вспомогательной функции $G_1(t)$, дополнительное к (17), следует из (62):

$$G_1(t) = \frac{1}{N} \left(G_1(Nt) \frac{e^{(1+N)t} - e^t}{e^{2t} - 1} - G_1(-Nt) \frac{e^{(1-N)t} - e^t}{e^{-2t} - 1} \right). \quad (63)$$

Решением, удовлетворяющим одновременно (17) и (55), будет функция (23), а соответствующая производящая функция будет иметь вид

$$\Psi_e(x, t) = B_e(x, t) + \frac{t}{2} E_0(x, t) = B_e(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial E_0(x, t)}{\partial x}. \quad (64)$$

В качестве собственных функций производящая функция (64) дает комбинацию полиномов Бернулли и Эйлера

$$\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x) + \frac{t}{2}E_{2n-1}(x) = B_{2n}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial E_{2n}(x)}{\partial x}, \quad (65)$$

отличающуюся знаком от результата (42), полученного для исходного отображения (26) с четным числом ветвей.

Нуль-пространство оператора (60) в классе полиномиальных функций представляют многочлены Бернулли и многочлены Эйлера с нечетными индексами. В самом деле, действуя оператором (60) на производящую функцию вида (15), по аналогии с (43) можно получить

$$\tilde{P}_{(N)}\Psi_0(x, t) = (G_2(t) - e^{-t}G_2(-t)) \frac{1 - e^t e^{(x+1)t/N} + e^{(-x+1)t/N}}{2N(1 - e^{2t/N})}. \quad (66)$$

Для функций $G_2(t)$ в форме (24) или (25) выполняется (18), а вслед за этим (66) обращается в нуль, что и доказывает сделанное утверждение относительно нуль-пространства оператора (60). Производящими функциями для элементов нуль-пространства являются производящие функции для многочленов Бернулли и Эйлера с нечетными индексами (38) и (40).

3.2. Инверсное пилообразное отображение с нечетным числом ветвей.

Рассмотрим теперь инверсное отображение (58) с нечетным числом ветвей $N \geq 3$. Оператор Перрона – Фробениуса подобного отображения представляется в виде следующих двух сумм:

$$\tilde{P}_{(N)}\rho(x) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \rho\left(\frac{x+2k+1}{N}\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \rho\left(\frac{2k+1-x}{N}\right) \right]. \quad (67)$$

Уравнение, соответствующее (3) и определяющее собственные функции оператора (67), запишется в виде

$$\lambda_n \psi_n(x) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \psi_n\left(\frac{x+2k+1}{N}\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \psi_n\left(\frac{2k+1-x}{N}\right) \right], \quad (68)$$

что в случае полиномиальных собственных функций оператора позволяет получить представление для соответствующих собственных чисел в виде

$$\lambda_n = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \frac{1}{N^n} + \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \frac{1}{(-N)^n} \right] = \frac{1}{N} \left[\frac{N-1}{2} \frac{1}{N^n} + \frac{N+1}{2} \frac{1}{(-N)^n} \right]. \quad (69)$$

То есть для четных $n = 2k$ собственные числа сугубо положительны и имеют вид (28), а для нечетных $n = 2k + 1$ они являются отрицательными

$$\lambda_{2l} = \frac{1}{N^{2l}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad \lambda_{2k+1} = -\frac{1}{N^{2k+2}}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (70)$$

Следовательно, при инверсии пилообразного отображения с нечетным числом ветвей монотонности все собственные числа оператора Перрона – Фробениуса становятся простыми (кратности 1).

Найдем соответствующие собственные функции оператора. Уравнения для четной и нечетной составляющих производящей функции имеют вид:

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \Psi_e \left(\frac{x + 2k + 1}{N}, Nt \right) + \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \Psi_e \left(\frac{2k + 1 - x}{N}, Nt \right) \right], \quad (71)$$

$$\Psi_o(x, t) = - \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \Psi_o \left(\frac{x + 2k + 1}{N}, Nt \right) - \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \Psi_o \left(\frac{2k + 1 - x}{N}, Nt \right). \quad (72)$$

Как и выше, считаем, что эти функции ищутся в виде (14) и (15). В результате подстановки (14) в (71) с учетом (68) найдем уравнение для вспомогательной функции $G_1(t)$:

$$G_1(t) = \frac{1}{N} \frac{1}{e^{2t} - 1} (G_1(Nt) (e^{Nt} - e^t) - G_1(-Nt) (e^{-Nt} - e^t)). \quad (73)$$

Согласованным решением функциональных уравнений (17) и (73) является (21), что соответствует производящей функции $\Psi_e(x, t)$ в форме производящей функции для полиномов Бернулли с четными индексами (см. (52), (53)).

В результате подстановки (15) в (72) определяется уравнение для функции $G_2(t)$:

$$G_2(t) = -\frac{1}{e^{2t} - 1} (G_2(Nt) (e^{Nt} - e^t) + G_2(-Nt) (e^{-Nt} - e^t)), \quad (74)$$

решением которого является (25). Это означает, что производящей функцией для собственных функций с нечетными индексами является производящая функция для полиномов Эйлера с нечетными индексами, которые и являются решением спектральной задачи (см. (55) и (56)).

Заключение

В работе впервые аналитически найдены собственные числа и собственные функции оператора Перрона – Фробениуса для пилообразных отображений (26) и (58), инверсных друг другу (в смысле равенства (57)) в случае произвольного числа ветвей (вид отображений для $N = 5$ показан на рис. 1 и 2). Решение спектральной задачи в классе целых функций получено оригинальным методом – посредством введения аналитических производящих функций для полиномиальных собственных функций названного оператора. Краткий «путеводитель» по результатам статьи можно представить следующей табличкой:

Отображение	Число ветвей N	Собственные числа	Полиномиальные собственные функции	Полиномиальное ядро
(26)	четное	(30)-(32)	(41), (42)	нет
(26)	нечетное	(31), (48)	(52)-(56)	нет
(58)	четное	(30)-(32)	(64), (65)	(38), (40)
(58)	нечетное	(31), (70)	(52)-(56)	(38), (40)

Собственные функции оператора Перрона – Фробениуса для пилообразных отображений представляются полиномами Бернулли, полиномами Эйлера или их комбинациями. Вид собственных функций различен для отображений с четными и нечетными ветвями, но в пределах одного класса отображений (с четным или нечетным числом ветвей) число ветвей не влияет на представление собственных функций – они описываются едиными аналитическими выражениями (подобным же свойством обладает оператор Перрона – Фробениуса для сдвигов Бернулли).

Собственные числа во всех случаях представляются сходными по структуре выражениями (отрицательные степени числа ветвей отображения). Для отображения (26) в случае четного числа ветвей собственные числа являются кратными; им соответствует двумерное подпространство собственных функций. В случае инверсного отображения (58) с четным числом ветвей собственные числа, будучи знакопеременными, становятся простыми (кратности 1).

На основании существующих связей [23] между полиномами Бернулли и Эйлера найденные собственные функции операторов Перрона – Фробениуса могут быть представлены в альтернативных формах. Так, например, комбинация полиномов Бернулли и Эйлера может быть заменена полиномом Бернулли половинного аргумента (см. (41)).

Решение спектральных задач для операторов Перрона – Фробениуса кусочно-линейных отображений открывает перспективы для точного решения, по крайней мере, следующих трех классов задач:

1) нахождение собственных чисел и функций отображений, связанных с рассмотренными кусочно-линейными отображениями (26) и (58) обратимыми дифференцируемыми преобразованиями, а именно: собственные числа операторов Перрона – Фробениуса топологически сопряженных отображений совпадают, а в выражении для собственных функций соответствующим образом меняется лишь аргумент [14];

2) нахождение автокорреляционных функций орбит и корреляционных функций наблюдаемых, связанных с траекториями отображений, поскольку эти расчеты сводятся к выявлению результатов многократного действия оператора Перрона – Фробениуса на соответствующие функции независимой переменной и интегрированию этих результатов по инвариантной плотности [12];

3) аналитическое исследование перемешивающих свойств отображений на основе представления начальных распределений формулами Эйлера – Маклорена [14], в том числе и посредством замещения полиномов Бернулли в оригинальной формуле Эйлера – Маклорена на полиномы Эйлера.

Естественным обобщением рассматриваемых отображений являются кусочно-линейные отображения, в которых возрастающие и убывающие ветви чередуются в произвольном порядке, и отображения с «неполными» (не переводящими подынтервал своего определения на единичный интервал) ветвями. К аналитическому решению спектральных задач для операторов Перрона – Фробениуса подобных отображений мы обратимся в следующей работе.

Библиографический список

1. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
4. *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 356 с.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. *Пригожин И.Р., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. М.: Прогресс, 1994. 272 с.
7. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии. Саратов: ГосУНЦ Колледж, 2002. 324 с.
8. *Лифшиц Е.М., Халатников И.М., Синай Я.Г., Ханин К.М., Щур Л.Н.* О стохастических свойствах релятивистских космологических моделей вблизи особой точки // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 79.
9. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* О хаотической модели ранней эволюции Вселенной // Радиотехника. 2005. № 4. С. 50.
10. *Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. 456 с.
11. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. Гл. 9.
12. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1-2. С. 3.
13. *Antoniou I., Tasaki S.* Generalized spectral decomposition of mixing dynamical systems // Int. J. Quantum Chemistry. 1993. Vol. 46. P. 425.
14. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса – Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 2. С. 67.
15. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M., and Arkadaksky S.S.* On the convergence of non-stationary solutions of the Frobenius – Perron equations to the invariant density // Proceedings of 2nd International Conference «Control of Oscillation and Chaos». 2000 / Edited by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov. S.-Petersburg. Vol. 1. P. 142.
16. *Dörfle M.* Spectrum and eigenfunctions for the Frobenius – Perron operator of the tent map // J. Stat. Phys. 1985. Vol. 40. №1/2. P. 93.

17. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С. Сопряженные хаотические отображения: построение, траекторные, вероятностные и спектральные характеристики // Проблемы современной физики. К 90-летию Саратовского государственного университета и 40-летию сотрудничества ОИЯИ – СГУ / Под ред. А.Н.Сисакяна и Д.И. Трубецкова. Дубна: ОИЯИ, 2000. С. 172.
18. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Барулина Ю.А. К решению спектральной задачи для эволюционного оператора методом производящих функций // Моделирование: Сб. науч. статей / Под ред. проф. Б.Е. Железковского. Саратов: Исток-С, 2002. С. 24.
19. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
20. Бланк Л.М. Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001. 352 с.
21. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Ch.4.
22. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metrical Theory of Continued Fractions. Kluwer Boston, Inc. 2002. Chps. 1, 2.
23. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 24.03.2006

**ANALYTICAL SOLUTION OF SPECTRAL PROBLEM
FOR THE PERRON – FROBENIUS OPERATOR
OF PIECE-WISE LINEAR CHAOTIC MAPS**

V.M. Anikin, S.S. Arkadaksky, A.S. Remizov

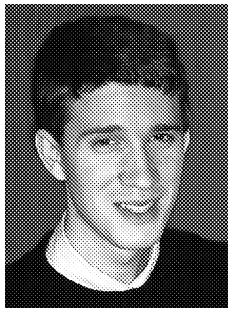
Spectral properties of the linear non-self-adjoint Perron – Frobenius operator of piece-wise linear chaotic maps having regular structure are investigated. Eigenfunctions of the operator are found in the form of Bernoulli and Euler polynomials. Corresponding eigenvalues are presented by negative powers of number of map brunches. The solution is obtained in general form by means of generating functions for eigenfunctions of the operator. Expressions for eigenfunctions and eigenvalues are different for original and inverse maps having even and odd number of branches. Results allow us to find analogous solution of the spectral problem for conjugate maps and to calculate analytically decay of correlations for such chaotic dynamical systems.



Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук (2005), доцент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по научной работе, ученый секретарь докторского диссертационного совета по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника. В 2000-2003 гг. исполнял обязанности секретаря Всемирной международной конференции по вакуумным источникам электронов (IVESC). Область научных интересов – аналитические модели хаотических и стохастических процессов. Автор 5 монографий и 80 статей.
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru



Аркадакский Сергей Сергеевич – родился в Саратове (1949). Окончил физический факультет СГУ (1971). Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по общим вопросам. Область научных интересов – электроника СВЧ, нелинейная динамика.



Ремизов Александр Сергеевич – родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет СГУ (2002). Ассистент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, аспирант заочной аспирантуры. Область научных интересов – хаотическая динамика, включая вопросы хаотической криптографии.