

## О КРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕИДЕНТИЧНЫХ НЕСИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА В ПРИСУТСТВИИ ШУМА

*А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, И.Р. Сатаев*

Исследовано воздействие аддитивного внешнего шума на особый тип критического поведения, возникающий в неидентичных несимметрично связанных системах с удвоениями периода. При помощи ренормгруппового анализа определено численное значение константы, характеризующей усиление воздействия шума при приближении к критическому состоянию. Численно проиллюстрировано свойство скейлинга критического аттрактора и пространства параметров в окрестности критического состояния.

### Введение

К настоящему времени хорошо известно, что усложнение поведения динамических систем и переход к хаосу происходит в соответствии с определенными количественными закономерностями, одинаковыми для систем различной физической и математической природы, принадлежащих в некотором смысле к одному классу и демонстрирующих один тип критического поведения. Начиная с работ Фейгенбаума [1, 2], было обнаружено достаточно большое число типов критического поведения (см., например, [3-11]), каждый из которых наблюдается в определенном классе систем и характеризуется самоподобной структурой пространства параметров в окрестности критической точки и существующего в ней критического аттрактора с определенными константами самоподобия, одинаковыми для всех систем с данным типом критического поведения.

Однако при изучении возможности наблюдения таких явлений в реальных системах возникает несколько требующих исследования вопросов, одним из которых является воздействие внешнего шума, неизбежно присутствующего в любой физической системе, на критическое поведение. Эта проблема также весьма активно исследовалась многими авторами [12-22]. Еще в первых работах [12, 13], посвященных анализу шумового воздействия на системы с фейгенбаумовским критическим поведением, было показано, что влияние шума на тонкую структуру пространства параметров тем сильнее, чем ближе к критической точке мы находимся. Поэтому для

наблюдения, например, самоподобного устройства пространства параметров системы с шумовым воздействием необходимо не только изменять масштаб рассмотрения в определенное число раз, но и уменьшать амплитуду шума также в некоторое число раз. Численное значение этого числа (константы скейлинга для амплитуды шума) можно определить при помощи ренормгруппового анализа, что и было проделано в [12]. Впоследствии аналогичные исследования были проведены для воздействия шума на критическое поведение различных типов: бикритическое, возникающее в однонаправленно связанных системах с удвоениями периода [19], критическое поведение вблизи так называемой точки GM, возникающее при переходе к хаосу через разрушение квазипериодических движений [21], и другие, при этом константа скейлинга оказывается уникальной для каждого из типов критического поведения.

В настоящей работе исследовано воздействие шума на критическое поведение еще одного типа, возникающее «на стыке» двух сценариев перехода к хаосу (через удвоения периода и через разрушение квазипериодических движений). В типичном случае критическое поведение этого типа наблюдается на плоскости управляющих параметров неидентичных связанных отображений с удвоениями периода.

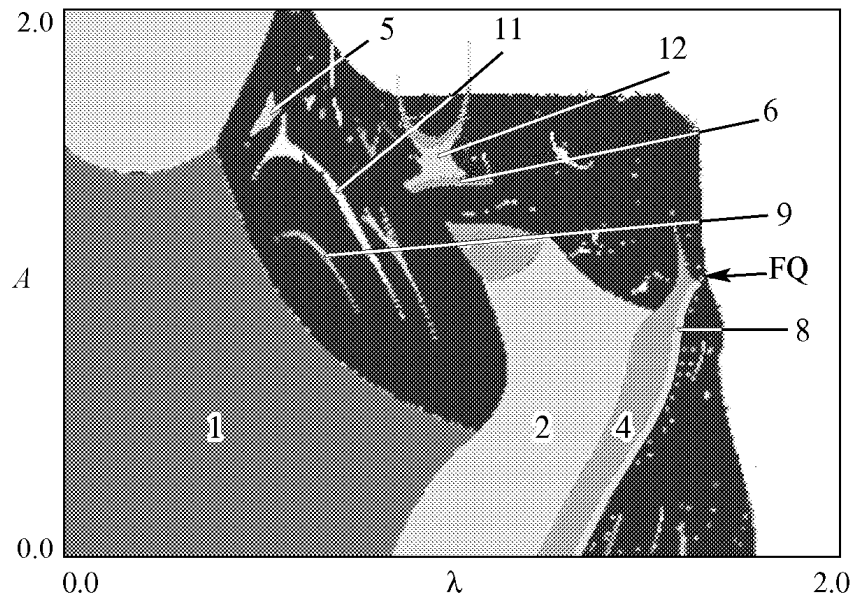
## 1. Критическое поведение типа FQ в отсутствие шума

Рассмотрим систему двух неидентичных связанных логистических отображений

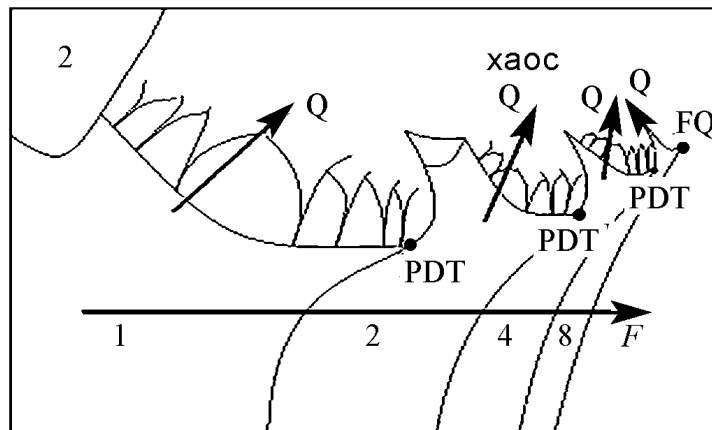
$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - C y_n^2, \\y_{n+1} &= 1 - A y_n^2 - B x_n^2,\end{aligned}\tag{1}$$

динамика которой была исследована в работе [23]. На рис. 1, *а* приведена карта динамических режимов, иллюстрирующая устройство плоскости управляющих параметров системы (1) при фиксированных значениях констант связи. Хорошо видно, что линии бифуркаций удвоения периода и Неймарка – Сакера, ограничивающие область устойчивости цикла периода 1, пересекаются в точке, которую можно назвать PDT (period-doubling terminal) точкой. Последовательность таких точек с увеличением периода цикла сходится к предельной точке, в любой малой окрестности которой можно, следовательно, наблюдать переход к хаосу как по сценарию Фейгенбаума, так и через разрушение квазипериодических движений (см. рис. 1, *б*). Реализующееся в этой точке критическое поведение было названо [23] критическим поведением типа FQ, а сама предельная точка – точкой FQ.

В [23, 24] при помощи ренормгруппового анализа было показано, что соответствующая типу FQ неподвижная точка ренормгруппового преобразования имеет три существенных собственных числа, и, соответственно, полная коразмерность критического поведения типа FQ равна трем. Однако в системах связанных отображений в силу симметрии оказывается невозможным ввести возмущение, соответствующее третьему собственному числу, что и позволяет пронаблюдать критическое поведение типа FQ на плоскости управляющих параметров подсистем, то есть как феномен коразмерности два.



*a*



*б*

Рис. 1. *a* – карта динамических режимов на плоскости параметров системы (1). Значения констант связи  $B = 0.375$ ;  $C = -0.25$ . Области устойчивости циклов различных периодов закрашены разными оттенками серого (периоды циклов подписаны). Черный цвет соответствует областям неперiodической (хаотической либо квазипериодической) динамики, белый – области отсутствия аттрактора. Положение точки FQ отмечено стрелкой. *б* – схематическое изображение устройства пространства параметров систем с критическим поведением типа FQ

На рис. 2 приведены иллюстрации скейлинга на картах ляпуновских показателей системы (1) в окрестности критической точки FQ, а на рис. 3 – на критическом аттракторе системы (1) с соответствующими константами скейлинга. Видно, что совпадение структур на двух последовательных (достаточно глубоких) уровнях скейлинга весьма хорошее.

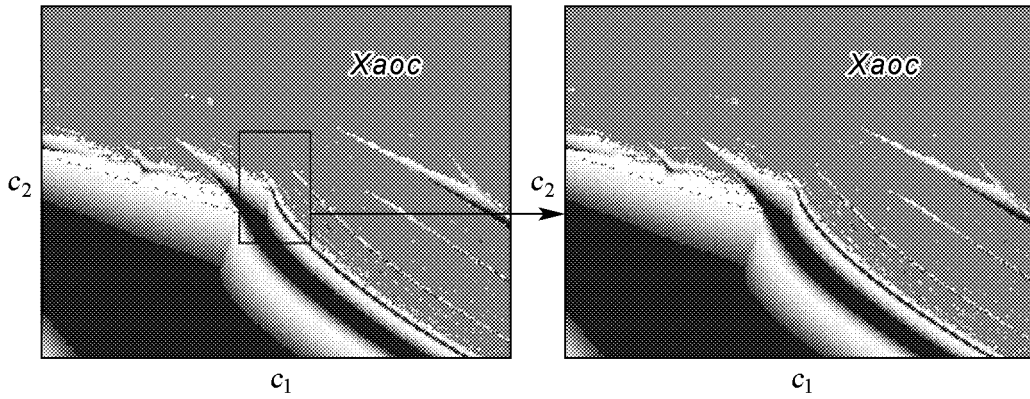


Рис. 2. Скейлинг в пространстве параметров системы (1) на карте старшего ляпуновского показателя. Значения старшего ляпуновского показателя кодируются оттенками серого цвета следующим образом: нулевому значению соответствует белый цвет, отрицательным – серый: чем больше абсолютное значение показателя, тем темнее оттенок, так что черный соответствует режимам максимальной устойчивости. В области положительных значений ляпуновского показателя (область хаоса) кодирование его величины не производится, и она вся отмечена одним оттенком серого. Справа – увеличенный фрагмент рисунка. Константы скейлинга  $\delta_1 = 6.32631925 \dots$  по оси  $c_1$  и  $\delta_2 = 3.44470967 \dots$  по оси  $c_2$ . Координаты  $(c_1, c_2)$  связаны с параметрами системы соотношениями  $A = A_c + c_2$ ,  $\lambda = \lambda_c + c_1 + 0.8312c_2$ . Точка FQ находится в центре рисунков

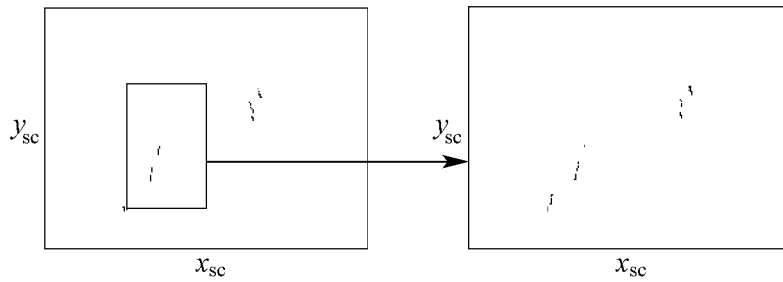


Рис. 3. Скейлинг на критическом аттракторе системы (1). Справа – увеличенный фрагмент рисунка. Пересчет масштаба производился в  $\alpha = -1.900071670 \dots$  раз по оси  $y_{sc}$  и в  $\beta = -4.00815849 \dots$  раз по оси  $x_{sc}$

## 2. Воздействие шума на критическое поведение типа FQ – ренормгрупповой анализ

Исследуем воздействие внешнего шума на критическое поведение типа FQ. Модельная система (1) в этом случае может быть записана в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - C y_n^2 + \varepsilon \xi_n^{(1)}, \\ y_{n+1} &= 1 - A y_n^2 - B x_n^2 + \varepsilon \xi_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\bar{\xi}_n = (\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)})$  – случайный вектор, компоненты которого при численном моделировании предполагались распределенными равномерно на отрезке  $[-0.5; 0.5]$ ;  $\varepsilon$  – амплитуда шума.

На рис. 4 приведена окрестность точки FQ в пространстве параметров и ее увеличенный фрагмент, построенный с изменением масштаба в соответствии с константами скейлинга  $\delta_1 = 6.32631925\dots$  и  $\delta_2 = 3.44470967\dots$ , но без изменения амплитуды шума. Видно, что структуры в пространстве параметров разрушаются тем сильнее, чем ближе к критической точке мы находимся, и самоподобную структуру пространства параметров в окрестности точки FQ без перенормировки амплитуды шума пронаблюдать не удастся.

Для определения численного значения константы перенормировки амплитуды шума проведем ренормгрупповой анализ критического поведения типа FQ с шумом, используя известные [23] результаты ренормгруппового анализа соответствующего поведения без шума. Для учета воздействия шума используем надлежащим образом модифицированную идею, первоначально предложенную в [13] для фейгенбаумовского типа критичности.

Пусть компоненты двумерного случайного вектора, описывающего воздействие шума, имеют вид  $\bar{\xi}_n = (\xi_n \varphi(x_n, y_n), \xi_n \psi(x_n, y_n))$ , где  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  – некоторые дифференцируемые функции. При выводе ренормгруппового преобразования предполагаем, что случайная величина  $\xi_n$  имеет гауссово распределение, причем

$$\langle \xi_n \xi_{n+1} \rangle = 0, \quad \langle \xi_n^2 \rangle = 1. \quad (3)$$

(Эмпирические результаты показывают, что в действительности обнаруживаемые скейлинговые закономерности являются универсальными и выполняются для достаточно произвольного шума, лишь бы его распределение было ограничено.)

Тогда исходная система описывается двумерным отображением вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x_n, y_n) + \varepsilon \xi_n \varphi(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= f(x_n, y_n) + \varepsilon \xi_n \psi(x_n, y_n), \end{aligned} \quad (4)$$

где функции  $g(x, y)$  и  $f(x, y)$  соответствуют неподвижной точке ренормгруппового преобразования, отвечающей критическому поведению типа FQ (см. [23]).

Фактически (4) описывает двумерное отображение, находящееся под воздействием случайных функций  $\Phi_n(x, y) = \xi_n \varphi(x, y)$  и  $\Psi_n(x, y) = \xi_n \psi(x, y)$ , моменты

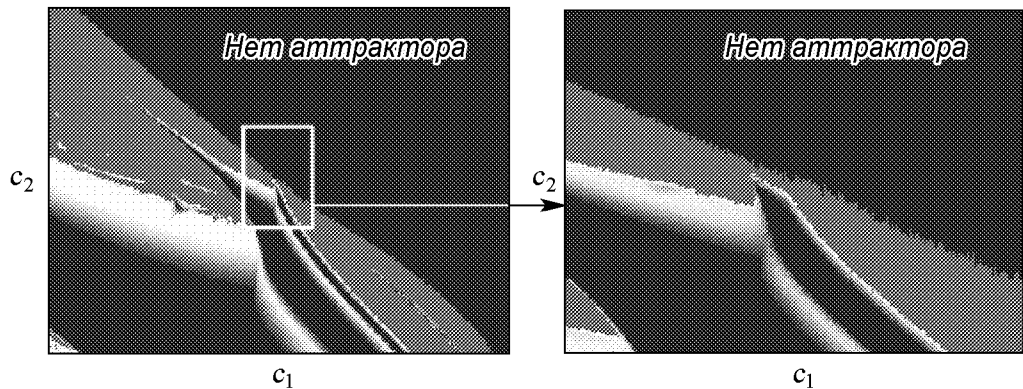


Рис. 4. Построение первого уровня скейлинга в окрестности критической точки FQ в системе с шумом (2). Амплитуда шума  $\varepsilon = 0.001$ . Справа – увеличенный фрагмент рисунка

второго порядка которых выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= \langle \Phi_n^2(x, y) \rangle = \varphi^2(x, y), \\
Q(x, y) &= \langle \Phi_n(x, y) \Psi_n(x, y) \rangle = \varphi(x, y) \psi(x, y), \\
S(x, y) &= \langle \Psi_n^2(x, y) \rangle = \psi^2(x, y).
\end{aligned} \tag{5}$$

Тогда при малой амплитуде шума двукратно проитерированное отображение можно записать в виде

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= g(g(x_n, y_n), f(x_n, y_n)) + \varepsilon[\xi_n \varphi(x_n, y_n) g'_x(g(x_n, y_n), f(x_n, y_n)) + \\
&\quad + \xi_n \psi(x_n, y_n) g'_y(g(x_n, y_n), f(x_n, y_n)) + \xi_{n+1} \varphi(g(x_n, y_n), f(x_n, y_n))], \\
y_{n+2} &= f(g(x_n, y_n), f(x_n, y_n)) + \varepsilon[\xi_n \varphi(x_n, y_n) f'_x(g(x_n, y_n), f(x_n, y_n)) + \\
&\quad + \xi_n \psi(x_n, y_n) f'_y(g(x_n, y_n), f(x_n, y_n)) + \xi_{n+1} \psi(g(x_n, y_n), f(x_n, y_n))].
\end{aligned} \tag{6}$$

Проводя стандартную перенормировку, можно прийти к ренормгрупповому преобразованию, описывающему изменение моментов второго порядка случайных функций при переходе к режимам удвоенного периода

$$\begin{aligned}
P'(x, y) &= \alpha^2 \left\{ \left( g'_x \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) \right)^2 P \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + \right. \\
&\quad + 2g'_x \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) g'_y \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) Q \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + \\
&\quad \left. + \left( g'_y \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) \right)^2 S \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + P \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) \right\}, \\
Q'(x, y) &= \alpha\beta \left\{ g'_x \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) f'_x \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) P \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + \right. \\
&\quad + \left[ g'_x \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) f'_y \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) + \right. \\
&\quad + g'_y \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) f'_x \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) Q \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + \\
&\quad + g'_y \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) f'_y \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) S \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + \\
&\quad \left. \left. + Q \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) \right\}, \\
S'(x, y) &= \beta^2 \left\{ \left( f'_x \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) \right)^2 P \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + \right. \\
&\quad + 2f'_x \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) f'_y \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) Q \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + \\
&\quad \left. + \left( f'_y \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) \right)^2 S \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) + S \left( g \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right), f \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь константы  $\alpha$  и  $\beta$  являются характерными для критического поведения типа FQ константами скейлинга на аттракторе. Неподвижная точка этого преобразования была найдена нами численно<sup>1</sup>, а наибольшее из соответствующих ей собственных чисел оказалось равным  $\gamma = 8.206143\dots$ . Оно и является искомой константой перенормировки амплитуды шума.

### 3. Компьютерные иллюстрации скейлинга в присутствии шума

Приведем некоторые компьютерные иллюстрации, демонстрирующие скейлинг в пространстве параметров системы (2) в окрестности точки FQ и на существующем в этой точке критическом аттракторе. Для иллюстрации скейлинга в окрестности критической точки в пространстве параметров необходимо ввести специальную (скейлинговую) систему координат. Поскольку константы скейлинга в пространстве параметров удовлетворяют соотношению  $\delta_1 < \delta_2^2$ , то скейлинговая система координат может быть прямолинейной косоугольной системой (более подробное обсуждение этого вопроса см. в [25]). Каждой константе скейлинга, являющейся собственным числом неподвижной точки ренормгруппового преобразования, соответствует собственное направление в пространстве параметров системы. Для исследуемой системы такие направления были определены численно из координат PDT-точек (более подробно см. [26, 27]), при этом оказалось, что определенное собственное направление соответствует только большей константе  $\delta_1$ , а вторую ось системы можно выбрать произвольно. Для простоты направим ее вдоль оси параметра  $A$ , тогда скейлинговая система координат  $(c_1, c_2)$  связана с «естественной» следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A &= A_c + c_2, \\ \lambda &= \lambda_c + c_1 + 0.8312c_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\lambda_c = 1.6545245$  и  $A_c = 1.0308375$  – значения параметров, соответствующие точке FQ.

На рис. 5 приведены достаточно глубокие уровни скейлинга, соответствующие начальным амплитудам шума 0.01 и 0.001. При переходе к каждому следующему уровню скейлинга амплитуда шума уменьшалась на константу  $\gamma$ . Видно, что очень хорошо воспроизводится структура пространства параметров, в том числе и такие достаточно тонкие элементы, как языки Арнольда в областях квазипериодического движения.

На рис. 6 приведено несколько последовательных уровней скейлинга на критическом аттракторе системы (2), существующем в точке  $\lambda_c = 1.6545245$ ,  $A_c = 1.0308375$  при начальной амплитуде шума 0.001. При переходе к следующему уровню скейлинга амплитуда шума также уменьшалась в  $\gamma$  раз. Видно, что структура аттрактора весьма хорошо воспроизводится при изменении масштаба.

<sup>1</sup>Это ренормгрупповое преобразование аналогично полученному в [17] при анализе воздействия шума на двумерные гамильтоновы системы. Найденное нами решение соответствует другой неподвижной точке этого преобразования, отвечающей критическому поведению типа FQ.

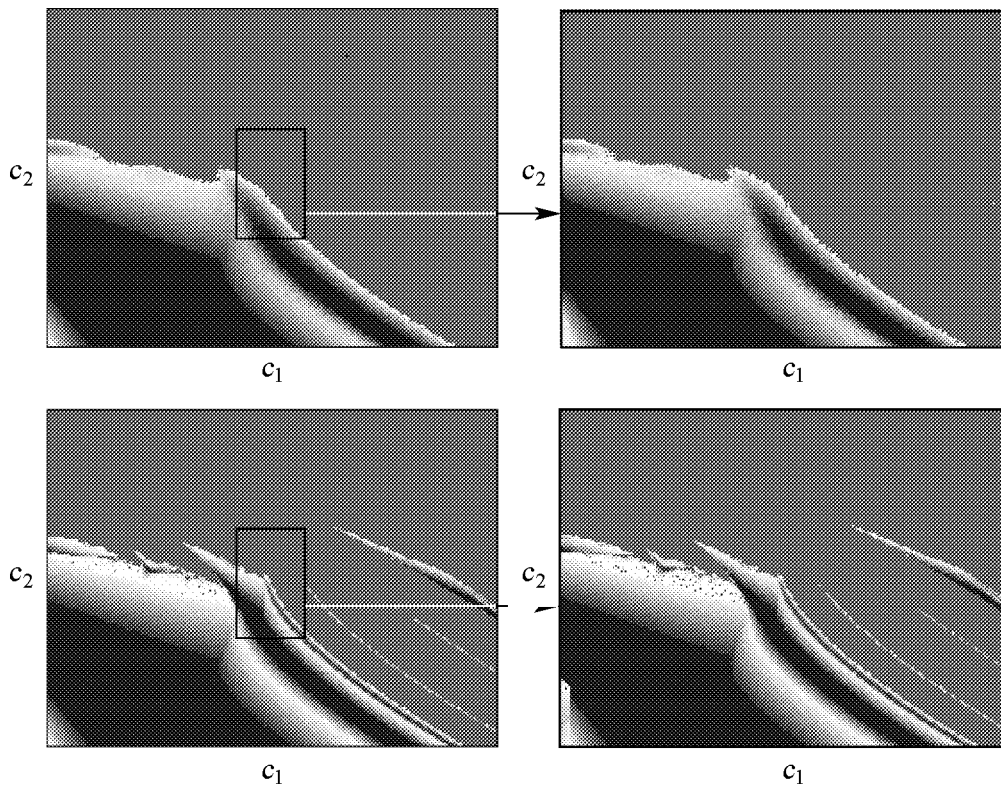


Рис. 5. Скейлинг на картах ляпуновских показателей системы (2) в окрестности точки FQ. Приведены пятый (слева) и шестой (справа) уровни скейлинга, соответствующие начальным амплитудам шума  $\varepsilon = 0.01$  (a) и  $0.001$  (б)

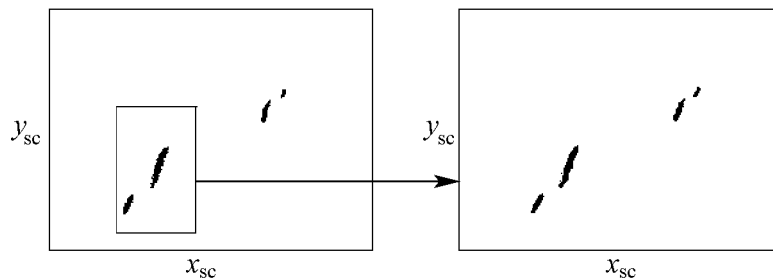


Рис. 6. Скейлинг на картах ляпуновских показателей системы (2) в окрестности точки FQ. Приведены пятый (слева) и шестой (справа) уровни скейлинга, соответствующие начальным амплитудам шума  $\varepsilon = 0.01$  (a) и  $0.001$  (б)

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследовано воздействие внешнего шума на критическое поведение типа FQ, возникающее «на стыке» двух сценариев перехода к хаосу: по сценарию Фейгенбаума и через разрушение квазипериодических движений. При помощи ренормгруппового анализа определено численное значение константы, ответственной за перенормировку амплитуды шума при изменении мас-



штаба наблюдения динамики системы и продемонстрирован скейлинг в пространстве параметров и на критическом аттракторе модельной системы двух связанных логистических отображений в присутствии внешнего шума.

Авторы выражают глубокую и искреннюю благодарность профессору А.С. Пиковскому (университет Потсдама, Германия) за постоянное сотрудничество и полезные обсуждения.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №04-02-04011\_ННИО.*

### **Библиографический список**

1. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. of Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
2. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. of Stat. Phys.* 1982. Vol. 26, № 6. P. 669.
3. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // *Phys. Rev.* 1981. Vol. A24. P. 2669.
4. *MacKey R.S., Tresser C.* Some flesh on skeleton: The bifurcation structure of bimodal maps // *Physica.* 1987. Vol. D27, № 3. P. 412.
5. *Schell M., Fraser S., Kapral R.* Subharmonic bifurcations in the sine map: an infinite of bifurcations // *Phys. Rev.* 1983. Vol. A28, № 1. P. 373.
6. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Ч. II. Двухпараметрический переход к хаосу // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Т. 1, № 3. С. 17.
7. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Гибрид удвоенный периода и касательной бифуркации: количественная универсальность и двухпараметрический скейлинг // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т. 3, № 4. С. 3.
8. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // *Physica.* 1982. Vol. D5. P. 370.
9. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results // *Physica.* 1982. Vol. D5. P. 126.
10. *Rand D.* Existence, non-existence and universal breakdown of dissipative golden invariant tori: I. Golden critical circle maps // *Nonlinearity.* 1992. Vol. 5. P. 639.
11. *Kuznetsov S.P.* A variety of critical phenomena associated with the golden mean quasiperiodicity // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2002. Vol. 10, № 3. P. 22.
12. *Shraiman B., Wayne C.E., Martin P.C.* Scaling theory for noisy period-doubling transition to chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 935.
13. *Crutchfield J.P., Nauenberg M., Rudnik J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.

14. *Hirsh J.E., Huberman B.A., Scalapino D.J.* Theory of intermittency // *Phys. Rev. A.* 1981. Vol. 25, № 1. С. 519.
15. *Hirsh J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J.* // *Phys. Lett.* 1982. Vol. 87A. P. 391.
16. *Hamm A., Graham R.* Scaling for small random perturbations of golden critical circle maps // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46, № 10. P. 6323.
17. *Gyorgyi G., Tishby N.* Scaling in a stochastic Hamiltonian systems: a renormalization approach // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58, № 6. P. 527.
18. *Gyorgyi G., Tishby N.* Path integrals in Hamiltonian systems: breakup of the last KAM tori due to random forces // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, № 4. P. 353.
19. *Kapustina J.V., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E.* Scaling properties of bicritical dynamics in unidirectionally coupled period-doubling systems in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64, № 6, 006207 (12 pages).
20. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H.* Effect of noise on the dynamics of a complex map at the period-tripling accumulation point // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69, 036216.
21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sedova J.V.* Effect of noise on the critical golden-mean quasiperiodic dynamics in the circle map // *Physica A*, 2006. Vol. 359. P. 48.
22. *Kuznetsov S.P.* Effect of noise on the dynamics at the torus-doubling terminal point in a quadratic map under quasiperiodic driving // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72, 026205.
23. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality // *Physica D.* 1997. Vol. 101. P. 249.
24. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. 109. P. 91.
25. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // *Phys. Lett. A.* 1992. Vol. 162, № 3. P. 236.
26. *Кузнецов А.П., Савин А.В.* Об одном типе перехода порядок-хаос в связанных отображениях с удвоениями периода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, № 6. С. 16.
27. *Kuznetsov A.P., Savin A.V., Kim S.Y.* On the criticality of the FQ-type in the system of coupled maps with period-doubling // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2004. Vol. 7, № 1. P. 69.

*Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники РАН  
Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 3.02.2006  
После доработки 26.04.2006*

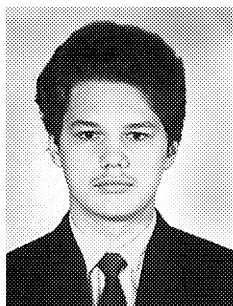
## CRITICAL BEHAVIOR OF ASYMMETRICALLY COUPLED NOISY DRIVEN NONIDENTICAL SYSTEMS WITH PERIOD-DOUBLINGS

*A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, A.V. Savin, I.R. Sataev*

We investigated the influence of external noise on the critical behavior typical to nonidentical coupled systems with period-doubling. We obtained the numerical value of the scaling factor for noise amplitude by means of the renormalization group analysis. Also we demonstrated the self-similar structure of the parameter plane near the critical point in the model system of two noisy driven coupled logistic maps.



*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: [alkuz@sgu.ru](mailto:alkuz@sgu.ru); [www.sgtd.tserv.ru](http://www.sgtd.tserv.ru)



*Савин Алексей Владимирович* – родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ, младший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в центральных и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения в связанных нелинейных системах.