



**ОСОБЕННОСТИ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ И ПЕРЕХОДЫ  
К ХАОТИЧЕСКИМ РЕЖИМАМ В МОДЕЛИ ДВУХ  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СИСТЕМ  
С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

*В.П. Пономаренко*

Обсуждаются динамические состояния и нелинейные явления в модели двух взаимодействующих систем с фазовым управлением в случае, когда обе системы индивидуально демонстрируют как регулярные, так и хаотические режимы поведения. Основное внимание уделено анализу устойчивости синхронного режима, процессов возбуждения и развития несинхронных режимов, бифуркаций перехода к хаотическому поведению. Результаты представлены в виде однопараметрических бифуркационных диаграмм и фазовых портретов аттракторов исследуемой модели.

1. Изучение коллективного поведения ансамблей взаимосвязанных автогенераторных систем, имеющих локальные цепи управления частотой или фазой генерируемых колебаний, составляет одно из важных направлений работ в области сложной динамики взаимодействующих активных элементов. Привлекательными свойствами таких систем являются их способность демонстрировать большое разнообразие динамических состояний и бифуркационных переходов и возможность обеспечить эффективное воздействие на характеристики формируемых колебаний с помощью изменения параметров цепей управления и связей. По этой причине эти системы являются интересными объектами для исследования закономерностей нелинейной динамики, демонстрируемых многоэлементными автоколебательными системами. Поведение взаимосвязанных систем с фазовым и частотным управлением в целом определяется как количеством парциальных систем и их собственной индивидуальной динамикой, которая зависит от структуры и параметров цепей управления, так и типом и параметрами связей. Таким образом, исследование поведения разнообразных структурных реализаций систем и выяснение роли связей и цепей управления в развитии динамических процессов является важной задачей нелинейной динамики.

Данная работа продолжает исследования [1, 2] динамических моделей двух взаимодействующих систем с фазовым управлением. Интерес к свойствам поведения систем с такой структурой обусловлен, прежде всего, тем, что они составляют основу следящих измерителей параметров сложных радиосигналов, которые

активно используются в современных коммуникационных технологиях самого различного назначения [3-8]. С другой стороны, исследование динамических режимов и эффектов коллективной динамики в этих системах представляет также и общефизический интерес, так как системы, во-первых, построены на широко известных принципах фазовой синхронизации генераторов с использованием цепей автоматического управления, а во-вторых, могут демонстрировать интересные нелинейные явления (мультистабильность, сложнопериодические режимы колебаний, переходы к хаосу по различным сценариям, процессы дехаотизации). В настоящее время изучению хаотических режимов в различных системах с фазовым управлением уделяется большое внимание, что связано с перспективами создания на их основе источников хаотических сигналов с управляемыми характеристиками [9-11].

Объектом исследования в данной работе являются, как и в [1, 2], связанные системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) и автоподстройки задержки во времени (АПЗ), взаимодействующие через взаимные перекрестные обратные связи и однонаправленную связь по цепям управления, через которую сигнал о фазовом рассогласовании, образующийся в системе ФАПЧ, передается в цепь управления системы АПЗ. Следящая оценка (воспроизведение) параметров входного фазоманипулированного сигнала – фазового угла  $\vartheta(t)$  и задержки  $T(t)$  – выполняется здесь путем измерения рассогласований фаз и задержек входного и опорного (синтезируемого подсистемами ФАПЧ и АПЗ) сигналов и коррекции фазы  $\vartheta^*(t)$  и задержки  $T^*(t)$  опорного сигнала в сторону уменьшения выявленных рассогласований  $\varphi = \vartheta(t) - \vartheta^*(t)$  и  $\eta = T(t) - T^*(t)$ . Если в результате этих процессов достигается стационарное состояние, в котором параметры  $\vartheta^*$  и  $T^*$  минимально отличаются от параметров  $\vartheta$  и  $T$ , и это состояние поддерживается при изменении  $\vartheta$  и  $T$ , тогда говорят о наступлении в связанных системах ФАПЧ и АПЗ режима синхронного слежения за параметрами  $\vartheta$  и  $T$ . Кроме режима слежения, здесь возможны стационарные состояния с непостоянными величинами рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$ , называемые несинхронными режимами. Бифуркации, в результате которых появляются несинхронные режимы, определяют границы области захвата в режим слежения. Цепи управления с фильтрами низких частот (ФНЧ) создают широкие возможности для возбуждения разнообразных несинхронных режимов, которые являются нежелательными для обеспечения следящей оценки параметров  $\vartheta$  и  $T$ , но оказываются основными рабочими процессами в задачах формирования сложных регулярных и хаотических колебаний. Важно, что, варьируя параметры цепей управления, можно эффективно воздействовать на свойства и области существования генерируемых колебаний.

Уравнения динамики рассматриваемой системы, записанные в операторной форме ( $p \equiv d/dt$ ) для рассогласований  $\varphi$  и  $x$ , ( $x = \eta/\tau_0$ ,  $\tau_0$  – длительность одного элемента модулирующего псевдослучайного сигнала), имеют вид [12]

$$p\varphi/k = \gamma - F_1(p)\Phi_1(\varphi, x), \quad x = \sigma - bF_2(p)(\Phi_2(\varphi, x) + ab^{-1}\Phi_1(\varphi, x)), \quad (1)$$

где  $\gamma$  и  $\sigma$  – начальные расстройки частот и задержек;  $k$  и  $b$  – коэффициенты усиления цепей управления подсистем ФАПЧ и АПЗ;  $a$  – степень связи через управляющие сигналы;  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  – коэффициенты передачи ФНЧ в цепях управления, определяемые динамикой изменения параметров  $\vartheta$  и  $T$ ;  $\Phi_1(\varphi, x) = R(x) \sin \varphi$ ,  $\Phi_2(\varphi, x) = D(x) \cos \varphi$ , где  $R(x)$  и  $D(x)$  – нелинейности, определяемые зависи-

$$R(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad D(x) = \begin{cases} -2-x, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

В самом простом случае фильтров первого порядка, когда  $F_1(p) = 1$ ,  $F_2(p) = 1/(1 + T_x p)$ , где  $T_x$  – постоянная времени, систему уравнений (1) можно записать в виде

$$d\varphi/d\tau = \gamma - \Phi_1(\varphi, x), \quad dx/d\tau = (\sigma - x - b\Phi_2(\varphi, x) - \alpha\Phi_1(\varphi, x))/\varepsilon_0, \quad (2)$$

где  $\tau = kt$ ,  $\varepsilon_0 = kT_x$ . Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $U_0 = (\varphi(\text{mod}2\pi), x)$ , она описывает поведение связанных систем ФАПЧ и АПЗ, которые характеризуются наиболее простой регулярной индивидуальной динамикой. Поведение системы (2) характеризуют фазовые портреты на развертке фазового цилиндра  $U_0$  на часть плоскости  $(\varphi, x)$  в полосе  $-\pi < \varphi < \pi$ , приведенные на рис. 1 [12]. Из них следует, что соответствующая система перекрестно связанных ФАПЧ и АПЗ демонстрирует динамику, качественно подобную хорошо известной динамике отдельной системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром в цепи управления ( $F_1(p) = (1 + mT_1 p)/(1 + T_1 p)$ ,  $T_1$  – постоянная времени,  $0 < m < 1$ ) [13, 14]. Система имеет два стационарных режима. Один из этих режимов – это режим слежения за параметрами  $\vartheta$  и  $T$ , которому на фазовом цилиндре

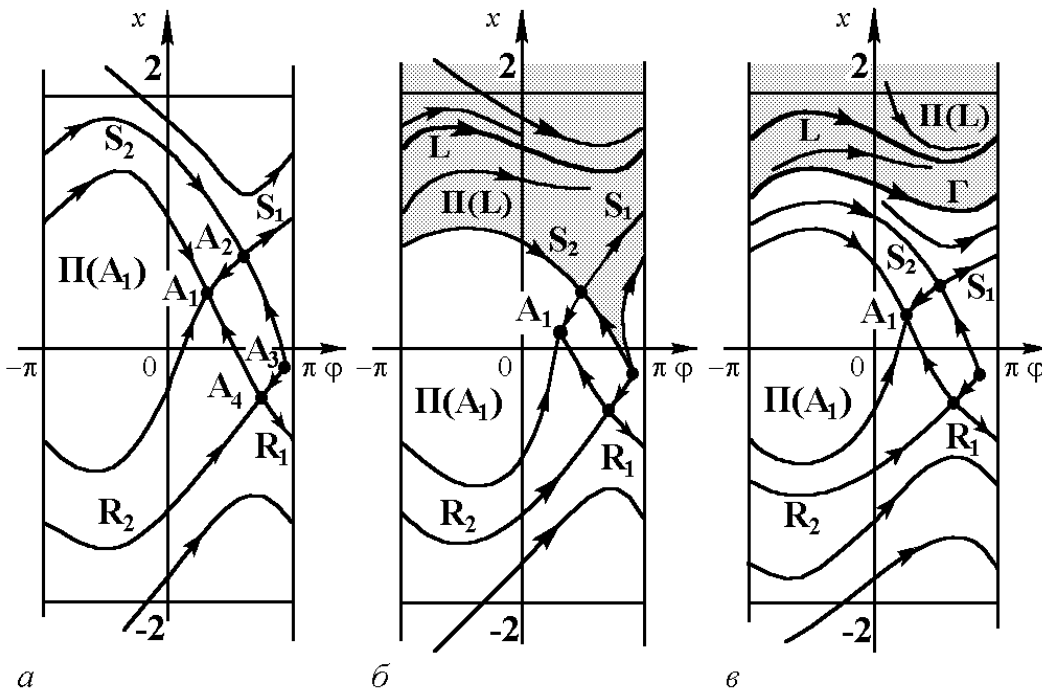


Рис. 1. Фазовые портреты системы (2)

$U_0$  отвечает состояние равновесия  $A_1(\varphi_1, x_1)$  системы (2) с координатами  $\varphi_1$  и  $x_1$ , определяемыми из уравнений

$$\gamma - (1 - x \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma)) \sin \varphi = 0, \quad \sigma - \alpha\gamma - (1 + b \cos \varphi)x = 0. \quad (3)$$

Область существования (удержания) режима слежения определяется значениями параметров  $\gamma, b, \sigma, \alpha$  из области  $C_0, C_0 = \{\sigma_1(\gamma, b, \alpha) < \sigma < \sigma_2(\gamma, b, \alpha), 0 \leq \gamma < 1\}$ , где

$$\begin{aligned} \sigma_1(\gamma, b, \alpha) &= \alpha\gamma - \sigma_0(\gamma, b), & \sigma_2(\gamma, b, \alpha) &= \alpha\gamma + \sigma_0(\gamma, b), \\ \sigma_0(\gamma, b) &= (1 + b \cos \varphi_0(\gamma, b))(\sin \varphi_0(\gamma, b) - \gamma) / \sin \varphi_0(\gamma, b), \end{aligned} \quad (4)$$

а  $\varphi_0(\gamma, b)$  – минимальный корень уравнения  $b(\gamma - \sin^3 \varphi) + \gamma \cos \varphi = 0$ . Фазовый портрет системы (2), приведенный на рис. 1, а, соответствует области значений параметров  $C_s (C_s \subset C_0)$ , при которых режим слежения наступает независимо от начальных условий. Границы области  $C_s$  в пространстве параметров  $(\gamma, \sigma, b, \alpha, \varepsilon_0)$  определяются бифуркациями образования на фазовом цилиндре  $U_0$  петли сепаратрис седла  $A_1(\varphi_2, x_2)$  второго рода (координаты  $\varphi_2$  и  $x_2$  определяются из уравнений (3)) и двойного вращательного предельного цикла.

Другой из возможных режимов системы – это асинхронный режим, определяемый устойчивым вращательным предельным циклом  $L$  на фазовом цилиндре  $U_0$  с неограниченным изменением  $\varphi$  (рис. 1, б, в), который возникает при выходе с изменением параметров из области  $C_s$ . При значениях параметров из области  $C_p (C_p = C_0 \setminus C_s)$ , соответствующих одновременному существованию на фазовом цилиндре  $U_0$  состояния равновесия  $A_1$  и предельного цикла  $L$ , система (2) является бистабильной. Области притяжения  $\Pi(A_1)$  режима слежения и  $\Pi(L)$  асинхронного режима определяются сепаратрисами седла  $A_2$  (рис. 1, б) или неустойчивым предельным циклом  $\Gamma$  (рис.1, в). Какой из этих режимов установится при этом в системе – это зависит от начальных условий. При значениях параметров вне области  $C_0$  в системе реализуется асинхронный режим цикла  $L$  независимо от начальных условий.

В работах [1, 2] исследованы динамические режимы в моделях с двумя степенями свободы, описывающих систему взаимодействующих ФАПЧ и АПЗ в следующих случаях: 1) когда коэффициенты передачи  $F_1(p) = (1 + mT_1p)/(1 + T_1p)$  и  $F_2(p) = 1/(1 + (T_2 + T_3)p + T_2T_3p^2)$  (здесь  $T_2$  и  $T_3$  – постоянные времени), то одиночные системы ФАПЧ и АПЗ демонстрируют регулярную индивидуальную динамику [1]; 2) когда же  $F_1(p) = 1/(1 + (T_1 + T_2)p + T_1T_2p^2)$  и  $F_2(p) = 1/(1 + T_3p)$ , то индивидуальная динамика одиночной системы ФАПЧ характеризуется существованием как регулярных, так и хаотических несинхронных режимов, а в автономной системе АПЗ реализуются только регулярные режимы [2]. Выявлена возможность существования в системе в этих случаях сложных периодических и хаотических несинхронных режимов и явлений сложной динамики. В данной работе рассматриваются особенности динамики связанных систем ФАПЧ и АПЗ в случае, когда обе системы автономно демонстрируют как регулярные, так и хаотические режимы поведения. Простейшими ФНЧ, при которых такой случай реализуется, являются фильтр второго порядка в цепи управления системы ФАПЧ ( $F_1(p) = 1/(1 + (T_1 + T_2)p + T_1T_2p^2)$ ) и фильтр третьего порядка в цепи управления системы АПЗ ( $F_2(p) = 1/(1 + (T_3 + T_4 + T_5)p + (T_3T_4 + T_3T_5 + T_4T_5)p^2 + T_3T_4T_5p^3)$ ),  $T_4$  и  $T_5$  – постоянные времени). С другой стороны, такие фильтры интересны еще

и тем, что они соответствуют сложным моделям динамики параметров  $\vartheta$  и  $T$ , используемым в ряде прикладных задач [4, 5].

Поведение рассматриваемой системы описывается следующей динамической системой, полученной из уравнений (1):

$$\begin{aligned}
d\varphi/d\tau &= y, \\
dy/d\tau &= z, \\
\varepsilon_1\varepsilon_2 dz/d\tau &= \gamma - \Phi_1(\varphi, x) - y - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z, \\
dx/d\tau &= v, \\
dv/d\tau &= w, \\
\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5 dw/d\tau &= \sigma - x - b\Phi_2(\varphi, x) - \alpha\Phi_1(\varphi, x) - \\
&\quad - (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)v - (\varepsilon_3\varepsilon_4 + \varepsilon_3\varepsilon_5 + \varepsilon_4\varepsilon_5)w,
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $\varepsilon_i = k_1 T_i$  – параметры инерционности,  $i = \overline{1, 5}$ . Система (5) является динамической системой с шестимерным цилиндрическим фазовым пространством  $U = (\varphi(\text{mod}2\pi), y, z, x, v, w)$  и девятимерным пространством параметров  $\Lambda = \{\gamma, \sigma, b, \alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$ . Ее исследование проведено путем численного моделирования на основе методов качественной теории и теории бифуркаций нелинейных динамических систем с использованием программного комплекса «Динамика нелинейных систем», задачи и структура которого изложены в [15, 16].

**2.** Обсудим устойчивость режима слежения и несинхронные режимы, возникающие при нарушении условий устойчивости. Система (5) при значениях параметров  $(\gamma, b, \sigma, \alpha) \in C_0$  имеет два  $A_1(\varphi_1, 0, 0, x_1, 0, 0)$  и  $A_2(\varphi_2, 0, 0, x_2, 0, 0)$  или четыре  $A_1(\varphi_1, 0, 0, x_1, 0, 0)$ ,  $A_2(\varphi_2, 0, 0, x_2, 0, 0)$ ,  $A_3(\varphi_3, 0, 0, x_3, 0, 0)$  и  $A_4(\varphi_4, 0, 0, x_4, 0, 0)$  состояния равновесия, расположенные в области  $-1 < x < 1$  фазового пространства  $U$ , координаты  $\varphi_j$  и  $x_j (j = \overline{1, 4})$  находятся из уравнений (3). Состояние равновесия  $A_1$  может быть как устойчивым, так и неустойчивым, остальные состояния равновесия – неустойчивые седлового типа. Условия устойчивости состояния равновесия  $A_1$  определяем из анализа корней характеристического уравнения

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0, \tag{6}$$

в котором

$$\begin{aligned}
a_1 &= E_2/E_1 + E_5/E_3, \\
a_2 &= 1/E_1 + E_2E_5/(E_1E_3) + E_4/E_3, \\
a_3 &= E_5/(E_1E_3) + E_2E_4/(E_1E_3) + \Phi'_{1\varphi}(\varphi_1, x_1)/E_1 + (b\Phi'_{2x}(\varphi_1, x_1) + \\
&\quad + \alpha\Phi'_{1x}(\varphi_1, x_1) + 1)/E_3, \\
a_4 &= (E_4 + E_5)/(E_1E_3) + E_2(b\Phi'_{2x}(\varphi_1, x_1) + \alpha\Phi'_{1x}(\varphi_1, x_1) + 1)/(E_1E_3), \\
a_5 &= E_4/(E_1E_3) + (b\Phi'_{2x}(\varphi_1, x_1) + \alpha\Phi'_{1x}(\varphi_1, x_1) + 1)/(E_1E_3), \\
a_6 &= (\Phi'_{1\varphi}(\varphi_1, x_1) + b(\Phi'_{1\varphi}(\varphi_1, x_1)\Phi'_{2x}(\varphi_1, x_1) - \Phi'_{1x}(\varphi_1, x_1)\Phi'_{2\varphi}(\varphi_1, x_1)))/(E_1E_3), \\
E_1 &= \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad E_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad E_3 = \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5, \quad E_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5, \quad E_5 = \varepsilon_3\varepsilon_4 + \varepsilon_3\varepsilon_5 + \varepsilon_4\varepsilon_5.
\end{aligned}$$

Применяя к уравнению (6) критерий Рауса – Гурвица, получаем, что состояние рав-

новесия  $A_1$  устойчиво при значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_6 > 0, \quad a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1(a_1a_4 - a_5) > 0, \\ (a_1a_2 - a_3)[a_5(a_4a_3 - a_2a_5) + a_6(2a_1a_5 - a_3^2)] + \\ + (a_1a_4 - a_5)[a_1a_3a_6 - a_5(a_1a_4 - a_5)] - a_1^3a_6^2 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

При выполнении условий (7) существует режим слежения, соответствующий состоянию равновесия  $A_1$ . Величины  $\varphi_1$  и  $x_1$  характеризуют точность оценки параметров входного сигнала. Условия (7) определяют в пространстве параметров  $\Lambda$  область  $C_1$  удержания состояния слежения.

Анализ поведения системы (5) вблизи границ области  $C_1$  показывает, что при переходе через эти границы с нарушением условий (7) реализуются, в зависимости от знака первой ляпуновской величины  $L_0$ , следующие два варианта поведения системы. При  $L_0 < 0$  в фазовом пространстве  $U$  в результате бифуркации Андронова – Хопфа происходит мягкое рождение устойчивого предельного цикла колебательного типа, содержащего внутри себя ставшее неустойчивым состояние равновесия  $A_1$ . При  $L_0 > 0$  в фазовом пространстве  $U$  наблюдается стягивание седлового колебательного предельного цикла к остающемуся устойчивым состоянию равновесия  $A_1$ , а затем – потеря устойчивости  $A_1$  и жесткий переход к устойчивому предельному циклу. В этом случае устойчивый и седловой предельные циклы возникают в результате седло-узловой бифуркации. Устойчивому колебательному предельному циклу соответствует квазисинхронный режим периодических колебаний фазовых переменных относительно состояния равновесия  $A_1$ . Таким образом, при пересечении границ области  $C_1$  режим слежения мягко или жестким образом сменяется режимом периодической автомодуляции.

Существование седло-узловых бифуркаций колебательных предельных циклов системы (5), в том числе и многооборотных, установлено также и вне области устойчивости  $C_1$ . Следствием таких бифуркаций являются жесткие переходы между различными колебательными предельными циклами при изменении параметров. При этом скачкообразно изменяются амплитуда и частота автомодуляции. Примечательно, что границы, отвечающие седло-узловым бифуркациям, выделяют

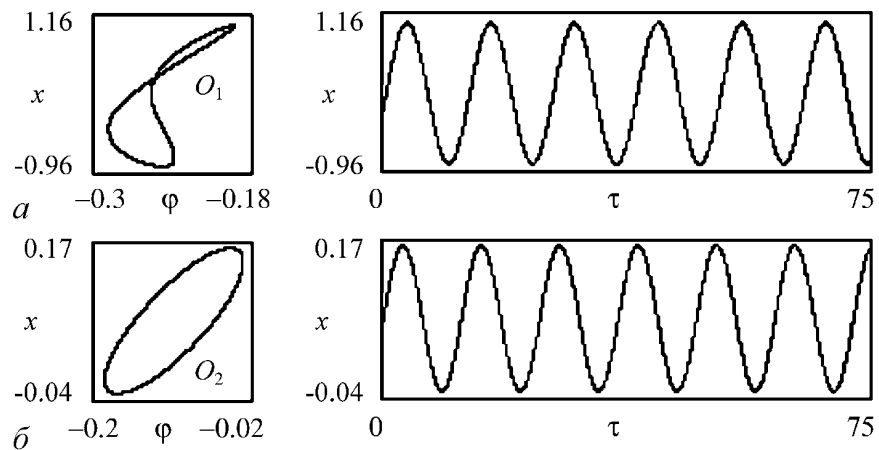


Рис. 2. Проекция фазовых портретов и реализации колебаний, соответствующие периодическим квазисинхронным режимам

в пространстве параметров  $\Lambda$ , в частности, области с двумя одновременно существующими устойчивыми колебательными предельными циклами. Какой из режимов периодической автомодуляции реализуется для этих областей параметров – это зависит от начальных условий. Этот эффект иллюстрирует рис. 2, на котором приведены  $(\varphi, x)$ -проекции фазовых портретов и зависимости  $x(\tau)$  при значениях параметров  $\alpha = 2, \sigma = 0.5, \gamma = -0.1, b = 10, \varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 1.65, \varepsilon_3 = 2, \varepsilon_4 = 5, \varepsilon_5 = 5$ , соответствующие одновременно существующим предельным циклам  $O_1$  и  $O_2$ . Обращает на себя внимание значительное различие амплитуд колебаний, соответствующих этим циклам.

3. Рассмотрим особенности поведения квазисинхронных режимов при изменении параметров, выявленные в результате численного исследования системы (5). На рис. 3, *a* приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $\{\varepsilon_2, w\}$  точеч-

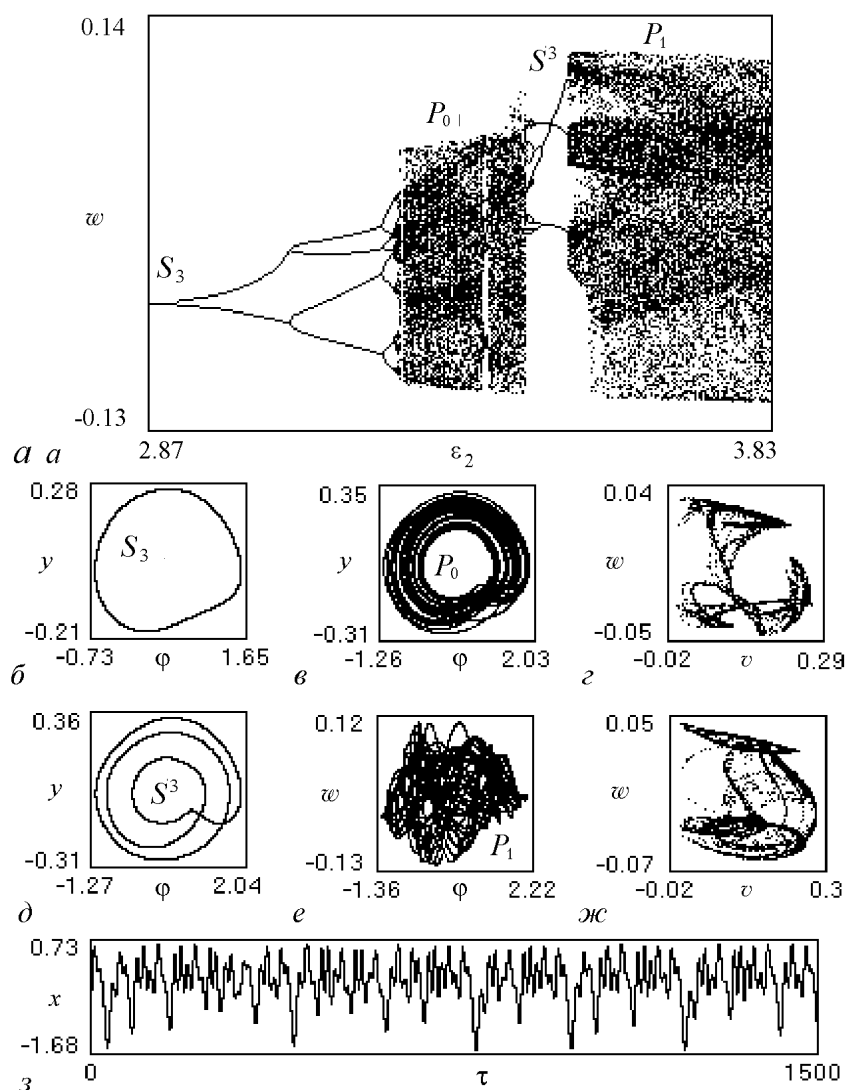


Рис. 3. Эволюция квазисинхронного режима при изменении  $\varepsilon_2$  (*a*), фазовые портреты (*б-ж*) и реализация колебаний (*з*) при значениях  $\varepsilon_2 = 2.87$  (*б*), 3.13 (*в, г*), 3.17 (*д*), 3.33 (*е, ж, з*)

ного отображения Пуанкаре, построенная при значениях параметров  $\alpha = 2$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 10$ ,  $\varepsilon_3 = 2$ ,  $\varepsilon_4 = 5$ ,  $\varepsilon_5 = 5$ ,  $\varepsilon_2$  изменяется от 2.87 до 3.33. На рис. 3, б, в, д, е даны проекции фазовых портретов, на рис. 3, з, ж – отображения Пуанкаре, а на рис. 3, з – временная реализация  $x(\tau)$ , соответствующие аттракторам системы (5). Диаграмма  $\{\varepsilon_2, w\}$  характеризует развитие неустойчивости режима колебательного предельного цикла  $S_0$  (б) в результате суперкритической бифуркации удвоения периода и переход к режиму колебательного хаотического аттрактора  $P_0$  (в, з), то есть переход от периодической автомодуляции к хаотической, через последовательность бифуркаций удвоения периода с увеличением  $\varepsilon_2$ . Видно, что в области хаоса наблюдается окно периодичности, соответствующее многооборотным предельным циклам системы (5), отвечающим режимам сложнопериодической автомодуляции; примером одного из таких циклов является трехоборотный цикл  $S_3$  (д). С увеличением  $\varepsilon_2$  режим цикла  $S_3$  жестко сменяется режимом хаотического аттрактора  $P_1$  (е, ж, з).

На рис. 4 представлены проекции фазовых портретов (а, б), отображения Пуанкаре (в) и зависимости  $x(\tau)$  (з-е), соответствующие аттракторам системы (5) при значениях  $\alpha = 35$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\gamma = 0.075$ ,  $\varepsilon_1 = 2$ ,  $\varepsilon_3 = 3$ ,  $\varepsilon_4 = 4$ ,  $\varepsilon_5 = 5$  для серии значений  $\varepsilon_2$ . Рисунок иллюстрирует переход с увеличением  $\varepsilon_2$  от периодического квазисинхронного режима предельного цикла  $S_4$  (а) к хаотическому квазисинхронному режиму через перемежаемость. Механизм перехода выглядит следующим образом. С превышением параметром  $\varepsilon_2$  значения 1.057 предельный

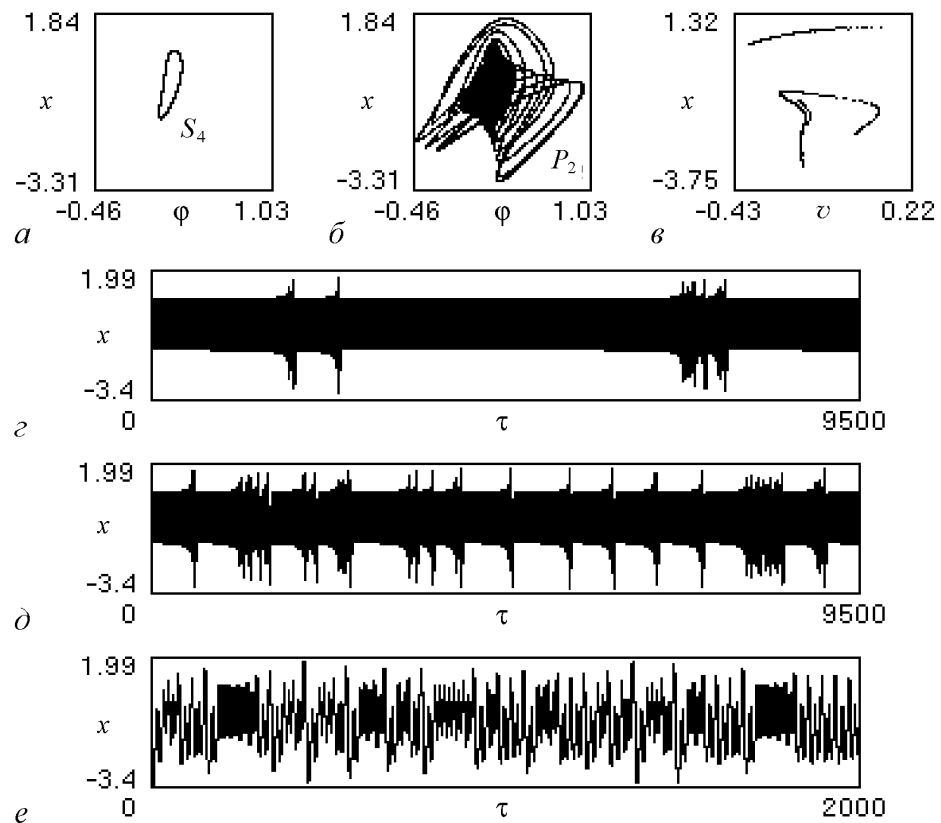


Рис. 4. Переход от режима предельного цикла  $S_4$  к хаотическому квазисинхронному режиму:  $\varepsilon_2 = 1.0$  (а), 1.057 (б, в, з), 1.08 (д), 1.4 (е)



цикл  $S_4$  испытывает субкритическую бифуркацию удвоения периода [17, 18], при которой происходит слияние цикла  $S_4$  с седловым предельным циклом удвоенного периода  $\Gamma_2$ . В результате этой бифуркации фазовые траектории медленно уходят от ставшего неустойчивым цикла  $S_4$ , затем возвращаются в его окрестность, и далее этот процесс повторяется. Другими словами, одновременно с бифуркацией удвоения появляется перемежаемость – чередование длинной регулярной стадии колебательного процесса, в течение которой наблюдается рост амплитуды субгармоники, с относительно короткими нерегулярными всплесками. Через перемежаемость в фазовом пространстве возникает хаотический аттрактор  $P_2$  ( $\delta$ - $\varepsilon$ ). С увеличением  $\varepsilon_2$  длительность регулярной стадии движения в окрестности неустойчивого предельного цикла  $S_4$  уменьшается, а частота и длительность нерегулярных движений возрастает ( $\varepsilon$ - $e$ ). Отметим, что режим хаотического аттрактора  $P_2$  занимает широкую область по параметру  $\varepsilon_2$ .

Переход к хаотическим квазисинхронным режимам через бифуркации удвоения периода реализуется также на базе многооборотных предельных циклов системы (5). На рис. 5 приведены бифуркационная диаграмма  $\{\varepsilon_2, x\}$  (а) и  $(\varphi, v)$ -проекции фазовых портретов аттракторов системы (5) ( $\delta$ - $\varepsilon$ ) при значениях  $\alpha = 45$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\gamma = 0.07$ ,  $\varepsilon_1 = 2$ ,  $\varepsilon_3 = 3$ ,  $\varepsilon_4 = 4$ ,  $\varepsilon_5 = 5$ . Рисунок иллюстрирует динамику развития режима трехоборотного цикла  $S^3$  (б) при изменении параметра  $\varepsilon_2$  от 0.8 до 4.3. Видно, что вначале наблюдается переход к режиму хаотического аттрактора  $P_3$  (в) через бифуркации удвоения периода с последующей дехаотизацией через обратные бифуркации удвоения периода и возвращением к режиму цикла  $S^3$ .

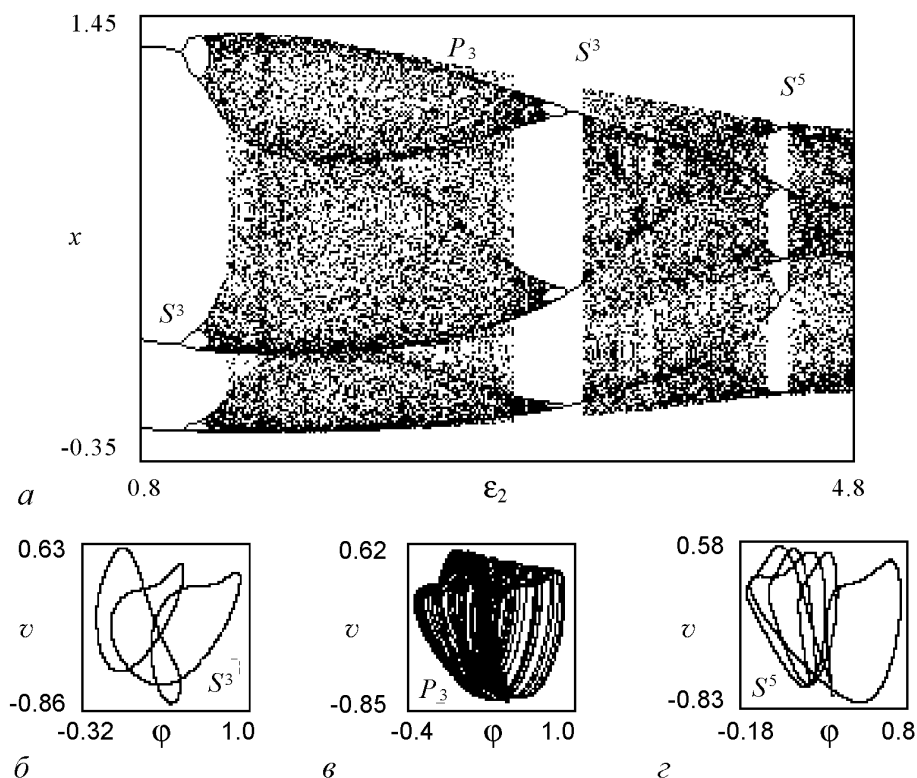


Рис. 5. Эволюция квазисинхронного режима цикла  $S^3$  при изменении  $\varepsilon_2$  (а) и фазовые портреты аттракторов системы (5) (б, в, з) при значениях  $\varepsilon_2 = 0.8$  (б), 2.5 (в), 3.97 (з)

Далее от режима цикла  $S^3$  система вновь переходит к режиму хаотического аттрактора  $P_3$ , который затем мягко сменяется режимом пятиоборотного предельного цикла  $S^5$  ( $z$ ) через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения периода. С увеличением  $\varepsilon_2$  колебания на цикле  $S^5$  через перемежаемость преобразуются в хаотические колебания, которые поддерживаются в системе до значения  $\varepsilon_2 = 5.98$ . При  $\varepsilon_2 > 5.98$  наблюдается процесс дехаотизации через обратные бифуркации удвоения периода с переходом к режиму однооборотного предельного цикла  $S^1$ . Таким образом, бифуркационная диаграмма на рис. 5, *a* характеризует квазисинхронные режимы, через которые переходит система от режима цикла  $S^3$  к режиму цикла  $S^1$ .

В результате численного исследования системы (5) выяснено, что развитие неустойчивости периодического квазисинхронного режима происходит также и в результате бифуркации рождения двумерного тора из колебательного предельно-

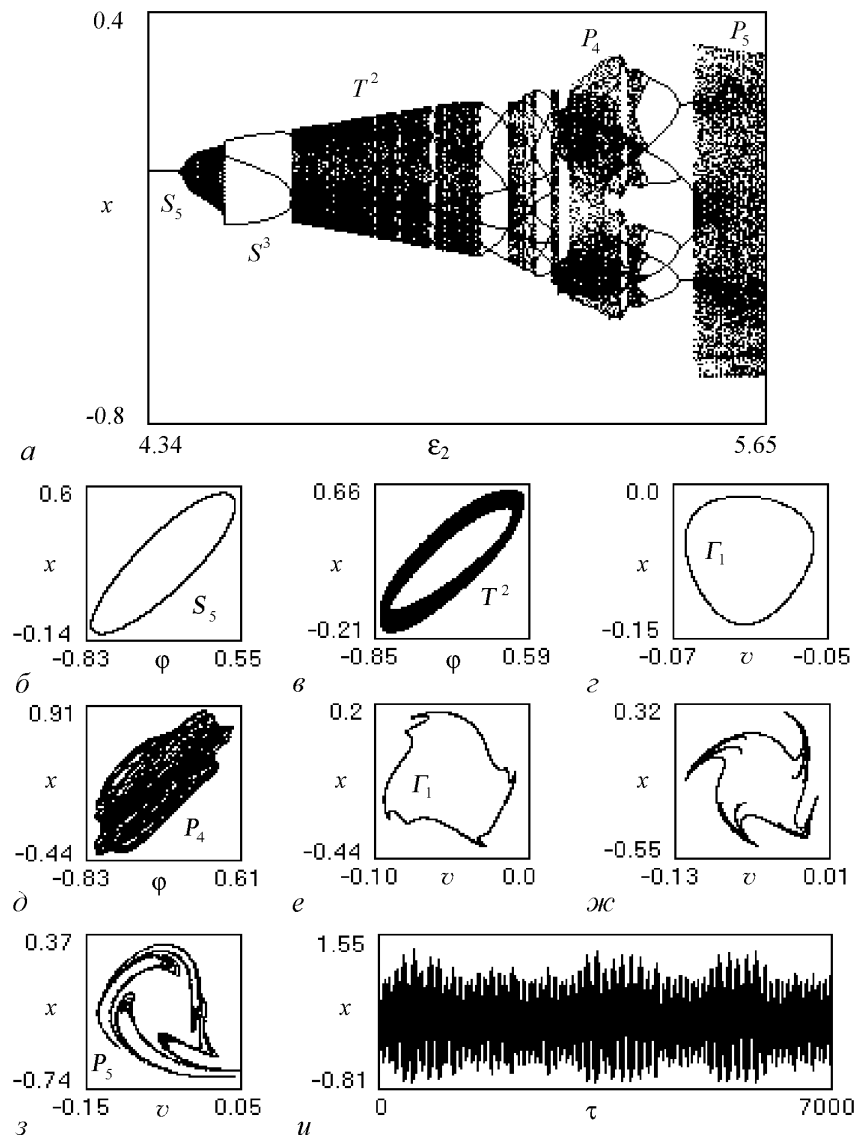


Рис. 6. Диаграмма развития квазисинхронных режимов на базе предельного цикла  $S_5$  при изменении  $\varepsilon_2$  (*a*), проекции фазовых портретов и сечений Пуанкаре аттракторов системы (5) (*б-з*) и реализация колебаний (*u*) при значениях  $\varepsilon_2 = 4.35$  (*б*), 4.45 (*в, з*), 5.2 (*д, е*), 5.3 (*ж*), 5.55 (*з, u*)

го цикла, когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла пересекает единичную окружность. Возникновению такого тора в фазовом пространстве  $U$  соответствует превращение периодической автомодуляции в квазипериодическую. На рис. 6 приведены: однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $\{\varepsilon_2, x\}$ , построенная при значениях  $\alpha = 13$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\gamma = -0.15$ ,  $\varepsilon_1 = 2$ ,  $\varepsilon_3 = 20$ ,  $\varepsilon_4 = 5$ ,  $\varepsilon_5 = 5$ ,  $\varepsilon_2 \in [4.34; 5.65]$  (а), проекции фазовых портретов (б, в, д) и отображения Пуанкаре (з, е-з), а также зависимость  $x(\tau)$  (и), соответствующие аттракторам системы (5). Стартовым состоянием системы при  $\varepsilon_2 = 4.34$  является режим колебательного предельного цикла  $S_5$  (б). С увеличением  $\varepsilon_2$  цикл  $S_5$  теряет устойчивость и происходит рождение двумерного тора  $T^2$ , которому в отображении Пуанкаре соответствует замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma_1$  (в, з). Далее наблюдается окно трехоборотного предельного цикла  $S^3$ , после которого происходит возвращение системы к режиму тора  $T^2$ . При дальнейшем увеличении  $\varepsilon_2$  режим тора  $T^2$  прерывается периодическими режимами многооборотных предельных циклов. Начиная со значения  $\varepsilon_2 = 5.196$ , наблюдается искажение формы замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma_1$  (е), что свидетельствует о постепенном вырождении тора  $T^2$  в хаотический аттрактор типа тор-хаос (ж-и). С увеличением  $\varepsilon_2$  имеет место чередование хаотических и сложнопериодических квазисинхронных режимов. Переходы между этими режимами реализуются как через прямые и обратные бифуркации удвоения периода, так и жестким образом через перемежаемость.

Бифуркационная диаграмма  $\{\varepsilon_2, v\}$ , представленная на рис. 7, иллюстрирует другой сценарий развития режима квазипериодической автомодуляции при увеличении параметра  $\varepsilon_2$ , который имеет место при значениях параметров  $\alpha = 6$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\gamma = 0.22$ ,  $\varepsilon_1 = 11.8$ ,  $\varepsilon_3 = 20$ ,  $\varepsilon_4 = 5$ ,  $\varepsilon_5 = 5$ ,  $\varepsilon_2 = [1.25; 2.45]$ . Процесс эволюции режима тора  $T^2$  (см. рис. 6, в, з) в этом случае характеризуется чередованием режимов тора  $T^2$  и хаотических режимов с режимами многооборотных предельных циклов, число оборотов на которых последовательно уменьшается на единицу от одиннадцати до шести. Видно, что внутри окна десятиоборотного цикла наблюдаются бифуркации удвоения периода с переходом к хаосу и бифуркации, обратные удвоениям, с возвращением от хаотического режима к режиму десятиоборотного цикла. Выход из области «убавления периода» с увеличением  $\varepsilon_2$  сопровождается сменой режима периодической автомодуляции на шестиоборотном предельном цикле хаотическим автомодуляционным режимом.

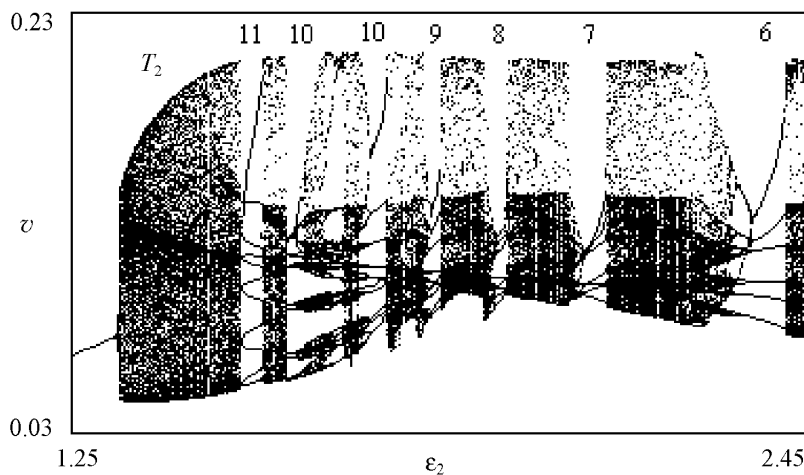


Рис. 7. Эволюция квазисинхронного режима тора  $T^2$  при увеличении  $\varepsilon_2$

Численное исследование системы (5) обнаруживает возможность реализации перехода к хаотическим квазисинхронным режимам через бифуркации удвоения двумерного тора. Это явление иллюстрируют  $(\varphi, v)$ -проекции отображения Пуанкаре и зависимости  $v(\tau)$  и  $v(n)$  ( $n$  – номер точки пересечения фазовой траектории аттрактора с секущей Пуанкаре), соответствующие аттракторам системы при значениях  $\alpha = 2$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\varepsilon_1 = 2$ ,  $\varepsilon_3 = 2$ ,  $\varepsilon_4 = 5$ ,  $\varepsilon_5 = 5$ , приведенные на рис. 8 для серии значений параметра  $\varepsilon_2$ . Начальным состоянием системы при  $\varepsilon_2 = 2.16$  является квазисинхронный режим, соответствующий тору  $T^2$  (а). Увеличение  $\varepsilon_2$  приводит к бифуркациям удвоения периода замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma_1$  (б, в), адекватным бифуркациям удвоения тора  $T^2$ , завершающимся рождением хаотического аттрактора  $P_6$  (г).

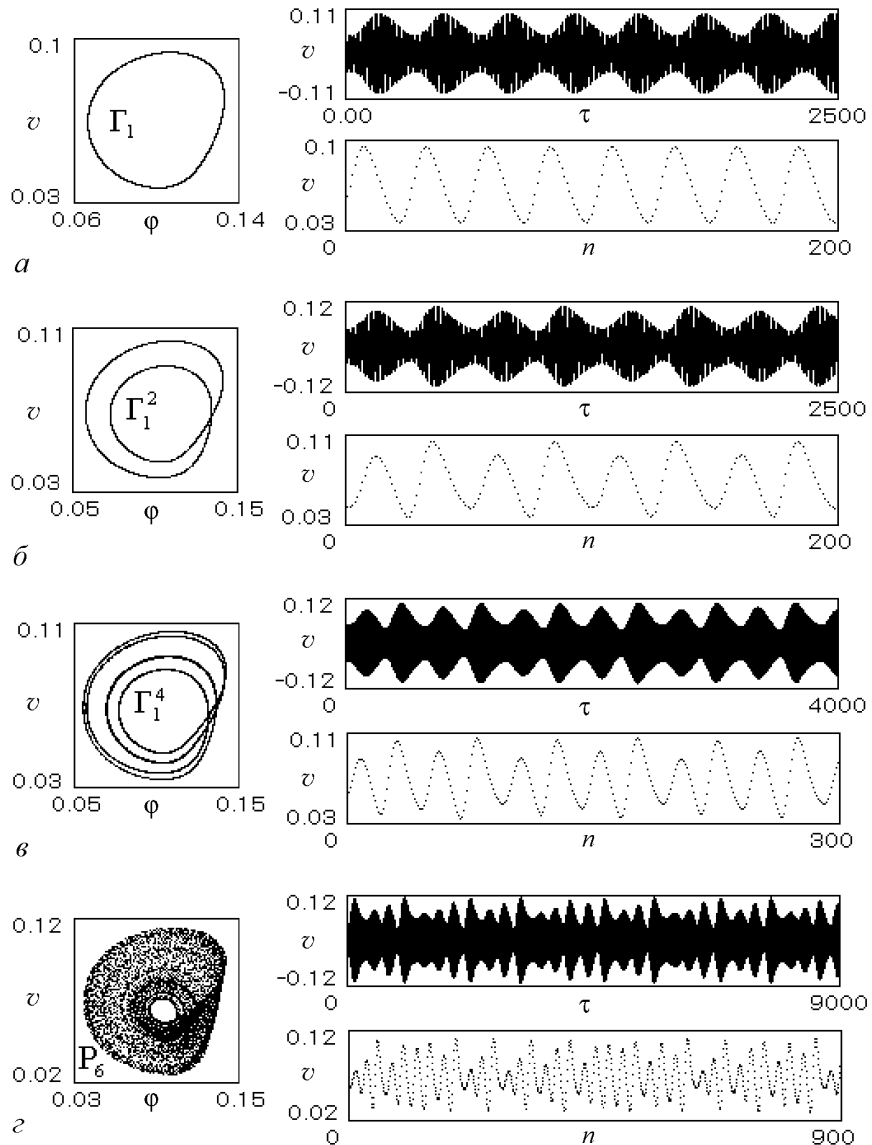


Рис. 8. Переход к хаотическим квазисинхронным режимам через бифуркации удвоения двумерного тора при изменении  $\varepsilon_2$ :  $\varepsilon_2 = 2.16$  (а), 2.17 (б), 2.176 (в), 2.19 (г)

Интересное поведение системы имеет место при дальнейшем увеличении параметра  $\varepsilon_2$ . Вначале наблюдается чередование хаотических режимов с режимами сложных двумерных торов, которым соответствуют многооборотные замкнутые инвариантные кривые отображения Пуанкаре, затем в системе вновь устанавливается режим тора  $T^2$ . Далее на базе этого тора возникает трехмерный тор  $T^3$ . Соответствующие этому тору  $(\varphi, v)$ -проекция отображения Пуанкаре и зависимости  $v(\tau)$  и  $v(n)$  даны на рис. 9, а. Затем снова происходит чередование режимов сложных дву-

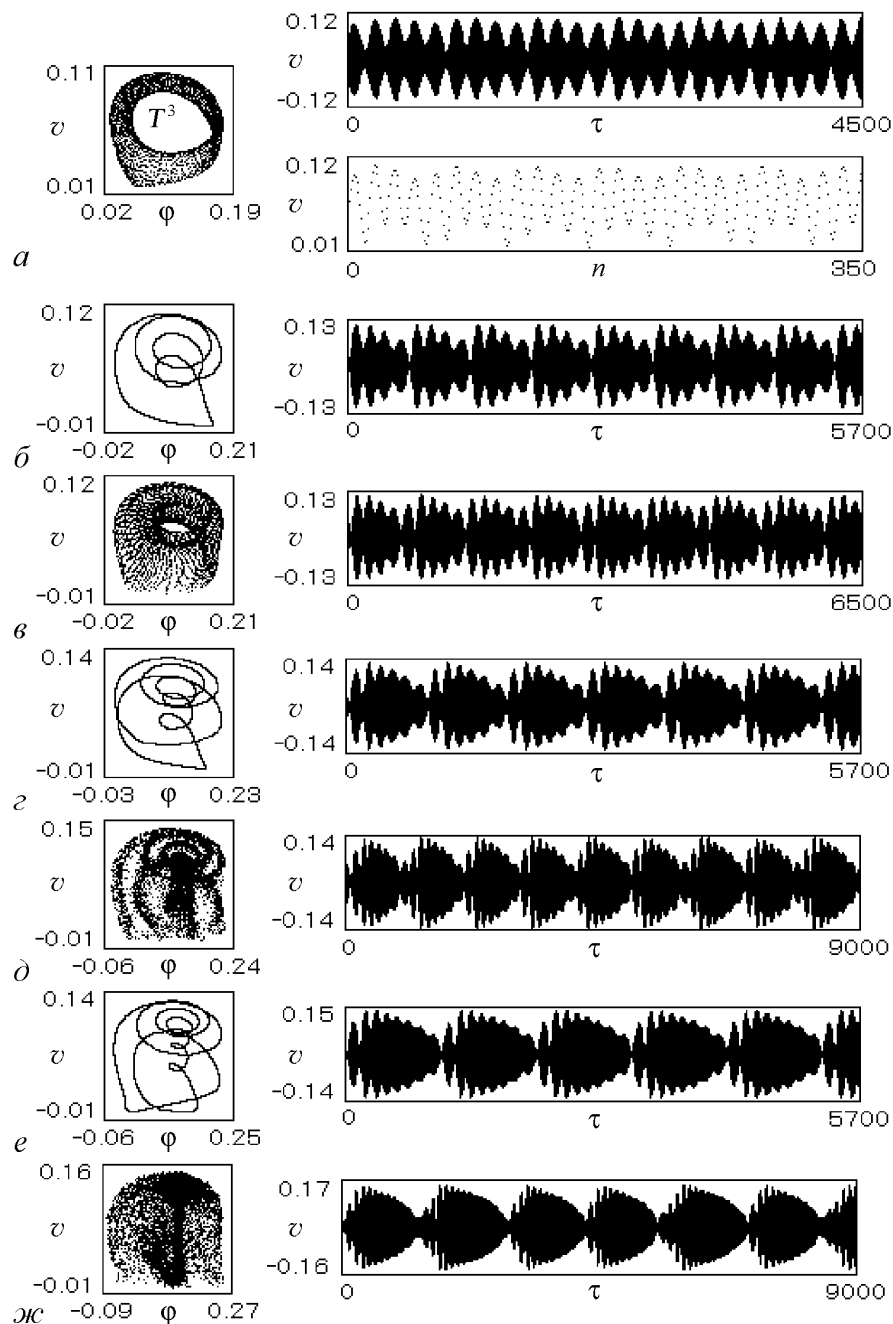


Рис. 9. Сложные квазисинхронные режимы системы при  $\varepsilon_2 = 2.405$  (а), 2.408 (б), 2.435 (в), 2.472 (г), 2.485 (д), 2.525 (е), 2.56 (ж)

мерных торов и хаотических режимов, причем число оборотов замкнутых инвариантных кривых отображения Пуанкаре, соответствующих сложным торам, начиная с четырех, последовательно увеличивается на единицу. На рис. 9, б, з, е показаны четырех-, шести- и восьмиоборотные замкнутые инвариантные кривые и соответствующие этим торам зависимости  $v(\tau)$ ;  $(\varphi, v)$ -проекции фазовых портретов и зависимости  $v(\tau)$  на рис. 9, в, д, ж соответствуют хаотическим режимам. При переходе параметра  $\varepsilon_2$  через значение 2.65 происходит жесткий переход от режима сложного тора к периодическому квазисинхронному режиму однооборотного предельного цикла. Отметим, что описанный сценарий эволюции квазисинхронного режима тора  $T^2$  реализуется также и в случаях, когда в качестве варьируемого параметра взяты начальная расстройка  $\gamma$  или параметр связи  $\alpha$ .

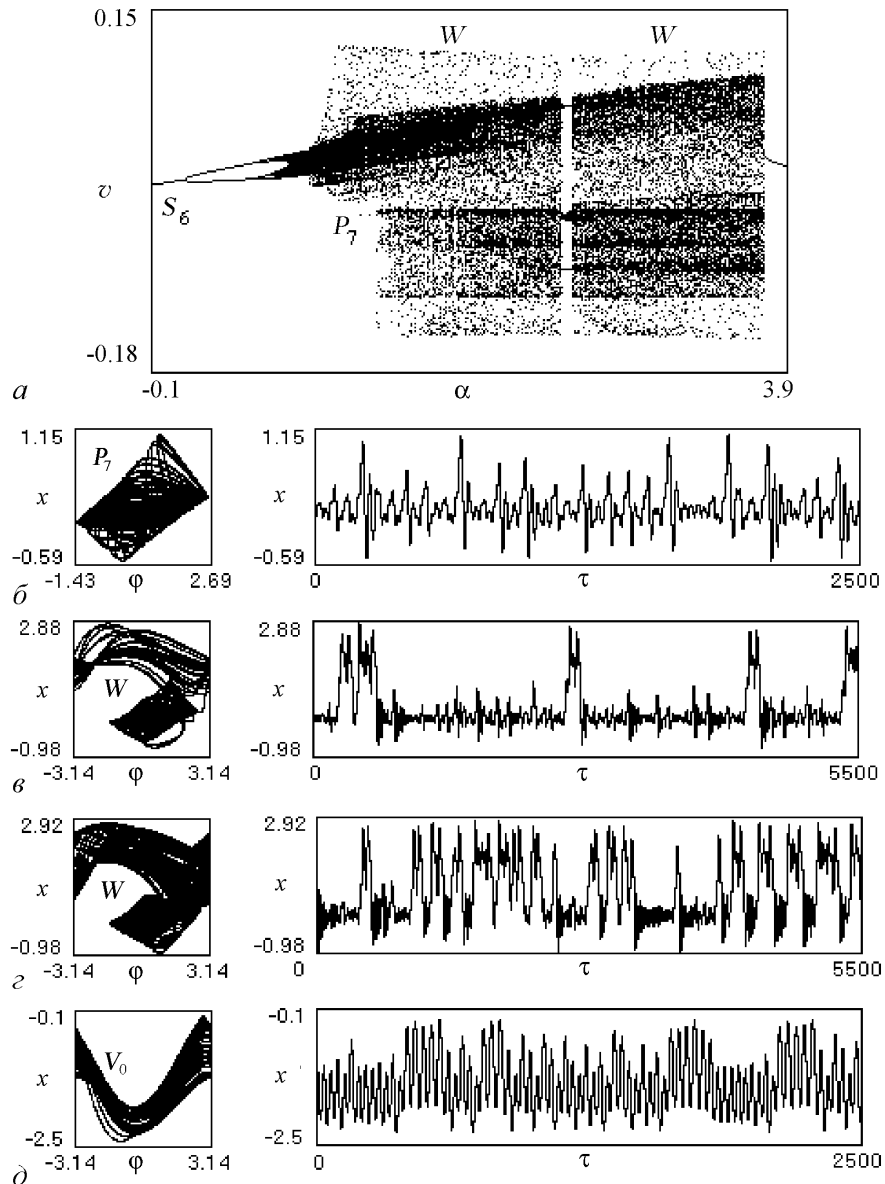


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма  $\{\alpha, v\}$  (а), проекции фазовых портретов и реализации колебаний (б-д) при  $\alpha = 1.3$  (б), 1.36 (в), 2.0 (г), 0.8 (д)

4. Кроме несинхронных режимов колебательного типа, при численном исследовании системы (5) обнаружено существование регулярных и хаотических асинхронных режимов вращательного и колебательно-вращательного типов. При этом выяснено, что возможны одновременное существование квазисинхронных и асинхронных режимов и переходы между этими режимами при изменении параметров. Обсудим в этом аспекте результаты вычислительного эксперимента по исследованию динамики системы (5) при изменении параметра связи  $\alpha$  и начальной расстройки  $\gamma$ .

На рис. 10, а приведена бифуркационная диаграмма  $\{\alpha, v\}$ , построенная при значениях  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 2.2$ ,  $\varepsilon_2 = 10$ ,  $\varepsilon_3 = 20$ ,  $\varepsilon_4 = 5$ ,  $\varepsilon_5 = 5$  (параметр  $\alpha$  изменяется от  $-0.1$  до  $3.9$ ), а на рис. 10, б-д даны  $(\varphi, x)$ -проекции фазовых портретов и зависимости  $x(\tau)$ , соответствующие аттракторам системы (5). Стартовым состоянием системы при  $\alpha = -0.1$  является квазисинхронный режим колебательного предельного цикла  $S_6$ . В интервале значений  $-0.1 < \alpha < 0.76$  в системе развивается хаотический квазисинхронный режим  $P_7$  через бифуркации удвоения периода цикла  $S_6$  (б). С превышением параметром  $\alpha$  значения  $1.315$  в структуре аттрактора  $P_7$  появляются витки фазовых траекторий, соответствующие вращательным движениям, что свидетельствует о преобразовании колебательного хаотического аттрактора  $P_7$  в колебательно-вращательный хаотический аттрактор  $W$ . Режим колебаний на аттракторе  $W$  представляет собой нерегулярное чередование колебательных движений и вращательных движений с нарастанием разности фаз  $\varphi$ . При этом вначале система более длительное время проводит на аттракторе  $P_7$  (в). С увеличением  $\alpha$  частота и длительность вращательных движений на аттракторе  $W$  возрастают (з). На реализациях  $x(\tau)$  (в, з), качественно подобных реализациям колебаний на двухспиральных хаотических аттракторах, хорошо видны нерегулярные перебросы между двумя различными колебательными состояниями. При  $\alpha > 3.749$  хаотические колебания на аттракторе  $W$  прекращаются, система возвращается к квазисинхронному режиму предельного цикла  $S_6$ . Далее с увеличением  $\alpha$  происходят две бифуркации удвоения периода цикла  $S_6$ , после чего, когда  $\alpha > 13.76$ , система от режима четырехоборотного колебательного предельного цикла  $S_6^4$  жестко переходит к асинхронному режиму вращательного хаотического аттрактора  $V_0$  (д).

Аттрактор  $V_0$  возникает в фазовом пространстве  $U$  при  $\alpha > 0.76$ . На рис. 11 приведена бифуркационная диаграмма  $\{\alpha, x\}$ , характеризующая эволюцию аттрак-

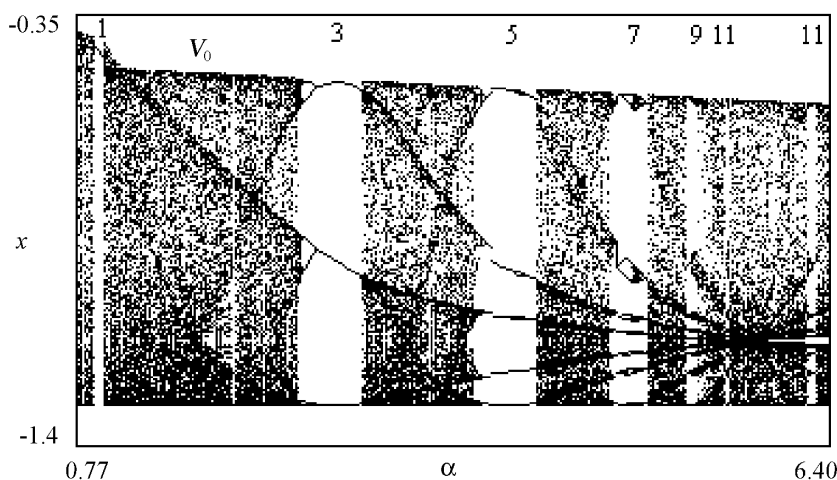


Рис. 11. Диаграмма развития хаотического асинхронного режима при изменении  $\alpha$

тора  $V_0$  при изменении  $\alpha$  от 0.77 до 6.4. Видно, что с увеличением  $\alpha$  происходит чередование хаотических колебаний в режиме аттрактора  $V_0$  с регулярными колебаниями в режиме вращательных предельных циклов, число оборотов по  $\varphi$  на которых последовательно увеличивается на два от одного (цикл,  $2\pi$ -периодический по  $\varphi$ ) до одиннадцати (цикл,  $22\pi$ -периодический по  $\varphi$ ). При этом внутри окон семи-, девяти- и одиннадцатипериодических циклов реализуются переходы к хаосу через бифуркации удвоения периода и процессы дехаотизации колебаний через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения. Важно отметить, что при значениях  $\alpha > 6.4$  наблюдается чередование широких областей хаотических колебаний в режиме аттрактора  $V_0$  и достаточно узких областей периодических асинхронных режимов на многооборотных вращательных предельных циклах. Таким образом, в интервале  $-0.1 < \alpha < 0.76$  системе свойственны квазисинхронные режимы, в интервале  $0.76 < \alpha < 13.76$  имеет место одновременное существование регулярных и хаотических квазисинхронных и асинхронных режимов, а при  $\alpha > 13.76$  наблюдаются асинхронные режимы.

Остановимся на особенностях эволюции асинхронных режимов при изменении  $\gamma$ . На рис. 12, *a* приведена бифуркационная диаграмма  $\{\gamma, v\}$ , соответствующая значениям параметров  $\alpha = 2$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 2$ ,  $\varepsilon_2 = 2$ ,  $\varepsilon_3 = 2$ ,  $\varepsilon_4 = 5$ ,  $\varepsilon_5 = 5$ , которая отображает развитие режима однооборотного вращательного предельного

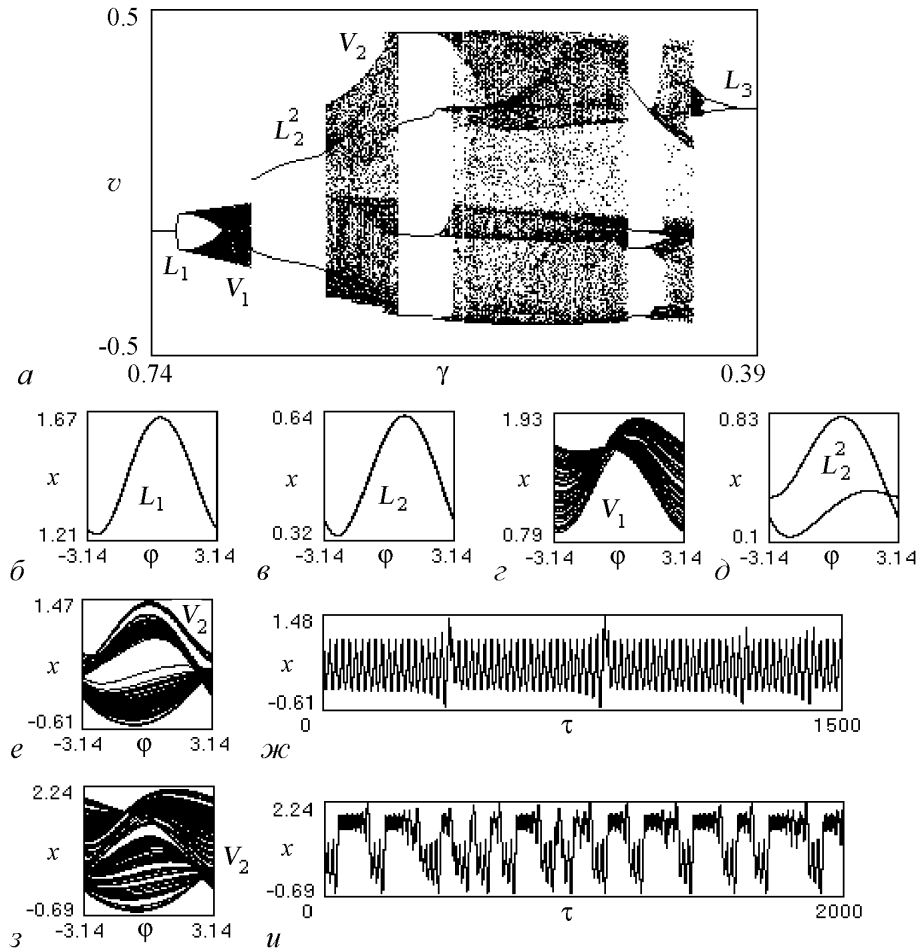


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма  $\{\gamma, v\}$  (*a*), проекции фазовых портретов (*б-е, з*) и реализации колебаний (*ж, и*) при  $\gamma = 0.74$  (*б, в*), 0.7 (*з*), 0.683 (*д*), 0.6385 (*е, ж*), 0.63 (*з, и*)



цикла  $L_1$  при изменении  $\gamma$  от 0.74 до 0.39, а на рис. 12, б-и даны  $(\varphi, x)$ -проекции фазовых портретов и зависимости  $x(\tau)$ , соответствующие аттракторам системы (5). Отметим, что при  $\gamma = 0.74$  одновременно с циклом  $L_1$ , расположенным в области  $1 < x < 2$  фазового пространства  $U$  (б), существует еще один вращательный предельный цикл  $L_2$ , который расположен в области  $0 < x < 1$  (в). При уменьшении  $\gamma$  цикл  $L_1$  преобразуется через бифуркации удвоения периода в хаотический вращательный аттрактор  $V_1$  (з), затем наблюдается жесткий переход от режима аттрактора  $V_1$  к режиму двухоборотного ( $4\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) предельного цикла  $L_2^2$  (д), который образуется в результате бифуркации удвоения периода цикла  $L_2$ . Далее реализуется седло-узловая бифуркация цикла  $L_2^2$ , одновременно появляется перемежаемость – чередование длинной стадии колебательных движений в окрестности цикла  $L_2^2$  с относительно короткими нерегулярными всплесками (е, ж). Через перемежаемость возникает вращательный хаотический аттрактор  $V_2$  (з, и). При уменьшении  $\gamma$  режим аттрактора  $V_2$  чередуется с режимами четырехоборотных ( $8\pi$ -периодических по  $\varphi$ ) предельных циклов, после чего наблюдаются уменьшение размеров аттрактора  $V_2$ , дехаотизация колебаний через обратные бифуркации удвоения периода и переход при  $\gamma < 0.4$  к режиму однооборотного вращательного предельного цикла  $L_3$ . При  $\gamma < 0.28$  от асинхронного режима цикла  $L_3$  система жестко переходит к периодическому квазисинхронному режиму.

Бифуркационная диаграмма  $\{\gamma, v\}$ , приведенная на рис. 13, а, иллюстрирует другой сценарий эволюции вращательного предельного цикла  $L_1$  (см. рис. 12, б) при

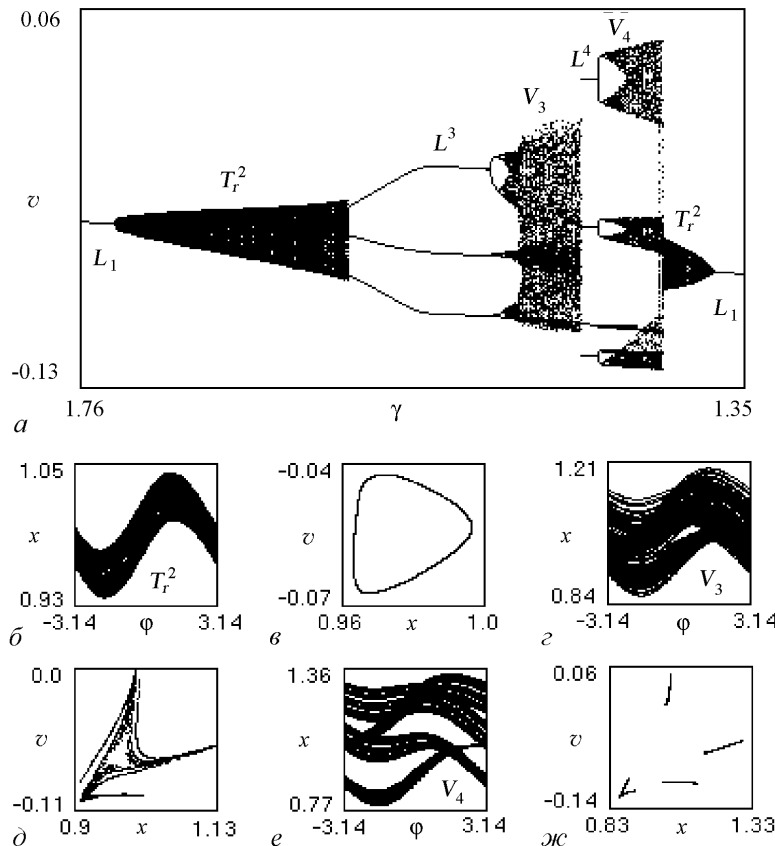


Рис. 13. Эволюция асинхронного режима предельного цикла  $L_1$  при изменении  $\gamma$  (а) и проекции фазовых портретов и отображения  $T_\varphi$  (б-ж) при  $\gamma = 1.65$  (б, в), 1.47 (з, д), 1.405 (е, ж)

изменении  $\gamma$ , для которого характерно образование в фазовом пространстве двумерного вращательного тора  $T_r^2$ . Диаграмма построена при значениях  $\alpha = 45$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 2$ ,  $\varepsilon_2 = 3.5$ ,  $\varepsilon_3 = 3$ ,  $\varepsilon_4 = 4$ ,  $\varepsilon_5 = 5$ , начальная расстройка  $\gamma$  изменяется от 1.76 до 1.35. На рис. 13, б, в даны  $(\varphi, x)$ -проекция фазового портрета и  $(x, v)$ -проекция точечного отображения  $T_\varphi$  плоскости  $\varphi = -\pi$  в плоскость  $\varphi = \pi$ , соответствующие тору  $T_r^2$ . Хаотические вращательные аттракторы  $V_3$  (рис. 13, з, д) и  $V_4$  (рис. 13, е, ж) образуются здесь на базе соответственно трехоборотного (6л-периодического по  $\varphi$ ) и четырехоборотного предельных циклов  $L^3$  и  $L^4$ . При уменьшении  $\gamma$  режим хаотического аттрактора  $V_4$  жестко сменяется квазипериодическим режимом тора  $T_r^2$ , который затем преобразуется в режим предельного цикла  $L_1$ . При дальнейшем уменьшении  $\gamma$  наблюдается чередование регулярных и хаотических режимов. На рис. 14, а приведена бифуркационная диаграмма  $\{\gamma, x\}$ , построенная в интервале значений  $0.08 < \gamma < 0.73$ . Она показывает динамические состояния, через которые режим цикла  $L_1$  преобразуется в режим колебательного хаотического аттрактора. Хаотические асинхронные режимы здесь образуются через перемежаемость в результате седло-узловых бифуркаций двух- и однооборотного вращательных предельных циклов и через бифуркации удвоения периода. На рис. 14, б-д даны  $(\varphi, x)$ -проекции фазовых портретов, зависимости  $x(\tau)$  и  $(x, v)$ -проекции отображения  $T_\varphi$ , соответствующие вращательным хаотическим аттракторам системы (5).

5. В данной работе на примере модели (5) двух взаимодействующих систем с автоподстройкой частоты и задержки во времени изучены особенности коллективного поведения связанных систем управления колебаниями в случае, когда индивидуальная динамика систем характеризуется существованием как регулярных, так и хаотических режимов. Основное внимание уделено несинхронным режимам и нелинейным явлениям, обусловленным применением фильтра третьего порядка в цепи автоподстройки задержки. В результате численного исследования модели (5) получены новые данные о свойствах поведения связанных систем ФАПЧ и АПЗ, расширяющие представление о процессах сложной динамики в таких системах. Установлено, что при нарушении устойчивости режима слежения наблюдаются как мягкий, так и жесткий переходы к периодическим квазисинхронным режимам. При изменении параметров модели (5) эти режимы преобразуются в хаотические квазисинхронные режимы по различным сценариям, имеют место переходы между квазисинхронными и асинхронными режимами. Жесткий характер возникновения несинхронных режимов обуславливает существование мультистабильности, то есть сосуществования различных режимов. Выяснена достаточно сложная картина нелинейных процессов, которая характеризуется существованием различных типов регулярных (в том числе сложнопериодических) и хаотических несинхронных режимов и бифуркационных переходов между ними при изменении параметров. Переходы к хаотическим режимам осуществляются через бифуркации удвоения периода, через перемежаемость, через разрушение инвариантных торов, а также жестким образом в результате седло-узловых бифуркаций предельных циклов. Рассмотрены примеры сценариев преобразования динамических состояний при медленном изменении параметров инерционности и связи, начальной частотной расстройки, которые объясняют режимы и механизмы сложного поведения системы в процессе ввода в режим слежения, а также при нарушении этого режима в результате изменения параметров системы и возмущения фазовых переменных.

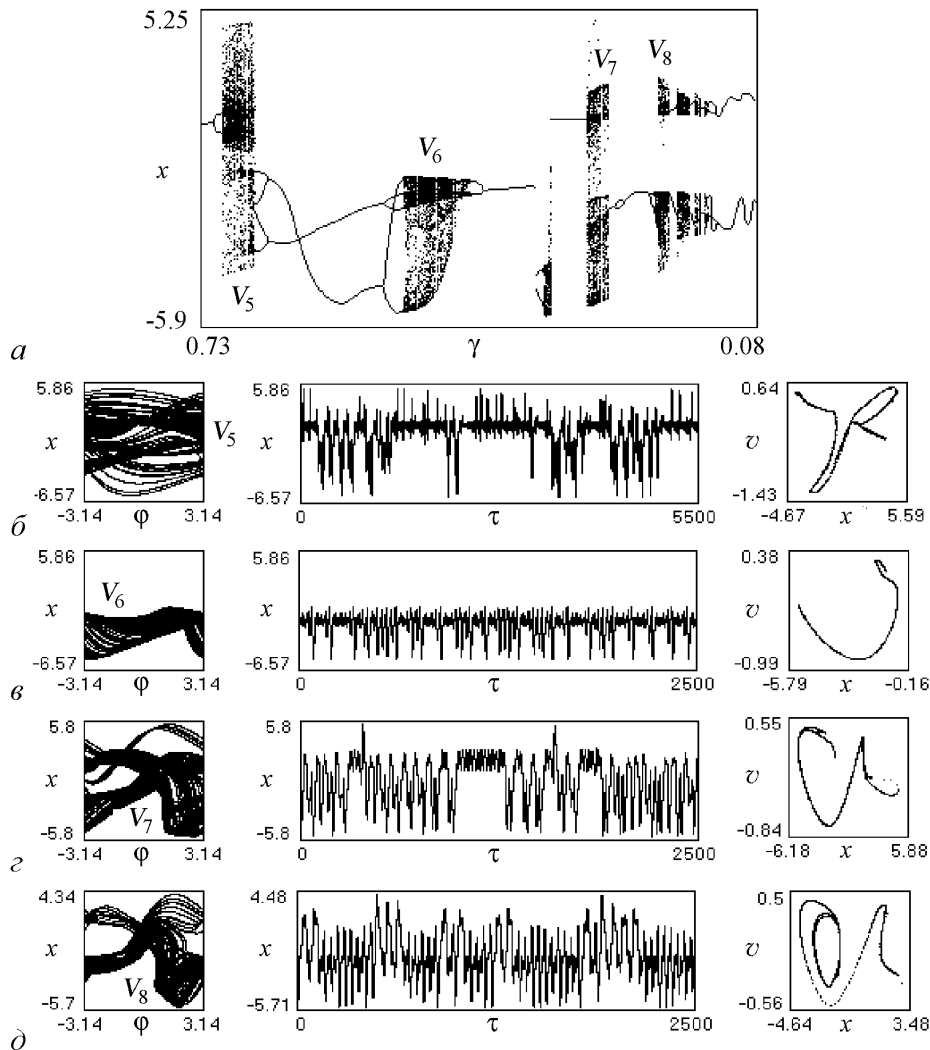


Рис. 14. Хаотические асинхронные режимы, развивающиеся на базе режима предельного цикла  $L_1$  при уменьшении  $\gamma$ :  $\gamma = 0.679$  (б),  $0.48$  (в),  $0.273$  (г),  $0.19$  (д)

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач управления режимами поведения с целью обеспечения режима слежения или стимулирования его неустойчивости и перевода системы в несинхронные режимы с желаемыми свойствами. Большое разнообразие динамических состояний и бифуркаций, обнаруженное при численном исследовании модели (5), создает широкие возможности для формирования на выходе связанных систем ФАПЧ и АПЗ хаотически модулированных сигналов, соответствующих различным (колебательным, вращательным и колебательно-вращательным) аттракторам модели (5). Особый интерес при этом представляют режимы, определяемые колебательно-вращательными и вращательными хаотическими аттракторами, в которых наблюдаются нерегулярные переходы фазовых переменных между различными колебательными состояниями.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 05-02-17409, № 06-02-16499).*

## Библиографический список

1. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Динамические режимы и бифуркации при взаимодействии двух систем синхронизации через взаимные перекрестные связи // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 51.
2. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Возбуждение хаотических колебаний в модели двух связанных систем с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 8. С. 984.
3. Бабич О.А. Обработка информации в радионавигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.
4. Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др. Помехоустойчивость радиосистем со сложными сигналами / Под ред. Г.И. Тузова. М.: Радио и связь, 1985.
5. Волынкин А.И., Кудрявцев И.В., Мищенко И.Н., Шибшаевич В.С. Аппаратура потребителей СРНС «Навстар» // Зарубежная радиоэлектроника. 1983. № 4. С. 70.
6. Частиков А.В., Петров Е.П., Прозоров Д.Е. Метод фильтрации шумоподобных сигналов, сформированных на рекуррентных псевдослучайных последовательностях максимального периода // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 5. С. 553.
7. Беляев Р.В., Калинин В.И., Колесов В.В. Формирование шумоподобной несущей в системах связи с расширением спектра // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 2. С. 214.
8. Петров Е.П., Прозоров Д.Е. Синтез устройств быстрого поиска шумоподобных сигналов, сформированных на многозначных рекуррентных последовательностях максимального периода // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 10. С. 1281.
9. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Хаотически модулированные колебания в связанных фазовых системах // В кн. «Нелинейные волны' 2002» / Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С.77.
10. Шахтарин Б.И., Сидоркина Ю.А., Аливер Ю.В., Кобылкина П.И. Исследование режимов генераторов хаоса // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 12. С. 1471.
11. Дмитриев А.С., Широков М.Е. Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.
12. Пономаренко В.П. Динамические свойства системы синхронизации сложного сигнала с дополнительной связью по цепям управления // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30, № 3. С. 534.
13. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
14. Белоусина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 3. С. 403.
15. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения

АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Вып. 2(4). Н. Новгород, 1997. С. 15.

16. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: Учебно-методическая разработка / Сост. В.В. Матросов. Н. Новгород: ННГУ, 2002.
17. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
18. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.

*НИИ Прикладной математики  
и кибернетики Нижегородского  
государственного университета*

*Поступила в редакцию 12.04.2006*

## **PECULIARITIES OF COMPLEX DYNAMICS AND TRANSITIONS TO CHAOTIC REGIMES IN THE MODEL OF TWO INTERACTING SYSTEMS WITH PHASE CONTROL**

*V.P. Ponomarenko*

The work is devoted to investigation of complex dynamics in the model of two interacting systems with phase and delay control. Stability conditions of synchronous regime are determined. The processes of excitement of nonsynchronous regimes and transitions between them are considered. Scenarios of development of nonsynchronous regimes under variation of the systems parameters are determined. Routes to chaotic behavior of the model are discussed. Results are presented in the form of one-parameter bifurcation diagrams and phase portraits of the model attractors.



*Пономаренко Валерий Павлович* – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail: [rovpr@uic.nnov.ru](mailto:rovpr@uic.nnov.ru)