



## ПРОТИВОФАЗНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ И ФОРМИРОВАНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ В СИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ БИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

*В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов*

В работе рассматривается бифуркационный механизм формирования мультистабильности на базе режимов противофазной синхронизации в кубических отображениях с симметричной диффузионной связью. Исследуются бифуркации периодических орбит, располагающихся в инвариантном симметричном подпространстве, содержащем аттракторы, соответствующие синхронным колебаниям.

### Введение

Исследования диффузионно связанных систем, переход к хаосу в которых осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода, показали, что для них типичны такие явления, как: полная синхронизация регулярных и хаотических колебаний [1–4] и фазовая мультистабильность [5]. Причем, как было затем обнаружено [6], оба явления связаны между собой – они являются следствием единого бифуркационного механизма, который при малой связи ведет к рождению новых устойчивых колебательных режимов, а при большей связи – к локальной изрешеченности хаотических аттракторов, соответствующих синхронным колебаниям. Для систем, уравнения которых антисимметричны относительно инверсии фазовых координат  $x \leftrightarrow -x$ , возможен и другой тип полностью синхронного поведения – противофазная синхронизация [7], при которой траектория в каждый момент времени подчиняется соотношению  $x_1 = -x_2$  ( $x_{1,2}$  – динамические переменные первого и второго осциллятора, соответственно). В работе [8] исследовались особенности противофазной синхронизации хаоса в системах с дискретным временем с симметричной диффузионной связью и было показано, что в подобных осцилляторах возможна противофазная синхронизация только регулярных колебаний, в то время как хаотические противофазные колебания трансверсально неустойчивы. Однако в области регулярных колебаний между эволюцией синфазных и противофазных режимов много общего. И в том и в другом случае бифуркации синхронных режимов дают начало формированию развитой фазовой мультистабильности. В то время как закономерности формирования мультистабильности на базе синфазных режимов многократно исследовались и

подробно описаны [9–11], особенности формирования мультистабильности на базе противофазных режимов остаются неизученными. Их рассмотрению и посвящена настоящая работа.

## 1. Исследуемая система, свойства симметрии и устойчивость противофазных решений

Будем рассматривать систему двух идентичных кубических отображений с симметричной диффузионной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x_n, y_n$  – динамические переменные первой и второй подсистемы;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  – дискретное время;  $\gamma$  – коэффициент связи; функция  $f(x_n) = (a - 1)x_n - ax_n^3$  задает одиночное кубическое отображение,  $a$  – его управляющий параметр.

Одиночное кубическое отображение обладает симметрией относительно преобразования координат  $x \leftrightarrow -x$ , следствием чего и является возможность в системе (1) появления режимов противофазной синхронизации. Траектории противофазных режимов располагаются в одномерном инвариантном подпространстве  $I_a : x = -y$  полного фазового пространства системы (1). Кроме того, вследствие идентичности осцилляторов и симметрии связи в системе также возможны режимы синфазной синхронизации, траектории которых располагаются в инвариантном подпространстве  $I_i : x = y$ . Явления, связанные с синфазной синхронизацией в этой и аналогичных системах, детально описаны в литературе и в настоящей работе затрагиваться не будут. В дальнейшем при упоминании синхронных режимов имеются в виду только режимы противофазной синхронизации.

Одиночное кубическое отображение – система, демонстрирующая переход к хаосу через каскад субгармонических бифуркаций. При любых значениях параметра  $a$  в системе существует неподвижная точка периода один

$$C_0 : x = 0,$$

являющаяся при  $a < 2$  устойчивой. При  $a = 2$  ее мультипликатор  $\mu = a - 1$  принимает значение  $+1$ , что приводит к бифуркации потери симметрии (бифуркация вил), в результате которой неподвижная точка становится неустойчивой и в ее окрестности рождается пара устойчивых неподвижных точек периода один, симметричных друг другу:

$$C_{1,2} : x = \pm \sqrt{\frac{a-2}{a}}.$$

При дальнейшем увеличении  $a$  на базе неподвижных точек  $C_1$  и  $C_2$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при  $a = 3.3$  возникновением хаотических аттракторов. При  $a = 3.6$  два симметричных друг другу хаотических аттрактора объединяются в один.

При введении связи динамика системы (1) существенно усложняется. В системе связанных отображений при  $0 < a < 2$  существует устойчивая неподвижная

точка в начале координат

$$C_{00} : x = 0, y = 0.$$

С увеличением параметра  $a$ , при  $a = 2$  эта точка претерпевает бифуркацию потери симметрии (бифуркацию вил), ее мультипликатор

$$\mu_{||} = a - 1$$

становится равным  $+1$ . В ее окрестности в симметричном подпространстве ( $x = y$ ) рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{01} : x = y = \sqrt{\frac{a-2}{a}},$$

$$C_{02} : x = y = -\sqrt{\frac{a-2}{a}}.$$

После бифуркации неподвижная точка  $C_{00}$  становится неустойчивой в тангенциальном к  $I_i$  направлении, но остается устойчивой в трансверсальном (перпендикулярном) направлении. Затем, при дальнейшем увеличении  $a$  седловая точка  $C_{00}$  претерпевает вторую бифуркацию потери симметрии, ее второй мультипликатор

$$\mu_{\perp} = (1 - 2\gamma)(a - 1)$$

также становится равным  $+1$ . В окрестности  $C_{00}$  в подпространстве  $I_a$  рождается пара седловых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{10} : x = -y = \sqrt{1 - \frac{1-\gamma}{a(0.5-\gamma)}},$$

$$C_{20} : x = -y = -\sqrt{1 - \frac{1-\gamma}{a(0.5-\gamma)}},$$

после чего точка  $C_{00}$  превращается в репеллер. Регулярные и хаотические режимы синфазной синхронизации формируются на базе неподвижных точек  $C_{01}$  и  $C_{02}$ . Противофазные режимы формируются на базе неподвижных точек  $C_{10}$  и  $C_{20}$ .

Для анализа устойчивости противофазных колебаний удобно рассмотреть отдельно устойчивость к тангенциальным и трансверсальным к  $I_a$  возмущениям. Удобнее всего перейти к переменным, ориентированным вдоль и перпендикулярно  $I_a$ :

$$u = \frac{(x+y)}{2},$$

$$v = \frac{(x-y)}{2}.$$

Уравнения в новых переменных в непосредственной окрестности инвариантного подпространства выглядят следующим образом:

$$u_{n+1} = f'(v_n)u_n, \quad (2)$$

$$v_{n+1} = (1 - 2\gamma)f(v_n). \quad (3)$$

В новых переменных базисный вектор  $\bar{u}$  направлен перпендикулярно  $I_a$ , а базисный вектор  $\bar{v}$  - тангенциально к нему. Уравнение (3) задает движение внутри инвариантного подпространства, то есть определяет вид синхронных колебаний. Независимость этого уравнения от переменной  $u$  отражает факт инвариантности антисимметричного подпространства относительно оператора эволюции исходной системы (1). В отличие от случая синфазной синхронизации форма синхронных колебаний зависит от коэффициента связи. При нулевой связи противофазные колебания повторяют колебания в одиночном отображении. При стремлении  $\gamma$  к 0.5 колебания при любых начальных условиях и значениях  $a$  стягиваются к нулевой неподвижной точке. Из (3) легко определить выражение для тангенциального показателя Ляпунова:

$$\Lambda_{\parallel} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |(1 - \gamma)f'(v_n)|, \quad (4)$$

который определяет устойчивость в тангенциальном к  $I_a$  направлении.

Уравнение (2) определяет движение в нормальном направлении к инвариантному подпространству. Параметр связи не входит в него явным образом, однако зависимость от  $v_n$  предполагает неявную зависимость от коэффициента связи (поскольку от него зависит вид решения  $v_n$ ). Нулевое решение (2)  $u = 0$  соответствует противофазным колебаниям. Устойчивость этого решения определяет устойчивость противофазных колебаний к трансверсальным возмущениям. Эта устойчивость определяется трансверсальным показателем Ляпунова

$$\Lambda_{\perp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(v_n)|. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) видно что соотношение между тангенциальным и трансверсальным показателями Ляпунова задается уравнением:

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} - \ln |1 - 2\gamma|, \quad (6)$$

а значит, для небольших положительных значений  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 0.5$ ) верно соотношение

$$\Lambda_{\perp} \geq \Lambda_{\parallel}. \quad (7)$$

Неравенство (7) противоположно соответствующему соотношению для синфазной синхронизации [8], при которой тангенциальный показатель Ляпунова всегда обгоняет трансверсальный. Из (7) можно сделать следующие выводы:

- каждая локальная бифуркация, сопровождающаяся сменой знака показателя Ляпунова, происходит в системе (1) дважды: вначале в нормальном к  $I_a$  направлении, а затем в тангенциальном;
- любые синхронные хаотические предельные множества трансверсально неустойчивы.

Проведенные исследования противофазных синхронных режимов в системе связанных кубических отображений показали существование устойчивых противофазных периодических движений с любым конечным периодом. Наряду с этим установлено, что в таких системах режимы противофазной самосинхронизации хаоса отсутствуют. Рассмотрим подробнее бифуркации противофазных колебательных режимов.

## 2. Бифуркации синхронных колебаний

Рассмотрим динамику исследуемой системы (1) в инвариантном подпространстве  $I_a$ . Как было показано в разделе 1, в результате второй бифуркации потери симметрии седловой точки  $C_{00}$  в подпространстве  $(x = -y)$  рождается пара седловых точек ( $C_{10}, C_{20}$ ), симметричных друг другу, на базе которых происходит развитие всех режимов противофазной синхронизации. Предельные множества, сформированные на базе этих двух точек, идентичны с точностью до преобразования симметрии  $x \leftrightarrow -y$ . Поэтому ограничимся рассмотрением только одного семейства режимов, например, сформированного около неподвижной точки  $C_{10}$ .

В ходе исследований был проведен двухпараметрический бифуркационный анализ периодических орбит, расположенных внутри подпространства  $I_a$ , а также несинхронных орбит, возникших в окрестности инвариантного подпространства в результате трансверсальных бифуркаций. Общая картина расположения бифуркационных линий представлена на рис. 1. Рассмотрим подробнее характер имеющих

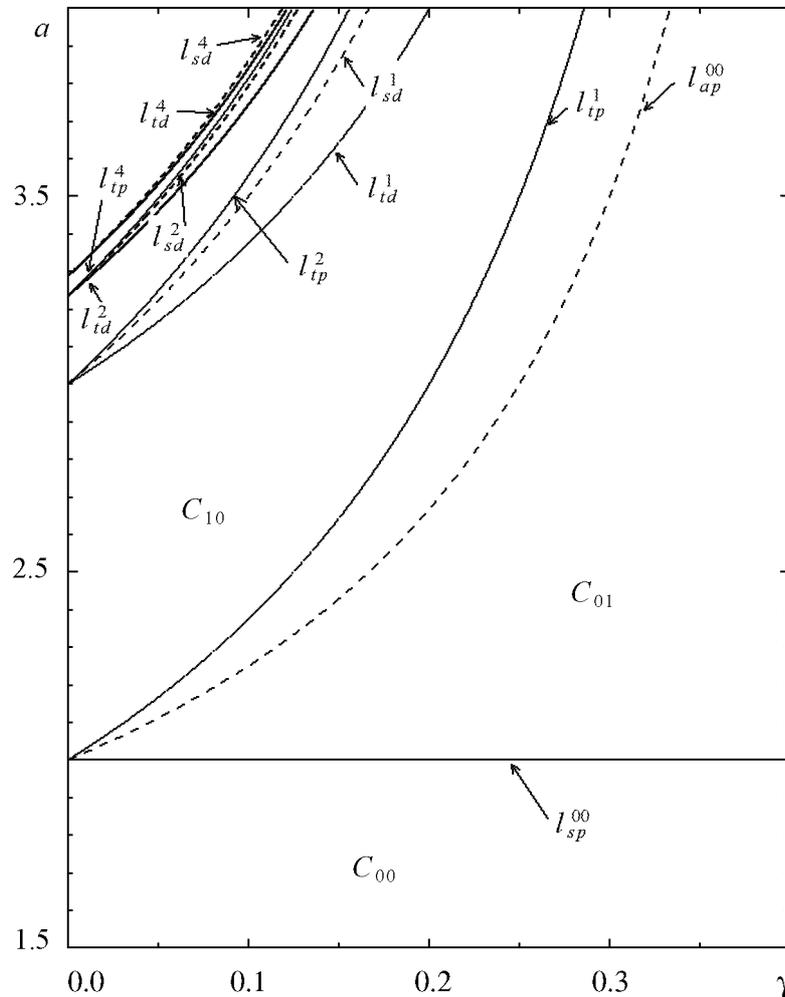


Рис. 1. Линии бифуркаций противофазных режимов на плоскости параметров  $\gamma - a$

место бифуркаций противофазных режимов. Как уже отмечалось, седловая неподвижная точка  $C_{10}$  рождается из седловой неподвижной точки, расположенной в начале координат ( $C_{00}$ ), в результате бифуркации потери симметрии (линия  $l_{ap}^{00}$ ).

Структура фазового пространства после этой бифуркации показана на рис. 2, *а*. На нем схематически изображено взаимное расположение указанных выше орбит, а также показаны направления их устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий. Синхронная орбита  $C_{10}$  является устойчивой по отношению к возмущениям внутри подпространства  $I_a$  и неустойчивой по отношению к трансверсальным возмущениям. Для того чтобы данная орбита стала аттрактором, необходима еще одна бифуркация в трансверсальном направлении. В данном случае такой бифуркацией является бифуркация вил на линии  $l_{tp}^1$ . В результате нее в окрестности точки  $C_{10}$  вне инвариантного подпространства рождается пара седловых орбит  $C_{10}^+$  и  $C_{10}^-$ , симметричных друг другу, а исходная орбита  $C_{10}$ , претерпевшая бифуркацию вил, становится устойчивой. Структура фазового пространства после бифуркации представлена на рис. 2, *б*. При изменении управляющих параметров на базе устойчивой орбиты  $C_{10}$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Каждая из орбит, участвующих в каскаде, претерпевает бифуркацию удвоения периода дважды. Вначале, будучи устойчивой, – по одному мультипликатору, собственный вектор которого перпендикулярен к  $I_a$ , затем, уже став седловой, – по второму, собственный вектор которого касателен к  $I_a$ . В результате первой бифуркации орбита теряет устойчивость в направлении, трансверсальном к симметричному подпространству. В ее окрестности вне симметричного подпространства рождается устойчивая орбита удвоенного периода. В результате второго удвоения седловая орбита теряет устойчивость в тангенциальном к подпространству направлении. Она становится репеллером, и в ее окрестности внутри антисимметричного подпространства рождается седловая орбита удвоенного периода. На рис. 1 сплошные кривые – это линии трансверсальных бифуркаций:  $l_{td}^1$  – для орбиты периода 1,  $l_{td}^2$  – для орбиты периода два и  $l_{td}^4$  – для орбиты периода четыре; а штриховые – линии тангенциальных бифуркаций:  $l_{sd}^1$  – для орбиты периода один,  $l_{sd}^2$  – для орбиты периода два и  $l_{sd}^4$  – для орбиты периода четыре. Поскольку бифуркации удвоения внутри инвариантного подпространства происходят с уже неустойчивыми орбитами, вновь появившиеся орбиты удвоенных

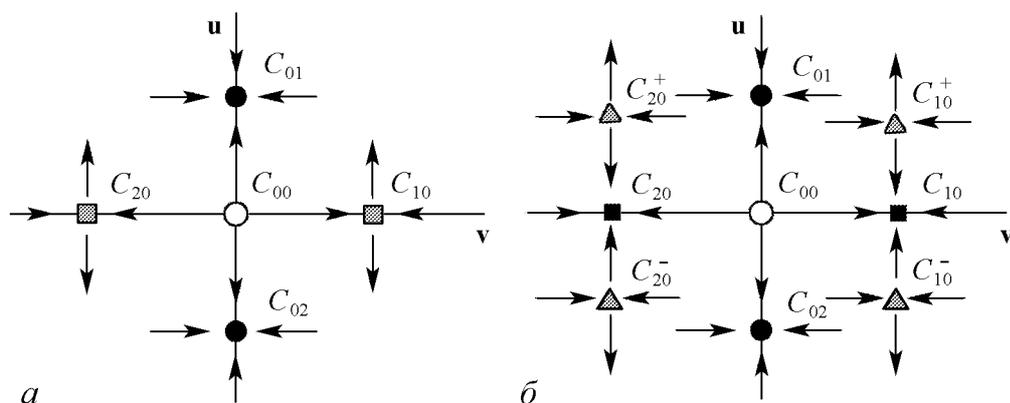


Рис. 2. Схематическое изображение структуры фазового пространства после второй бифуркации потери симметрии неподвижной точки в начале координат (*а*) и после бифуркации вил точки  $C_{10}$  (*б*)

периодов также трансверсально неустойчивы. Структура фазового пространства около каждой из таких орбит схожа с изображенной на рис. 2, *a* для орбиты периода один, с той разницей, что теперь каждая орбита состоит из нескольких точек. Затем, при изменении параметров появившиеся внутри симметричного подпространства седловые орбиты становятся устойчивыми через субкритические бифуркации вил (аналогично бифуркации орбиты  $C_{10}$ ). Линии этих бифуркаций обозначены:  $l_{tp}^2$ ,  $l_{tp}^4$ . Таким образом, на плоскости параметров в области между линиями  $l_{tp}^1$  и  $l_{td}^1$  существует устойчивая противофазная орбита периода 1, между линиями  $l_{tp}^2$  и  $l_{td}^2$  – устойчивая противофазная орбита периода 2, между линиями  $l_{tp}^4$  и  $l_{td}^4$  – устойчивая противофазная орбита периода 4. Бифуркации орбит более высоких периодов происходят аналогично. Таким образом, до перехода к хаосу на плоскости параметров существуют полосы устойчивости для противофазных периодических орбит, все более и более сужающиеся с ростом периода орбиты. Эти области разделены полосами неустойчивости для тех же орбит. Похожий бифуркационный сценарий наблюдался в ряде систем для случая синфазной синхронизации [6, 8]. Однако в том случае бифуркации удвоения внутри симметричного подпространства предшествовали бифуркациям удвоения в трансверсальном направлении и поэтому отмеченное чередование полос устойчивости и неустойчивости отсутствовало.

Таким образом, анализ бифуркаций орбит в симметричном подпространстве  $I_a$  показал, что в системе существуют устойчивые противофазные периодические движения с любым конечным периодом  $2^N$ . Области существования этих колебаний на плоскости параметров сужаются при увеличении периода орбиты, и при переходе к хаосу их ширина становится нулевой. В результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода в окрестности инвариантного подпространства появляются устойчивые несинхронные орбиты, каждая из которых является родоначальником своего семейства регулярных и хаотических режимов.

### **3. Формирование мультистабильности в окрестности инвариантного подпространства**

Рассмотрим формирование новых устойчивых режимов в окрестности инвариантного подпространства  $I_a$ . В предыдущем разделе было показано, что в рассматриваемой системе в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода в окрестности предельных множеств, соответствующих синхронным колебаниям, появляются аттракторы несинхронных колебаний. При изменении параметров, на базе каждой из этих орбит, в результате последовательности мягких бифуркаций образуется свое семейство регулярных и хаотических режимов. Для более наглядного представления о формировании мультистабильности разделим все множество наблюдаемых режимов на несколько характерных семейств. Для каждого семейства построим отдельную карту режимов на плоскости параметров  $a - \gamma$ . Общая карта режимов будет состоять из нескольких листов. Первый из этих листов относится к режимам, образованным в результате бифуркаций орбиты  $1C_{10}$ . Так, на линии  $l_{td}^1$  (см. рис. 1) после бифуркации удвоения периода устойчивой орбиты  $C_{10}$  в ее окрестности в перпендикулярном к  $I_a$  направлении появляется устойчивая орбита удвоенного периода  $2C_{10}^1$ . Расположение точек орбиты  $2C_{10}^1$  показано на рис. 3, *a*.

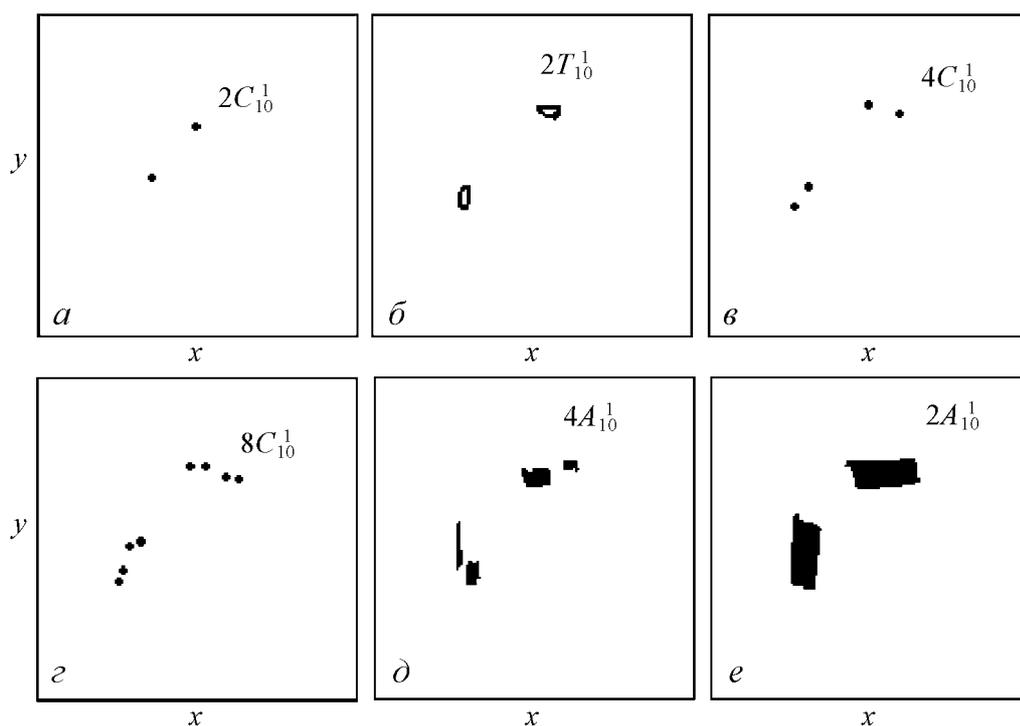


Рис. 3. Фазовые портреты режимов, сформированных на базе орбиты  $2C_{10}^1$

Данная орбита порождает семейство регулярных и хаотических режимов, фазовые портреты которых представлены на рис. 3, а карта динамических режимов этого семейства на плоскости управляющих параметров построена на рис. 4, а (лист ANS1). Область параметров, занимаемая режимами данного семейства, отмечена на рисунке серым цветом. Линия  $l_1$  повторяет линию  $l_{td}^1$  рис. 1. При изменении управляющих параметров на линии  $l_2$  устойчивая орбита  $2C_{10}^1$  в результате бифуркации Неймарка – Сакера мягко сменяется квазипериодическими движениями  $2T_{10}^1$  (рис. 3, б). При значениях  $a$  больше 3.55 с уменьшением коэффициента связи  $\gamma$  происходит переход к двухленточному хаотическому аттрактору  $2A_{10}^1$  через разрушение квазипериодических движений (рис. 3, в). При  $a$  меньше 3.55 с уменьшением  $\gamma$  в результате синхронизации движений на торе  $2T_{10}^1$  возникает устойчивая орбита периода четыре  $4C_{10}^1$  (рис. 3, в) и симметричная ей орбита  $4C_{10}^3$ . Далее на базе этих орбит наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу, завершающийся образованием четырехленточных аттракторов  $4A_{10}^1$  (рис. 3, д) и  $4A_{10}^3$ . При увеличении  $a$  эти два аттрактора объединяются с образованием двухленточного аттрактора  $2A_{10}^1$ . Таким образом, эволюция режимов на базе орбиты  $2C_{10}^1$  заканчивается формированием двухленточного хаотического аттрактора, фазовый портрет которого изображен на рис. 3, е. При дальнейшем изменении управляющих параметров на линии  $l_4$  происходит жесткий переход на другое семейство режимов: несинхронные колебания, сформированные на базе орбиты  $2C_{10}^1$  сменяются режимами на базе орбиты  $4C_{10}^2$ , то есть происходит перескок с листа ANS1 на лист ANS2 (рис. 4, б).

Рассмотрим теперь следующее семейство несинхронных режимов, сформированных на базе орбиты  $4C_{10}^2$ , которая образовалась в результате трансверсальной бифуркации удвоения периода синхронной орбиты  $2C_{10}$  (линия  $l_{td}^2$  на рис. 1). На

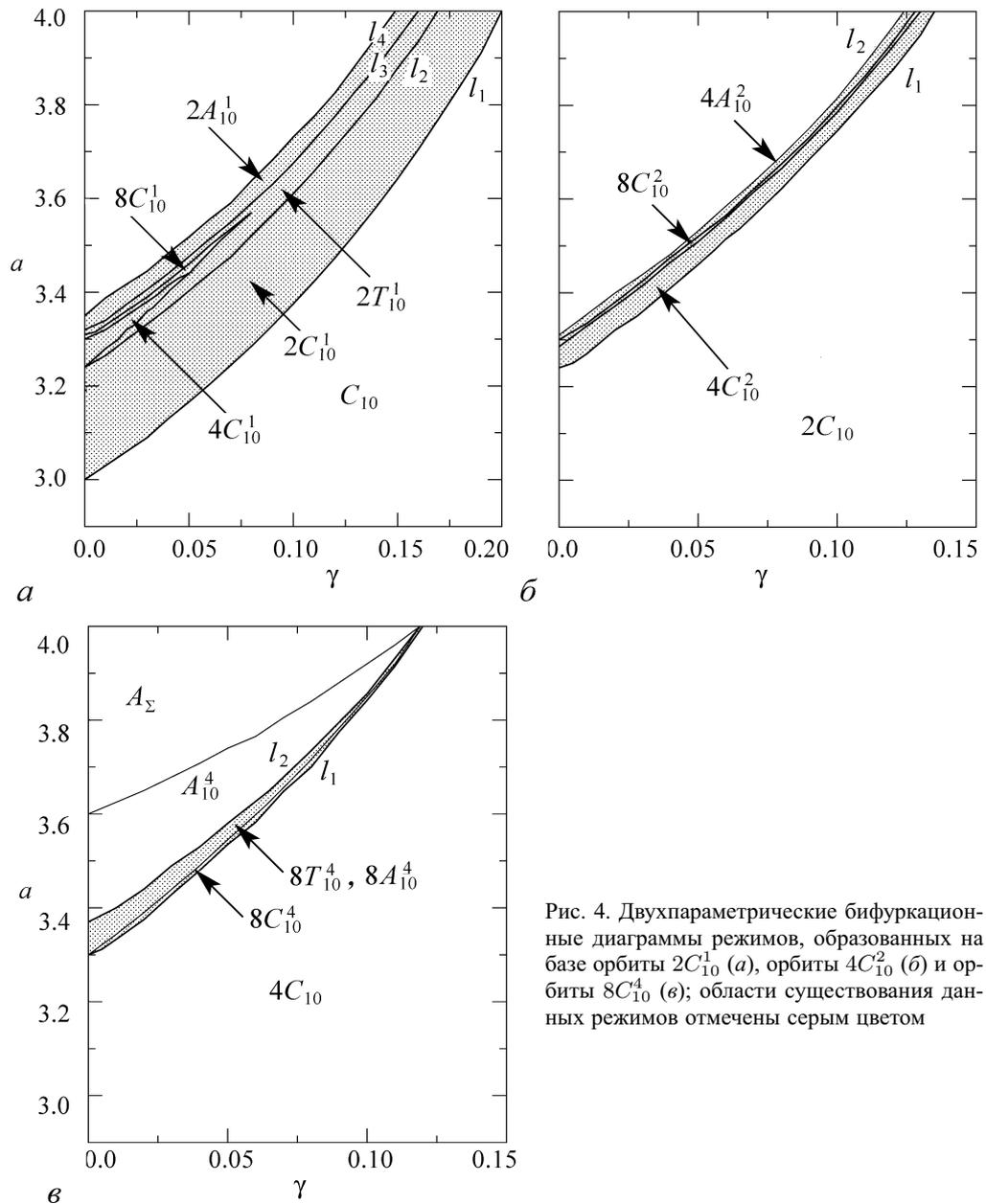


Рис. 4. Двухпараметрические бифуркационные диаграммы режимов, образованных на базе орбиты  $2C_{10}^1$  (а), орбиты  $4C_{10}^2$  (б) и орбиты  $8C_{10}^4$  (в); области существования данных режимов отмечены серым цветом

рис. 4, б показана карта семейства несинхронных режимов, сформированных на базе устойчивой орбиты  $4C_{10}^2$  (область существования этих режимов отмечена серым цветом). Структура пространства параметров для этого семейства схожа с аналогичной структурой листа ANS1. Различия заключаются в том, что режимы этого семейства образуются на базе орбиты периода четыре и соответственно эволюционируют к четырехленточному хаотическому аттрактору. Фазовые портреты показаны на рис. 5.

Здесь также возможны два пути усложнения колебаний: через разрушение квазипериодических колебаний  $4T_{10}^2$  (рис. 5, в) и через бифуркации удвоения периода орбиты  $8C_{10}^2$ , возникшей в результате синхронизации движений на торе  $4T_{10}^2$ . Эволюция несинхронных режимов на базе  $4C_{10}^2$  заканчивается образованием хаотического

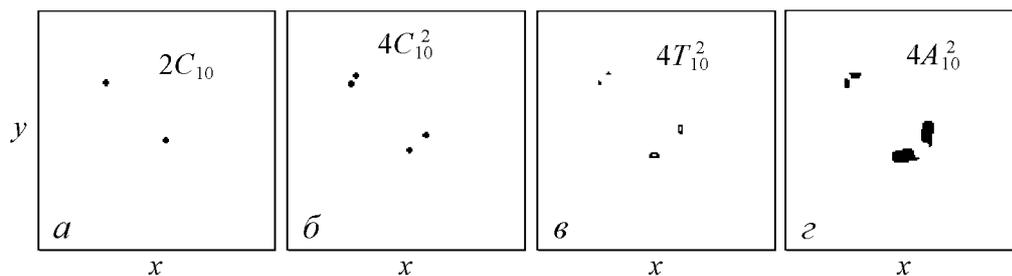


Рис. 5. Орбиты, принадлежащие листу ANS2 (см. рис. 4, б)

аттрактора  $4A_{10}^2$ , фазовый портрет которого изображен на рис. 5, д. Дальнейшее увеличение параметра  $a$  или уменьшение  $\gamma$  приводит (линия  $l_2$  на рис. 4, б) к жесткому переходу на другое семейство циклов, области существования которых показаны на листе ANS3 (рис. 4, в). Это семейство режимов образовалось в результате трансверсальной бифуркации удвоения периода орбиты  $4C_{10}$ :  $4C_{10} \rightarrow 8C_{10}^4$ . Фазовый портрет орбиты  $8C_{10}^4$  показан на рис. 6, а.

Впоследствии на базе этой орбиты возникает семейство регулярных и хаотических режимов, завершающихся образованием восьмиленточного хаотического аттрактора  $8A_{10}^4$  (рис. 6, б). Область существования режимов данного семейства отмечена на рис. 4, в серым цветом. При дальнейшем изменении параметров возможен перескок с этого листа на лист, образованный на базе орбиты  $16C_{10}^8$ , затем с него – на семейство, сформированное на базе орбиты  $32C_{10}^{16}$  и т.д. Таким образом, в пространстве параметров существует бесконечное число листов, относящихся к

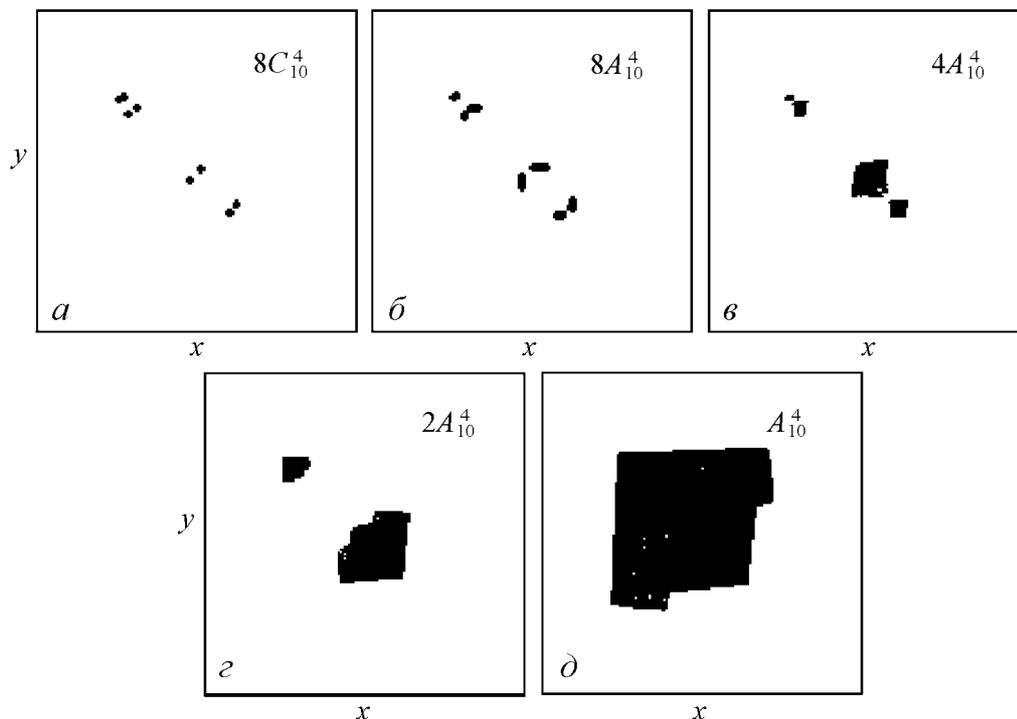


Рис. 6. а, б – орбиты, принадлежащие листу ANS3 (см. рис. 4, в); в, г, д – объединенные хаотические аттракторы

режимам, сформированным на базе несинхронных орбит все большего и большего периода. Однако нетрудно заметить, что с ростом номера листа область существования семейства режимов все более и более сужается. Фактически, в районе линии  $l_2$  (см. рис. 4, в) мы имеем накопление бифуркационных линий перескоков с одного листа режимов на другой. На практике, при конечной скорости движения по параметрам, можно пронаблюдать только конечное число перескоков с листа на лист. В наших экспериментах мы ограничились листом ANS3. После пересечения линии  $l_2$  наблюдается последовательное объединение хаотических аттракторов различных семейств. При таком объединении вначале формируются хаотические аттракторы в окрестности противофазного подпространства  $4A_{10}^4, 2A_{10}^4, A_{10}^4$  (рис. 6, в, з, д). Дальнейшее изменение параметров системы приводит к образованию несинхронного хаотического аттрактора  $A_\Sigma$ , объединяющего хаотические множества, расположенные в синфазном и противофазном симметричных подпространствах (а также в их окрестности) и соответствующие всем ранее наблюдаемым режимам.

Из сравнения карт динамических режимов на рис. 4, а, б и в видно, что имеются области значений параметров, где листы ANS1, ANS2 и ANS3 перекрываются. То есть в фазовом пространстве системы одновременно существуют аттракторы различных семейств. Также из сравнения карт режимов видно, что лист ANS3 занимает наименьшую область на плоскости параметров. А лист ANS1, напротив, – наибольшую область. Область мультистабильности ограничена нижним краем листа ANS1. Наибольшее число сосуществующих аттракторов наблюдается при малой связи в окрестности точки перехода к хаосу в индивидуальной системе.

Таким образом, в системе связанных идентичных кубических отображений в окрестности антисимметричного подпространства при изменении управляющих параметров системы наблюдается процесс формирования фазовой мультистабильности. В фазовом пространстве системы одновременно существуют различные регулярные и хаотические аттракторы.

### Заключение

Мы исследовали процесс формирования мультистабильности в системе диффузионно связанных отображений в окрестности режимов противофазных колебаний. Установлено, что новые устойчивые несинхронные орбиты появляются в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода синхронных орбит. В результате каждой из таких бифуркаций в окрестности потерявшей устойчивость синхронной орбиты появляется несинхронная, самосимметричная орбита удвоенного периода. В дальнейшем из этой орбиты в результате бифуркации Неймарка – Сакера возникает многосвязная инвариантная кривая, соответствующая квазипериодическим колебаниям. Переход к хаосу происходит двумя путями: при малой связи – через синхронизацию на торе и последовательность бифуркаций удвоения периода, при большей связи – через разрушение квазипериодических движений. Развитие семейства режимов завершается жестким переходом на другое семейство, возникшее на базе орбиты более высокого периода.

*Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы».*

## Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of theoretical physics. 1983. Vol. 69, № 1. P. 32.
2. *Пиковский А.С.* О взаимодействии странных аттракторов // Препринт № 79. ИПФ АН СССР. Горький. 1983.
3. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов: Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
4. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов: Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1050.
5. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Квазиоднородные стохастические движения и их разрушение в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв. вузов: Радиофизика. 1988. Т. 31, № 10. С. 627.
6. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. 056212.
7. *Caو L.-Y., Lai Y.-C.* Antiphase synchronism in chaotic systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 1. P. 382.
8. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Стальмахов П.А.* Мультистабильность, синфазная и противофазная синхронизация в системах с бифуркациями удвоения периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 3. С. 63.
9. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
10. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // Радиотехника и Электроника. 1991. Т. 36, № 11. С. 2167.
11. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // Радиотехника и Электроника. 1997. Т. 42, № 8. С. 974.

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 7.07.2006*

## ANTIPHASE SYNCHRONIZATION AND MULTISTABILITY FORMATION IN SYMMETRICALLY COUPLED BISTABLE SYSTEMS

*V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov*

Bifurcational mechanisms of multistability formation on base of regimes of antiphase synchronization in diffusively coupled cubic maps are considered. Bifurcations of periodic orbits inside symmetric invariant subspace, which contains attractors of synchronous oscillations, are studied.