



ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ АСИММЕТРИЧНОГО КОЛЬЦЕВОГО БИЛЛИАРДА С ОТРАЖЕНИЕМ И ПРЕЛОМЛЕНИЕМ ЛУЧЕЙ

В.В. Яновский, С.В. Найденов, А.В. Курило

Исследована хаотическая динамика в кольцевом асимметричном бильярде с отражением и преломлением лучей. Фазовая динамика характеризуется разнообразием динамических режимов, что связано как с проявлением традиционных механизмов хаотизации лучей, так и со сложностью допустимых законов движения. В многолистном симметричном фазовом пространстве проанализированы фазовые перестройки кольцевого бильярда при изменении степени его асимметрии.

Введение

Бильярд – это предельно простая физическая система, в которой движение подчинено законам геометрической оптики. Тем не менее бильярды оказались важной теоретической моделью для развития принципиальных концепций в теории детерминированного хаоса для классической, статистической и квантовой физики [1–9] и др.

Хаотическое поведение лучей обычного бильярда может быть вызвано двумя причинами. Во-первых, расширением произвольного пучка лучей при отражении от рассеивающих участков границы, как в бильярдах Синая [10], или, во-вторых, дефокусировкой лучей при отражении от фокусирующих и нейтральных (прямолинейных) компонентов границы, как в стадионах Бунимовича [11, 12].

Динамика лучей становится более сложной в композитных бильярдах, которые являются удобной моделью для описания распространения световых лучей в составных полостях, заполненных материалами с разной диэлектрической проницаемостью. Такие системы имеют внутренние границы раздела оптически разных сред. На границах происходит отражение и преломление лучей. Наличие этих дополнительных особенностей должно приводить к своеобразным механизмам хаотизации [13]. Так, при «размножении» лучей на границе раздела сред с разными показателями преломления (из одного падающего луча появляются отраженный и преломленный), возникает многозначность в маршрутах следования траекторий бильярда. Каждый допустимый маршрут луча соответствует определенному порядку посещения разных сред. Этот маршрут легко закодировать двоичной последовательностью,

особенно, если бильярд состоит только из двух сред. Маршрут может быть регулярным, квазирегулярным или хаотическим. Это соответствует тому, является ли указанная двоичная последовательность периодической, квазипериодической или хаотической. С другой стороны, каждый маршрут однозначно определяет закон движения луча как последовательность композиций элементарных законов движения (отражение и преломление). Точнее, существует взаимнооднозначное соответствие между маршрутами и законами движения лучей. Поэтому возникают детерминированные периодические, квазипериодические или хаотические законы движения лучей. Хаотическим законам соответствуют сложные, по Колмогорову, последовательности элементарных законов движения. Таких хаотических законов континуум.

Таким образом, в бильярдах с расщеплением лучей присутствует два типа хаотического поведения. С первым из них связана динамическая непредсказуемость, вызванная экспоненциально быстрым разбеганием фазовых траекторий. Второй тип приводит к непредсказуемости закона движения луча. Другими словами, он вызван детерминированно хаотичным законом движения луча [13]. При этом траектории хаотически переходят с одного листа многолистного фазового пространства на другой его лист. В любом бильярде с расщеплением лучей изначально заложена такая специфическая хаотичность. Каждый из механизмов хаотичности в определенной мере существует независимо от другого, несмотря на очевидную взаимосвязь между ними, что и наблюдается в компьютерных экспериментах.

В работе изучена динамика лучей в асимметричном кольцевом бильярде с расщеплением лучей. В нем возникают оба указанных выше типа хаотичности. Бильярд образован парой кругов с разными показателями преломления n_0 (внешний круг) и n_1 (внутренний круг). Один из кругов находится целиком внутри другого, а их центры смещены друг относительно друга на величину Δ (рис. 1). Внешний круг имеет радиус R , который всегда можно принять равным единице. Степень асимметрии задается безразмерным параметром Δ/r , где r – фиксированный радиус внутреннего круга. Рассматриваемый бильярд является естественным обобщением исследованной ранее динамики симметричного кольцевого бильярда [13], состоящего из пары

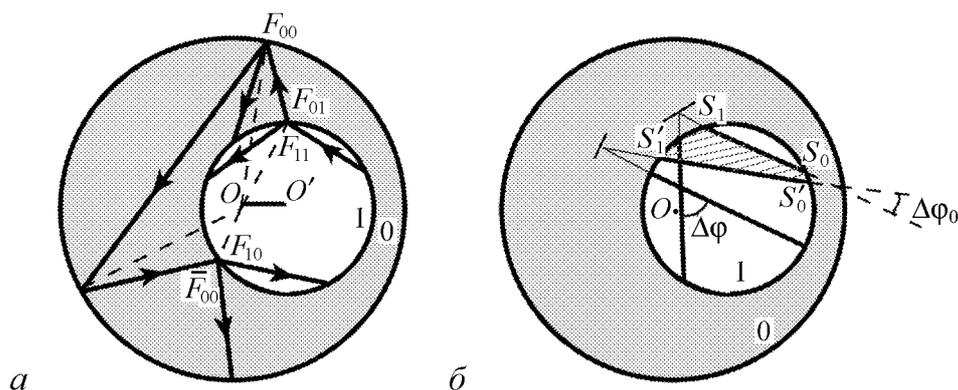


Рис. 1. Асимметричный кольцевой бильярд. Точки O и O' – центры внешней и внутренней окружностей. Показаны несколько элементарных переходов бильярдной траектории и соответствующий им каскад элементарных отображений F_{ij} . Справа показано угловое расширение пучка лучей после однократного преломления. Результат имитируется с помощью отражения от элементарных площадок «эффективной границы»

концентрических кругов с разными показателями преломления. Следует указать, что обычный кольцевой бильярд и преломляющий кольцевой бильярд (то есть бильярд с расщеплением лучей) в последнее время достаточно интенсивно исследуются в связи с разнообразными физическими проблемами, включая квантовый оптический хаос [14–16], хаотическое рассеяние [17], ускорение Ферми [18] и др.

1. Асимметричный кольцевой бильярд с расщеплением лучей

Фазовые траектории симметричного кольцевого бильярда регулярны [13], а сам этот бильярд не эргодичен. В нем реализуется хаос только в смысле неопределенности в порядке посещения разных компонентов бильярда или связанный с хаотичностью законов движения лучей. Хаос фазовых траекторий в обычном смысле, то есть при котором показатель Ляпунова имеет ненулевое значение, здесь не возникает. Однако при сколь угодно малой асимметрии (см. рис. 1) в фазовом пространстве преломляющего кольцевого бильярда появляются хаотические области, связанные с экспоненциальным разбеганием первоначально близких траекторий. Для описания динамики лучей в асимметричном бильярде используем геометро-динамический подход [19, 20]. Изменением интенсивности света пренебрегаем. Динамика лучей задается с помощью отображений, переводящих каждый падающий луч, заданный парой фазовых координат (S_1, S_2) (определяют начало и конец луча на одной из границ бильярда), в последующий луч (\bar{S}_1, \bar{S}_2) , которым может быть как отраженный, так и преломленный луч.

Обе, внешняя и внутренняя границы исследуемого бильярда являются окружностями. Поэтому в качестве естественных координат, определяющих положение точки отражения на них, удобно взять угловые (полярные) координаты. В качестве начала координат для соответствующей угловой координаты одного из концов луча выбирается центр той из окружностей, на которой лежит выделенный конец луча. Фазовое пространство при таком рассмотрении состоит из 4-х идентичных листов T^2 , каждый из которых топологически эквивалентен тору. По координатным осям фазового пространства, в качестве которого будем использовать квадратную развертку тора, отложены всевозможные координаты лучей. Обозначим внешнюю окружность индексом 0, а внутреннюю – индексом 1 (см. рис. 1). Тогда четыре листа фазового пространства соответствуют подпространствам лучей, концы которых попарно лежат на таких границах: лист $|11|$ – оба на внутренней, $|00|$ – оба на внешней, $|01|$ или $|10|$ – один на внутренней, другой – на внешней. Переходы с одного листа на другой описываются посредством пяти элементарных отображений $F_{01}, F_{10}, F_{11}, F_{00}$ и \bar{F}_{00} .

Пусть номер границы одновременно является номером примыкающей к ней среды. То есть внутренняя граница и среда имеют индекс 1, а внешние – 0. Тогда в обозначениях отображений первая цифра показывает, в какую среду попадает луч под действием выбранного отображения, а вторая – из какой среды он выходит. Например, отображение F_{01} переводит луч, падающий на границу 1 из среды 1, в преломленный луч, распространяющийся в среде 0. Отображение \bar{F}_{00} так же, как и F_{00} , оставляет луч в среде 0, но в отличие от F_{00} отражение луча происходит от внутренней границы 1. Далее используем для обозначения координат лучей переменные

(x, y) (до) и (\bar{x}, \bar{y}) (после отражения или преломления). Придадим отображениям следующий вид:

$$F_{00} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{f_{00}(x, y)\} \end{cases}; \quad F_{11} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{f_{11}(x, y)\} \end{cases}; \quad \bar{F}_{00} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{\bar{f}_{00}(x, y)\} \end{cases};$$

$$F_{01} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{f_{01}(x, y)\} \end{cases}; \quad F_{10} : \begin{cases} \bar{x} = \{y\} \\ \bar{y} = \{f_{10}(x, y)\} \end{cases}, \quad (1)$$

где $\{\dots\}$ обозначает взятие дробной части по $\text{mod} 2\pi$. Явные выражения для функций $f_{00}(x, y)$, $f_{10}(x, y)$, $f_{01}(x, y)$, $f_{11}(x, y)$, $\bar{f}_{00}(x, y)$ приведены в Приложении А. Отметим, что эволюция лучей бильярда полностью определяется этими пятью элементарными отображениями.

2. Критерий углового расширения пучков лучей

Как известно, одной из причин возникновения хаоса в бильярдах является механизм перманентного рассеяния лучей, когда любой инфинитезимальный пучок лучей бильярда почти всюду расходится в геометрическом пространстве. Например, в бильярдах Синая при отражении лучей от всюду вогнутой вовнутрь границы. В фазовом пространстве этому соответствует экспоненциальное расхождение первоначально близких траекторий. Поэтому при исследовании бильярдов полезна оценка средней скорости углового расширения (при отражении от разных компонентов границы бильярда) узкого или, в частном случае, плоскопараллельного пучка лучей. Выполним такую оценку для кольцевого бильярда, проследив за расширением узкого пучка лучей после одного акта преломления.

Вычислим угловое расширение пучка лучей с маршрутом 1001, то есть расширение пучка при его возвращения в среду 1 после отражения в среде 0 (см. рис. 1). Угловые размеры падающего и прошедшего пучков связаны выражением $\Delta\varphi = \bar{K}\Delta\varphi_0$, где $\bar{K} = K(S_1, S_2, \Delta\varphi_0)$ – средний коэффициент расширения пучка; (S_1, S_2) – координаты луча, который характеризует пучок, например, центрального или одного из крайних лучей пучка. Для инфинитезимального пучка при $\Delta\varphi_0 \rightarrow 0$ коэффициент расширения определяется формулой

$$K = K(S_1, S_2) = \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\Delta\varphi_0}. \quad (2)$$

Если $K = 1$ при любых значениях фазовых координат, то хаос, связанный с преломлением, не возникает. С другой стороны, если $K > 1$, то существует возможность появления хаотической компоненты движения. При малой асимметрии бильярда связь между $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi_0$ можно получить, используя понятие «эффективной границы», введенной в [13]. Напомним, что с ее помощью можно абстрагироваться от преломления и распространения каждого отдельного луча в среде с другим коэффициентом преломления, заменив этот многоступенчатый процесс отражением от некоторой кривой (это и есть эффективная граница), ограничивающей некоторый эффективный бильярд. Важно, что каждому лучу можно поставить в соответствие только свою эффективную границу, если последняя существует. Для симметричного

бильярда эффективной границей является окружность, радиус которой зависит от разности угловых координат $(S_2 - S_1)$ начального луча. Для асимметричного бильярда понятие эффективной границы можно сохранить только локально, так как расположение элементарной площадки, от которой происходит «эффективное отражение», заменяющее распространение луча во второй среде, теперь будет зависеть уже от обеих координат S_1 и S_2 . В общем случае множество таких элементарных площадок не сводится к гладкой и даже непрерывной кривой.

При малой асимметрии $\Delta \ll r$ понятие «эффективной границы» еще сохраняет свой первоначальный смысл. Полярный радиус для каждой ее элементарной площадки определяется выражением

$$\rho_{\text{eff}}(S_1, S_2) = \frac{r \cos\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)}{\cos\left[\frac{S_2 - S_1}{2} + \xi(S_1, S_2) - \arcsin\left(\frac{r + \Delta \cos S_2}{R} \sin \xi(S_1, S_2)\right)\right]}, \quad (3)$$

причем он отсчитывается от центра большего круга и

$$\xi(S_1, S_2) = \arcsin\left[\frac{n_1}{n_0} \cos\left(\frac{S_2 - S_1}{2} + \frac{\Delta}{2r} (\sin S_2 - \sin S_1)\right)\right] + \frac{\Delta}{r} \sin S_2.$$

Обозначим углы падения крайних лучей пучка на элементарную площадку через θ_1 и θ_2 . Тогда угловая ширина прошедшего и падающего пучка связаны выражением

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + 2(\theta_1 - \theta_2). \quad (4)$$

Для симметричного бильярда углы θ_1 и θ_2 «эффективного отражения» зависят только от разностей угловых координат для крайних лучей пучка и не зависят от разброса $\Delta\varphi_0$. В результате для этого бильярда $K = 1$.

При малых $\Delta/r \ll 1$ коэффициент расширения определяется соотношением (см. Приложение В)

$$K = 1 + \frac{4\Delta}{r} \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left[S_2 + \arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right], \quad (5)$$

где введены функции $A = A(S_1, S_2)$ и $B = B(S_1, S_2)$

$$A(S_1, S_2) = 2 - \frac{\left(\frac{n_1}{n_0}\right) \sin\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{n_1}{n_0}\right) \sin\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)\right]^2}} + \frac{\left(\frac{rn_1}{Rn_0}\right) \sin\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{rn_1}{Rn_0}\right) \sin\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right)\right]^2}},$$

$$B(S_1, S_2) = \cot\left(\frac{S_2 - S_1}{2}\right).$$

Нетрудно заметить, что при определенных значениях (S_1, S_2) существует фазовая область, где коэффициент расширения больше единицы. Например, для всех $S_1 \in [0; \pi/2] \cup [\pi; 2\pi]$ при $S_2 \in [3\pi/2; 2\pi]$ будет $K > 1$ (при этом $B > 0$). Следовательно, в данной системе может наблюдаться хаос, связанный с рассеянием лучей при их прохождении сквозь среду с другим коэффициентом преломления. Исследуем особенности этого поведения более детально на фазовом портрете каскада отображений (1).

3. Фазовый портрет и фазовые перестройки

Изучим фазовый портрет и его перестройки для семейства билиардов при возрастании параметра асимметрии Δ/r . Симметричный случай $\Delta = 0$ рассмотрен ранее [13]. В общем случае фазовая динамика охватывает четыре склеенных друг с другом листа фазового пространства $\Phi = \bigvee_{i,j} \mathbb{T}_{|ij|}^2$, где $i, j = (0, 1)$. Для однозначности динамического описания кроме координат лучей необходимо указывать маршрут их следования. Строго говоря, одновременно с заданием каждого начального луча парой фазовых координат (x, y) необходимо задавать и маршрут его следования. Последний кодируется двоичной последовательностью из нулей и единиц в соответствии с порядком посещения лучом билиардной траектории сред 0 и 1. Очевидно, что каждому маршруту можно поставить в соответствие вещественное число s на единичном отрезке. Таким образом, тройка $\{(x, y); s\}$ однозначно задает начальное условие для эволюции любой билиардной траектории.

Разбив множество всех возможных траекторий на классы эквивалентности в соответствии с допустимыми маршрутами и с учетом возможных правил запрета, навязанных геометрией билиарда, можно исследовать фазовую динамику траекторий соответствующего типа. Для классов, закодированных простейшими периодическими последовательностями вида $11\dots$ или $00\dots$, задача сводится к исследованию динамики обычного билиарда. В первом случае – это обычный билиард во внутреннем круге; во втором – внешний билиард с двухсвязной границей, состоящей из пары окружностей (внешней и внутренней границ исходного билиарда). Оба указанных типа связаны с отражением лучей от границ обычных билиардов. Назовем этот тип динамикой «простого отражения». Новый нетривиальный анализ связан с исследованием класса траекторий с периодическим маршрутом другого вида $[1001001\dots]$. Здесь период – это серия 100. В этом случае учитываются периодически повторяющиеся акты преломления луча при его однократном выходе в другую среду с последующим возвращением в исходную. Поэтому данный тип динамики можно назвать динамикой «простого преломления». Она представляет существенный интерес. Траектории такого типа являются неньютоновскими, так как связаны с законами преломления (следуют из волновой теории). Очевидно, что фазовый портрет траекторий с более сложными, в том числе непериодическими маршрутами, сводится к композиции фазовых портретов простого отражения и преломления, хотя сама последовательность наложения таких элементарных портретов в полном фазовом пространстве может быть достаточно сложной и даже хаотической.

Не всегда маршрут луча можно указать явно. Например, это практически невозможно сделать для хаотических последовательностей, для которых отсутствует какой-либо алгебраический алгоритм восстановления произвольного отрезка последовательности по ее начальному отрезку. Маршрут траектории в общем случае зависит от выбора начальных координат луча. Эта связь не является взаимно-однозначной, так как одному и тому же начальному лучу могут соответствовать разные маршруты из-за возможного расщепления лучей. Тем не менее эта согласованность позволяет использовать другой способ введения понятия маршрута луча. Вначале можно считать, что заданы только начальные координаты луча. Затем, отмечая последовательные отражения и преломления порожденных им траекторий – последовательно строить и перечислять все связанные с этим допустимые маршруты. При этом мож-

но следить за какими-то выделенными типами маршрутов, например, за маршрутом 1001001... «простого преломления». В такой интерпретации в структуре всевозможных маршрутов можно явно обнаружить проявление некоторых правил запрета, которые ограничивают класс допустимых маршрутов, соответствующих определенным множествам начальных точек в фазовом пространстве системы.

В случае простого преломления лучи посещают две среды в порядке $|11\rangle \xrightarrow{F_{01}} |10\rangle \xrightarrow{F_{00}} |01\rangle \xrightarrow{F_{10}} |11\rangle \dots$. Лист с индексом $|00\rangle$ никогда не посещается. Фазовые портреты на каждом листе можно исследовать по отдельности. Ограничимся рассмотрением листа $\mathbb{T}_{|11\rangle}^2$. Для симметричного бильярда этот лист стратифицируется на одномерные инвариантные многообразия (кривые). Распространению луча в обычном геометрическом пространстве соответствует фиксированный сдвиг вдоль указанных инвариантных кривых в фазовом пространстве. Динамика описывается суперпозицией отображений $F = F_{10} \circ F_{00} \circ F_{01}$:

$$F : \begin{cases} \bar{x} = x + I(x_0 - y_0) \bmod 2\pi, \\ \bar{y} = y + I(x_0 - y_0) \bmod 2\pi, \end{cases}$$

куда входит зависящий только от разности координат $x_0 - y_0$ интеграл движения невозмущенного (симметричного) бильярда $I = I(x_0, y_0) = I(x_0 - y_0)$:

$$I = 2 \left\{ \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \frac{x_0 - y_0}{2} \right] - \arcsin \left[\frac{rn_1}{Rn_0} \cos \frac{x_0 - y_0}{2} \right] + \frac{x_0 - y_0}{2} \right\}.$$

При наличии асимметрии отображение примет вид

$$F = \begin{cases} \bar{x} = x + I(x_0 - y_0) + \left(\frac{\Delta}{r}\right) \alpha_1(x, y) \bmod 2\pi, \\ \bar{y} = y + I(x_0 - y_0) + \left(\frac{\Delta}{r}\right) \alpha_2(x, y) \bmod 2\pi, \end{cases} \quad (6)$$

где функции $\alpha_1(x, y)$ и $\alpha_2(x, y)$ уже зависят от обеих координат x и y .

Качественное исследование фазового портрета отображения (6) с ростом величины Δ/r показывает, что инвариантные кривые (прямые линии на развертке тора) невозмущенного бильярда вначале искажаются, причем максимально сильно вблизи диагонали тора (рис. 2). При этом у них снимается вырождение по типу устойчивости периодических траекторий. Фазовые траектории невозмущенного бильярда характеризуются нейтральной устойчивостью, так как оба собственных значения матрицы Якоби линеаризованного отображения всегда равны единице. Возмущенные траектории распадаются на два класса – гиперболические орбиты вдали от диагонали и эллиптические орбиты в окрестности возникающих в результате фазовой перестройки неподвижных точек эллиптического типа. Вначале это неподвижные точки на диагонали фазового пространства. (По определению, на диагонали обе координаты фазовых точек совпадают.) На рис. 2 эти точки имеют координаты $(0, 0)$ и $(2\pi, 2\pi)$. После склейки на торе – это одна и та же точка. Островки устойчивости, хорошо различимые при малой асимметрии (см. рис. 2), охвачены сепаратрисой, обе петли которой замыкаются в гиперболической неподвижной точке (π, π) на диагонали тора. К этой же неустойчивой точке прижаты траектории гиперболической компоненты движения.

Физическая причина перестроек фазового портрета связана с резонансами и напоминает перестройки, наблюдаемые в гамильтоновых системах с увеличением нелинейности [21]. Для асимметричного билиарда нелинейность возрастает с ростом параметра Δ/r (см. соотношение (6)). В окрестности сепаратрисы резонанса возникает узкий хаотический слой, связанный с появлением гомоклинической структуры. Наиболее заметен он в окрестности гиперболических точек. С ростом асимметрии хаотический слой расширяется, как и ширина резонанса. Становятся заметными и хаотические слои резонансов более высоких порядков. Постепенно хаотические слои резонансов перекрываются и при расширении хаотических слоев мера эллиптических островов устойчивости уменьшается. Фактически все фазовое пространство вблизи диагонали заполняется хаотическим морем. При больших деформациях (рис. 3) вдали от диагонали еще сохраняется структура резонансов низких порядков с заметным хаотическим слоем и островами устойчивого эллиптического движения. С ростом асимметрии мера области хаотичности возрастает.

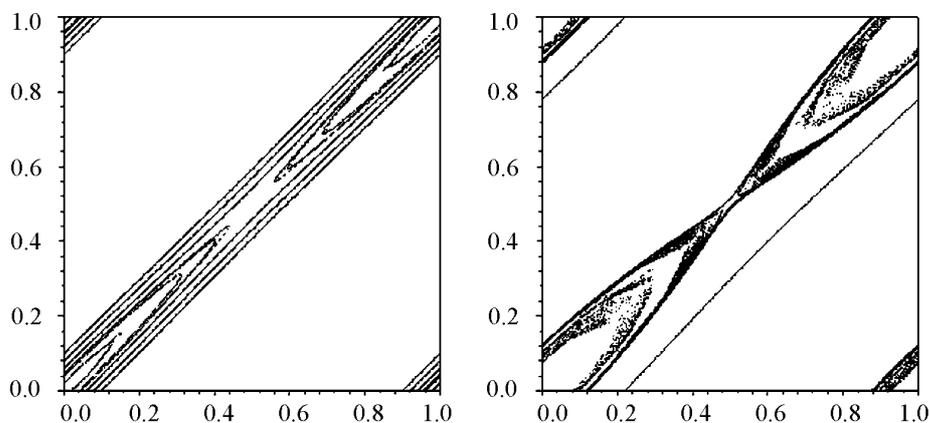


Рис. 2. Фазовые портреты на листе [11] при $\Delta \sim 0.001r$ (слева) и $\Delta \sim 0.01r$ (справа). Показаны типичные траектории вблизи диагонали фазового пространства. Фазовые области во всех углах на торе склеиваются. Проявляется хаотическая паутина вблизи сепаратрис, смыкающихся на диагонали. Вдали от диагонали показана одна из гиперболических траекторий, которая незначительно отличается от инвариантной кривой невозмущенного билиарда

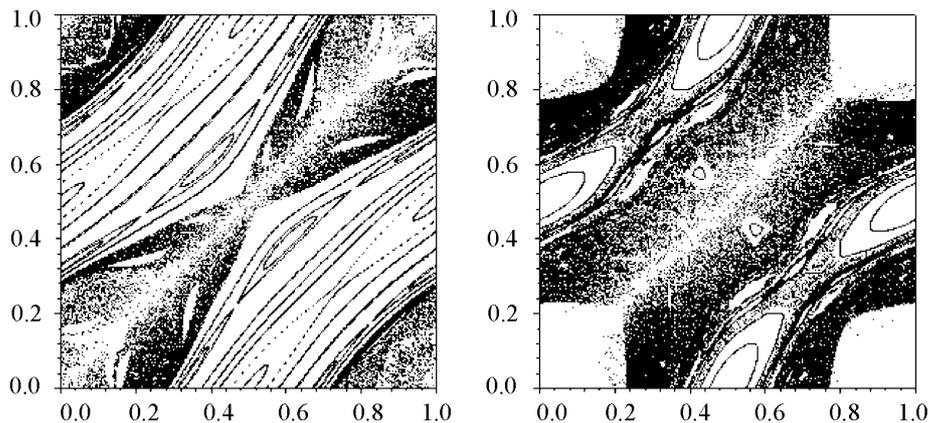


Рис. 3. Фазовые портреты на листе [11] при $\Delta \sim 0.1r$ (слева) и $\Delta \sim 0.2r$ (справа). Фазовое пространство смешанное. Вдали от диагонали перекрываются резонансы (зоны эллиптического движения). Вблизи диагонали наблюдается развитый хаос и пустые квазилакуны, из которых фазовые траектории быстро выталкиваются в остальную часть фазового пространства

Описанные фазовые перестройки относились к классу лучей с одним из наиболее простых маршрутов [100100...]. При этом считалось, что в качестве начального можно выбрать любой луч, выпущенный во внутреннем круге. При анализе этой фазовой динамики по умолчанию допускались любые значения фазовых координат на листе $\mathbb{T}_{|11|}^2$. Вместе с тем, не для всякого начального луча при изменении формы композитного бильярда является допустимым маршрут 100100..., в отличие от симметричного бильярда, где для любого начального луча среди порожденных им траекторий (в результате преломления и отражения лучей) всегда существует траектория с указанным маршрутом. Запрет на этот тип эволюции связан с геометрией (асимметрией) бильярда и состоит в следующем. При распространении луча на некотором начальном этапе требуемый маршрут с периодическим повторением цикла 100 сохраняется. Однако из-за асимметрии бильярда в некоторый момент эволюции преломленный луч, вошедший в среду 0, отразившись от внешней границы, может не попасть на внутреннюю границу (рис. 4). Вместо этого он проходит мимо нее и отражается еще один или большее число раз от внешней границы до тех пор, пока снова не попадет на внутреннюю границу. Только после этого он преломляется и возвращается в среду 1. Можно проверить, что эта задержка всегда будет конечной. Для некоторых траекторий она может стать сколь угодно долгой, если внешняя и внутренняя границы бильярда расположены близко друг к другу, то есть при $\Delta \rightarrow (R - r)$. После однократного отражения во внутреннем круге указанный луч снова выходит во внешнюю среду и опять до своего возвращения может испытать более чем одно отражение от внешней границы и т.д. Маршрут такой траектории в общем случае неперiodический и имеет вид:

в общем случае неперiodический и имеет вид: $\left[1001 \overbrace{0 \dots 0}^{m_1} 1 \overbrace{0 \dots 0}^{m_2} 1 \dots \right]$, где m_1, m_2, \dots могут принимать любые целые значения не меньше 2.

Длительное пребывание луча во внешней среде до возвращения во внутреннюю означает медленное заполнение на фазовом листе $\mathbb{T}_{|11|}^2$ некоторых областей. Они соответствуют начальным лучам, заданным в среде 1, с указанными выше

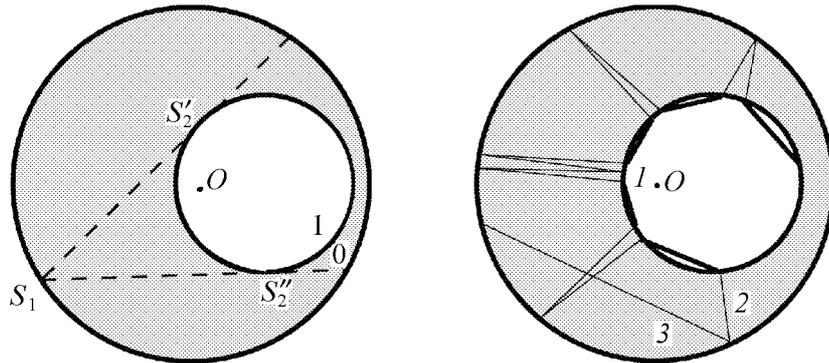


Рис. 4. Происхождение геометрических лакун (слева) и квазилакун (справа). Слева показан ограниченный штрихованными лучами сектор, входящие в который лучи не могут достичь внешней границы 0 из-за наличия внутренней 1. В фазовом пространстве такие лучи попадают в область лакуны на листе $\mathbb{T}_{|00|}^2$. Справа показана траектория, принадлежащая квазилакуне. В маршруте траектории нарушена периодическая последовательность 1001001... из-за появления серии отражений от внешней границы. Начальный луч 1 в фазовом пространстве находится вблизи точки (π, π) . После каскада преломлений и отражений луч 2 отражается от внешней границы, но затем не достигает внутренней 3 и продолжает свою серию отражений от внешней границы

маршрутами. Поэтому даже в развитом хаосе, когда почти вся часть фазового пространства доступна любой фазовой траектории с любым маршрутом, вероятность попадания в эти зоны будет невысока. В отличие от остальных зон на фазовом портрете они выглядят пустыми, поэтому их можно считать «квазилакунами», то есть областями, в которые типичная фазовая траектория практически не заходит. Объем квазилакун увеличивается с ростом асимметрии бильярда (см. рис. 3). Как можно видеть, области квазилакун соответствуют лучам, расположенным ближе к меньшему перешейку между внутренней и внешней границами бильярда. Кроме того, характерным свойством квазилакун является свойство «выталкивания» фазовых траекторий. Отметим, что этим свойством также обладает фазовая диагональ листа $\mathbb{T}_{|11|}^2$. Другими словами, траектории «простого преломления», которые содержат лучи с направлением движения, близким к касательному к внутренней границе (траектории со вставками типа «шепчущих галерей»), практически не наблюдаемы, то есть разрушены потоком.

Как видим, при достаточно большой асимметрии свойства системы сильно отличаются от невозмущенной системы. Для симметричной системы лист $\mathbb{T}_{|00|}^2$ в каскаде с преломлениями не участвовал вовсе. Он частично заполнялся за счет каскада отражений исключительно от внешней границы бильярда, то есть как в обычном кольцевом бильярде, но без отражений от внутренней границы, минуя при этом остальные листы фазового пространства. Любая фазовая траектория этого листа никогда не покидала его. Это свойство частично сохраняется и в случае асимметрии. Однако здесь на листе $\mathbb{T}_{|00|}^2$ уже появляются фазовые траектории, которые многократно приходят на него или уходят с него.

Любой луч внутри среды 1 можно выбрать в качестве начального для последующего каскада с преломлением и отражением лучей. Можно проверить, что для любого начального луча, выпущенного из внутреннего круга (фазовой точки на листе $|11|$), существует критический параметр асимметрии, при котором топология допустимых маршрутов разрешает сколь угодно длинные серии непрерывающихся посещений фазовой траекторией листа $|00|$. Так как во время движения во внешнем или внутреннем круге любая траектория ведет себя регулярным образом (как отдельная траектория кругового бильярда), то появление таких серий можно интерпретировать как длинные ламинарные фазы, изредка прерываемые быстрыми переходами из внешнего круга во внутренний и обратно. Такая динамика носит характер своеобразной перемежаемости, порожденной преломлением лучей. При этом доля траекторий, полученных в результате расщепления лучей, которые находятся в среде 0, в среднем будет больше доли траекторий, находящихся в среде 1. Как показывают численные расчеты, эта тенденция усиливается с ростом Δ и уменьшением r/R или n_1/n_0 .

4. Физические особенности фазовой динамики

Существует еще одна причина усложнения структуры маршрутов и появления настоящих лакун в фазовом пространстве кольцевого бильярда. Физически она связана с явлением полного внутреннего отражения. Для определенности примем $n_1 < n_0$, то есть показатель преломления внутренней среды асимметричного бильярда меньше, чем показатель преломления внешней среды. Тогда при распространении

нии луча в среде 0 он может попасть на внутреннюю границу под углом большим критического $\theta_{cr} = \arcsin(n_1/n_0)$. В этом случае он уже не проходит в менее плотную среду, а только отражается назад во внешней среде. Условие, при котором это происходит, можно записать в выбранных угловых координатах

$$\left| \frac{\rho \sin(\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1)}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1)}} \right| > \frac{n_1}{n_0}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{S}_{1,2} = S_{1,2} + \arcsin\left(\frac{\Delta}{\rho} \sin S_{1,2}\right), \quad \rho = \sqrt{R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta \cos S_1}.$$

Если оно выполняется, то фазовая точка при очередной итерации формально попадает в запрещенную область на соответствующем листе $\mathbb{T}_{|11|}^2$, так как физически преломленный луч не существует. Множество всех таких точек и образует лауну. Аналогично при $n_1 > n_0$ появляется лакуна на листе $|00|$. Ей соответствует множество лучей во внутренней области бильярда, угол падения которых (на предыдущем шаге каскада) на внутреннюю границу больше критического. Отметим, что в общем случае наличие полного внутреннего отражения может также приводить к прореживанию допустимых маршрутов лучей.

В полный фазовый каскад вовлечены недиагональные листы $|01|$ и $|10|$. Рассмотрим один из них, например, $\mathbb{T}_{|01|}^2$. Принципиальной разницы между ними нет из-за обратимости траекторий бильярда. Поэтому фазовые портреты на этих листах будут одинаковыми. Для недиагональных листов существенным является возникновение лакун полного внутреннего отражения и геометрических лакун, обусловленных геометрией бильярда. Последние соответствуют лучам бильярда, которые попадают в область геометрической тени. На рис. 4 показано, что при фиксированном значении одной из координат луча S_1 на лист $|10|$ попадают только такие лучи, вторая координата которых лежит в промежутке $[S'_2, S_2]$. Все остальные лучи продолжают оставаться на листе $|00|$. Стоит отметить, что их дополнение на листе $\mathbb{T}_{|00|}^2$, в свою очередь, образует лауну – область геометрической тени, вызванную наличием внутренней границы.

Для симметричного бильярда все фазовые листы стратифицируются на одномерные инвариантные многообразия [13]. Для асимметричного бильярда все листы могут иметь хаотические области. На листах $|01|$ и $|10|$ образование хаотических зон наиболее интенсивно идет в областях, близких к диагонали фазового пространства, особенно вблизи точки $(0, 0)$. Это показано на рис. 5. В геометрическом пространстве хаотическая зона соответствует лучам, которые падают на внутреннюю границу под минимальными углами, в том числе в самом узком месте между внутренней и внешней границами. Именно для таких лучей угловое расширение пучков или разбегание фазовых траекторий максимально. В остальной части недиагональных фазовых листов динамика сильно замедлена и фазовые области долго остаются пустыми, так как их посещение затруднено эффектами полного внутреннего отражения и наличием геометрических лакун. Описанное динамическое поведение хорошо подтверждается в компьютерных экспериментах.

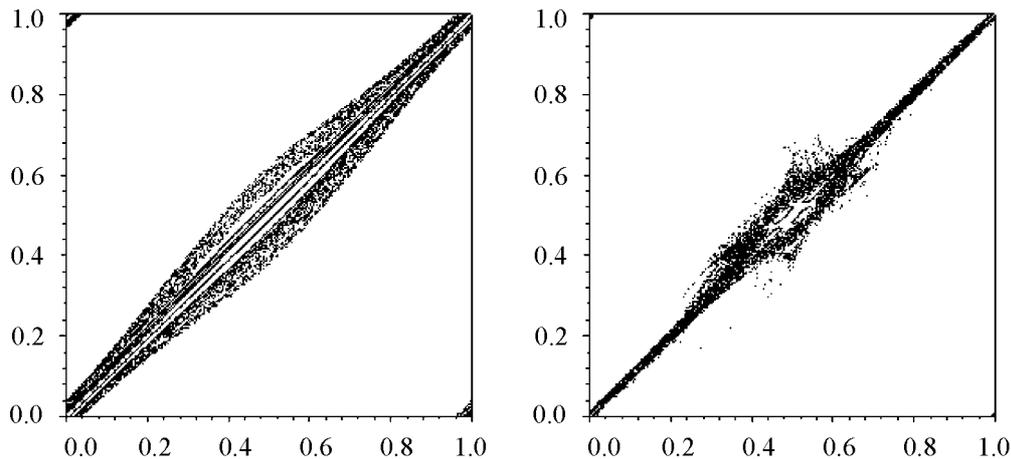


Рис. 5. Фазовый портрет на листе $|01|$ при Δ приблизительно равном $0.1r$ (слева) и при $0.3r$ (справа)

Что касается поведения показателя Ляпунова для типичной хаотической траектории, то на промежуточном этапе (при изменении Δ/r в интервале от 0 до 0.2), когда происходят описанные в предыдущих разделах фазовые перестройки, он ведет себя крайне нерегулярным образом (рис. 6). Это связано с появлением и исчезновением в фазовом пространстве регулярных островков устойчивости достаточно большого объема (см. рис. 3). Формально, появление каждого нового островка устойчивости должно сопровождаться уменьшением показателя Ляпунова, а его исчезновение – возрастанием. При большой асимметрии почти все островки разрушены и показатель Ляпунова начинает монотонно возрастать с ростом асимметрии. Он достигает своего максимального значения, когда внутренний и внешний круги кольцевого бильярда касаются друг друга.

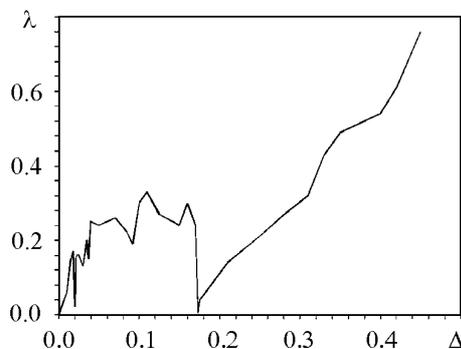


Рис. 6. Показатель Ляпунова типичной хаотической траектории (маршрут 100100...) при изменении управляющего параметра Δ (радиусы внешнего и внутреннего круга бильярда фиксированы $R = 2r = 1$)

Заключение

На примере сравнительно простого асимметричного кольцевого бильярда с расщеплением лучей установлены характерные особенности фазовой динамики лучей, которая допускает отражение и преломление. Помимо традиционных механизмов хаотизации лучей важную роль играет непредсказуемость их закона движения, который определяется маршрутом луча и может быть закодирован двоичной последовательностью, периодической или хаотической.

В бильярде с расщеплением лучей реализуется новый механизм хаоса, обусловленный континуальностью множества допустимых маршрутов лучей, среди которых заведомо присутствуют случайные маршруты. Обычно в динамических си-

стемах или отображениях хаос инициирует нелинейность, заложенная в уравнениях движения. В данном случае помимо этого фактора новым «элементом» является разномножение и преломление лучей на внутренней границе раздела сред. Это приводит к новым динамическим эффектам в таких системах. Можно надеяться, что и в других бильярдах с расщеплением лучей следует ожидать обнаруженные в кольцевом бильярде особенности регулярной и хаотической динамики и тонкое влияние эффекта расщепления лучей на динамические и статистические характеристики такой бильярдной системы.

Приложение А

Рассмотрим асимметричный бильярд (см. рис. 1). В качестве лабораторной системы отсчета S выберем полярную систему координат (ρ, φ) с центром в точке O (нештрихованные координаты). Полярная система координат (ρ', φ') с центром в точке O' будет вспомогательной системой отсчета S' (штрихованные координаты). Некоторые соотношения вначале удобно получать в системе S' , а затем переходить к лабораторной системе. Получим отображения, описывающие распространение луча. Отображение F_{01} переводит луч (φ_1, φ_2) из среды 1 в луч (φ_2, φ_3) в среде 0.

Для любой точки декартовой плоскости связь между ее угловыми координатами в системах S и S' определяется формулой

$$\varphi' = \varphi + \arcsin \left(\frac{\Delta}{\rho} \sin \varphi \right) .$$

Для точек, находящихся на внешней и внутренней границах бильярда, соответственно,

$$\rho' = \sqrt{R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta \cos \varphi} , \quad \varphi' = \varphi + \arcsin \left(\frac{\Delta}{\rho'} \sin \varphi \right) ,$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos \varphi'} , \quad \varphi = \varphi' - \arcsin \left(\frac{\Delta}{\rho} \sin \varphi' \right) .$$

Падающий луч в среде 1 имеет наклон

$$k'_1 = \tan \varphi'_2 \equiv k_1 = \frac{R \sin \varphi_2 - \rho_1 \sin \varphi_1}{R \cos \varphi_2 - \rho_1 \cos \varphi_1} ,$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos \left(\varphi_1 + \arcsin \left(\frac{\Delta}{r} \sin \varphi_1 \right) \right)} .$$

Наклон преломленного луча (φ_2, φ_3) в среде 0

$$k_2 = \tan (\varphi'_2 + N\beta) ,$$

где $N = \text{sign} (\varphi'_2 - \varphi'_1)$ и штрихованные координаты следует выразить через нештрихованные по предыдущим формулам. Угол преломления луча (φ_1, φ_2) в системе S'

$$\beta = \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_2 - \varphi'_1}{2} \right) \right] .$$

Уравнение прямой, на которой лежит преломленный луч, в полярных координатах имеет вид

$$\rho \sin \varphi = k_2 \rho \cos \varphi + b_2 .$$

Коэффициент b_2 определяется из условия, что точка $S_2 = (\rho_2 \cos \varphi_2, \rho_2 \sin \varphi_2)$ принадлежит этой прямой, то есть из уравнения

$$b_2 = \rho_2 \sin \varphi_2 - k_2 \rho_2 \cos \varphi_2 ,$$

где

$$\rho_2 = \sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos \left(\varphi_2 + \arcsin \left(\frac{\Delta}{r} \sin \varphi_2 \right) \right)} .$$

Угловая координата φ_3 точки S_3 определяется из условия пересечения указанной прямой окружностью $\rho = R$. Решая уравнения относительно φ , получим два возможных решения

$$\varphi_3 = \varphi_{\pm} = 2 \arctan \left(\frac{R \pm \sqrt{R^2 (1 + k_2^2) - b_2^2}}{b_2 + k_2 R} \right) .$$

Выбираем из них то, которое удовлетворяет условию $\varphi_2 \in [\varphi_2 - \theta_2, \varphi_2 + \theta_1]$. Здесь

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{\rho}{R} \cos \zeta \right) + \zeta ; \quad \theta_2 = \arccos \left(\frac{\rho}{R} \cos \zeta \right) - \zeta ; \quad \zeta = \arcsin \left(\frac{\Delta}{r} \sin \varphi_2 \right) .$$

Отображение F_{00} связывает луч (φ_2, φ_3) с лучом (φ_3, φ_4) после отражения от внешней границы. Наклон отраженного луча (φ_3, φ_4) в лабораторной системе

$$k_3 = \tan \varphi_4 = \tan (\varphi_4 - 2\delta) ,$$

где δ – угол отражения от внешней границы в точке S_3

$$\delta = \delta (\varphi_2, \varphi_3) = \arctan \left[\frac{\rho_2 \sin (\varphi_3 - \varphi_2)}{R - \rho_2 \cos (\varphi_3 - \varphi_2)} \right] .$$

Выполним аналогичные вычисления в системе S' с учетом того, что угловая координата точки S_4 определяется из условия пересечения прямой, на которой лежит луч (φ_3, φ_4) , с окружностью $\rho' = r$. Наклон этой прямой не зависит от выбора системы отсчета, то есть $k_2 = k'_2$, где k_2 выражена в лабораторных, а k'_2 в штрихованных координатах. Уравнение прямой в полярных координатах

$$\rho' \sin \varphi' = k'_3 \rho' \cos \varphi' + b'_3 .$$

Из условия, что этой прямой принадлежит точка $S_3 = (\rho'_3 \cos \varphi'_3, \rho'_3 \sin \varphi'_3)$, определяется постоянная b'_3

$$b'_3 = \rho'_3 (\sin \varphi'_3 - k'_3 \cos \varphi'_3) ,$$

где

$$\varphi'_3 = \varphi_3 + \arcsin \left(\frac{\Delta}{\rho'_3} \sin \varphi_3 \right) ; \quad \rho'_3 = \sqrt{R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta \cos \varphi_3} .$$

Для точки $S_4 = (r \cos \varphi'_4, r \sin \varphi'_4)$ получим

$$\varphi'_4 = \varphi'_\pm = 2 \arctan \left(\frac{r \pm \sqrt{r^2 (1 + k_3^2) - b_3^2}}{b_3 + k_3 r} \right).$$

Возвращаясь в лабораторную систему координат, получим

$$\varphi_4 = \varphi_\pm = \varphi'_\pm - \arcsin \left(\frac{\Delta \sin \varphi'_\pm}{\sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos \varphi'_\pm}} \right),$$

где штрихованные величины должны быть выражены через нештрихованные. Одно из решений нефизическое и соответствует второй (более удаленной от точки S_3) точке пересечения прямой с внутренней окружностью. Его следует отбросить. Искомое значение φ_4 определяется из условия минимальности длины отрезка $|S_3 S_4|$.

В отличие от симметричного бильярда при некоторых начальных данных луч после отражения от границы 0 может не попасть на границу 1. Это происходит при условии $r^2 (1 + k_3^2) - b_3^2 \leq 0$, когда квадратный корень в выражении для φ'_\pm становится мнимым. В этом случае угловая координата точки S_4 на внешней окружности равна $\varphi_4 = \pi + \varphi_3 - 2\delta$, то есть это сдвиг угловой переменной как для обычного бильярда в круге.

Отображение F_{10} переводит луч (φ_3, φ_4) из среды 0 в луч (φ_4, φ_5) в среде 1. При этом угол падения γ на внутреннюю границу связан с углом преломления ε соотношением

$$\sin \varepsilon = \frac{n_1}{n_0} \sin \gamma.$$

Угловая координата точки S_5 во вспомогательной системе отсчета определяется из системы уравнений

$$\varphi'_5 = \varphi'_4 + (\pi - 2\varepsilon); \quad \gamma = \varphi'_4 - \varphi_3 + \delta(\varphi_1, \varphi_2),$$

в которую входит и предыдущее уравнение. В этих уравнениях все величины должны быть выражены в штрихованных координатах. Эти уравнения легко получить из геометрических соображений. После обратного перехода в лабораторную систему отсчета получим нужный результат для φ_5 . Явные громоздкие выражения опускаем. Отметим только, что для определения φ_5 необходимо указать угол отражения δ при предыдущем отражении луча в среде 0, но окончательно этот угол можно выразить только в координатах φ_3 и φ_4 .

Отображение F_{11} связывает падающий луч (φ_1, φ_2) с отраженным $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ во внутренней среде. Поэтому его проще всего получить в штрихованной системе отсчета. В ней точка \bar{S}_2 имеет угловую координату $\bar{\varphi}'_2 = 2\varphi'_2 - \varphi'_1$ (как для бильярда в круге). Переходя в лабораторную систему, получим

$$\bar{\varphi}_2 = (2\varphi'_2 - \varphi'_1) - \arcsin \left[\frac{\Delta \sin (2\varphi'_2 - \varphi'_1)}{\sqrt{r^2 + \Delta^2 + 2r\Delta \cos (2\varphi'_2 - \varphi'_1)}} \right],$$

где штрихованные величины следует выразить через нештрихованные. Отображение $(S_3, S_4) \xrightarrow{F_{00}} (\bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_2)$ соответствует отражению луча от внутренней границы, но снаружи, во внешней среде 0. Громоздкое выражение для него также опускаем.

Приложение В

Проследим за распространением пучка лучей (не обязательно узкого) в симметричном бильярде. Для полного описания пучка достаточно задать три независимых координаты:

$$\varphi_1 - \varphi_0 ; \varphi'_1 - \varphi'_0 ; \Delta\varphi_0 .$$

При распространении в среде 0 пучок имеет угловой разброс $\Delta\varphi_0$. После преломления ширина пучка станет равной $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = 2(\theta_1 - \theta_2) + \Delta\varphi_0 ,$$

где

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} - \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right) \right] + \arcsin \left[\frac{r}{R} \frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right) \right] ;$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} - \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} \right) \right] + \arcsin \left[\frac{r}{R} \frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} \right) \right] .$$

Нетрудно получить, что $\partial\Delta\varphi/\partial\Delta\varphi_0 = 1$, то есть в этом случае коэффициент расширения пучка равен единице.

Для описания пучка в несимметричном кольцевом бильярде требуется задать не три, а четыре переменных. В их качестве удобно взять

$$\varphi_1 - \varphi_0 ; \varphi'_1 - \varphi'_0 ; \varphi_0 ; \Delta\varphi_0 .$$

Ширина прошедшего пучка определяется аналогичным выражением

$$\Delta\varphi = 2(\theta_1 - \theta_2) + \Delta\varphi_0 ,$$

но функции θ_1 и θ_2 имеют другой вид

$$\theta_1 = \alpha_1(\varphi_1, \varphi_0) - \mu_1(\varphi_1, \varphi_0) ; \theta_2 = \alpha_2(\varphi'_1, \varphi'_0) - \mu_2(\varphi'_1, \varphi'_0) .$$

Коэффициент расширения инфинитезимального пучка равен

$$\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\Delta\varphi_0} = 2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\Delta\varphi_0} - 2 \frac{\partial\theta_2}{\partial\Delta\varphi_0} + 1 .$$

Так как θ_1 является функцией только независимых переменных $\varphi_1 - \varphi_0$ и φ_0 , то первое слагаемое в правой части последнего выражения обращается в ноль. Вычислим функцию θ_2 . Величина α_2 определяется из уравнения

$$\frac{r + \Delta \cos \varphi'_1}{\sin(\alpha_2 + \varphi_1 - \varphi_0)} = \frac{r + \Delta \cos \varphi'_0}{\sin \alpha_2} .$$

Его решение можно представить в виде

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \Delta\zeta .$$

Применяя теорию возмущений по Δ , находим выражение для неизвестной величины ζ

$$\zeta = \frac{1}{2r} (\sin \varphi'_1 - \sin \varphi'_0) .$$

В силу того что отклонение от симметрии мало $\Delta \rightarrow 0$, можно принять

$$\mu_2 = \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \frac{\Omega'_2 - \Omega'_1}{2} \right) \right] + \Omega'_2 - \\ - \arcsin \left[\frac{r + \Delta \cos \varphi_1}{R} \sin \left(\arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \frac{\Omega'_2 - \Omega'_1}{2} \right) \right] + \Omega'_2 \right) \right] .$$

Учтем, что $\varphi'_1 = \varphi_1 + \delta_1$ и $\varphi'_0 = \varphi_0 + \delta_0$. Для простоты также примем $\delta_0 = 0$. Тогда функция $\theta_2 = \theta_2(\varphi_1, \varphi_0)$ приводится к виду

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \Delta \frac{1}{2r} \cot \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} \right) (\cos \varphi'_0 - \cos \varphi'_1) - \\ - \arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \frac{\Omega'_2 - \Omega'_1}{2} \right) \right] - \Omega'_2 + \\ + \arcsin \left[\frac{r + \Delta \cos \varphi_1}{R} \sin \left(\arcsin \left[\frac{n_1}{n_0} \cos \left(\frac{\varphi'_1 - \varphi'_0}{2} + \frac{\Omega'_2 - \Omega'_1}{2} \right) \right] + \Omega'_2 \right) \right] ,$$

где $\varphi'_0 = \varphi_0$, $\varphi'_1 = \varphi_1 + \delta_1$, $\Omega'_1 \cong \frac{\Delta}{r} \sin \varphi_0$, $\Omega'_2 \cong \frac{\Delta}{r} \sin [\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \delta_1]$.

Отсюда определяется коэффициент расширения пучка

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \Delta \varphi_0} = 1 - 2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \delta_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial \Delta \varphi_0} .$$

Связь между $\Delta \varphi_0$ и δ_1 легко определить, если считать что распространяющийся пучок является узким и принять $\varphi'_0 = \varphi_0$. В этом случае $\Delta \varphi_0 \cong \delta_1/4$. Тогда $\partial \Delta \varphi / \partial \Delta \varphi_0 = 1 + 8C$, где $C = -\partial \theta_2 / \partial \delta_1$. Дифференцируя θ_2 по δ_1 и введя обозначения A и B

$$A = 2 - \left(\frac{r}{R} \right) \left(\frac{n_1}{n_0} \right) \left(1 - \frac{R}{r} \right) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \times \\ \times \left\{ \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_0} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \left[1 - \left(\frac{rn_1}{Rn_0} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} ; \\ B = \cot \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \right) ,$$

получим окончательное выражение для коэффициента расширения пучка:

$$K = 1 + \frac{4\Delta}{r} (A \cos \varphi_1 - B \sin \varphi_1) ,$$

причем здесь $A \in [1, 2]$ и $B > 0$, так как $\varphi_0 < \varphi_1$ по построению пучка. Тригонометрическим преобразованием эту формулу легко привести (в обозначениях $\varphi_0 \rightarrow S_1$ и $\varphi_1 \rightarrow S_2$) к выражению (5). Из последнего выражения видно, что при разных значениях угловых параметров пучка, коэффициент его расширения может быть больше или меньше единицы. В частности, при $\pi/2 < \varphi_0 < \varphi_1 < \pi$ коэффициент меньше единицы, а при $3\pi/2 < \varphi_0 < \varphi_1 < 2\pi$ – больше единицы.

Библиографический список

1. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
2. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
3. *Benettin G., Strelcyn J.-M.* Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy // *Phys. Rev.* 1978. Vol. A 17, № 2. P. 773.
4. *Berry M.V.* Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard // *European J. Phys.* 1981. Vol. 2, issue 2. P. 91.
5. *Лазуткин В.Ф.* Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. Л.: ЛГУ, 1981.
6. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
7. *Gutzwiller M.C.* Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990.
8. *Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г.* Механизм ускорения Ферми в рассеивающих бильярдах с возмущаемыми границами // *ЖЭТФ.* 1999. Т. 116, № 5. С. 1781.
9. Proceedings of the International Conference on Classical and Quantum Billiards // *J. Stat. Phys.* 1996. Vol. 83, № 1-2. P. 1.
10. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // *Докл. АН СССР.* 1963. Т. 153, №6. С. 1261.
11. *Бунимович Л.А.* Об убывании корреляций в динамических системах с хаотическим поведением // *ЖЭТФ* 1985. Т. 89, № 4(10). С. 1452.
12. *Bunimovich L.A.* Conditions of stochasticity of two-dimensional billiards // *Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 187.
13. *Барьяхтар В.Г., Яновский В.В., Найдёнов С.В., Курило А.В.* Хаос в композитных бильярдах // *ЖЭТФ* 2006. Т. 130, № 2(8). С. 335.
14. *Hentschel M., Richter K.* Quantum chaos in optical systems: The annular billiard // *Phys. Rev.* 2002. Vol. E 66. P. 056207-1 - 056207-13.
15. *Blumel R., Antonsen T.M., Georgeot B., Ott E., Prange R.E.* Ray splitting and quantum chaos // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 4. С. 3284.
16. *Hentschel M., Richter K.* Quantum chaos in optical systems: The annular billiard // *Phys. Rev.* 2002. Vol. E 66. P. 056207.
17. *Doron E., Frischat S.D.* Semiclassical description of tunneling in mixed systems: case of the annular billiard // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75. P. 3661.
18. *Carvalho R.E. de, Souza F.C., Leonel E.D.* Fermi acceleration on the annular billiard // *Phys. Rev.* 2006. Vol. E73, P. 066229.
19. *Найдёнов С.В., Яновский В.В.* Геометрические особенности нелинейной динамики систем с упругими отражениями // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2002. Т. 10, № 1-2. С. 113.
20. *Найдёнов С.В., Яновский В.В., Тур А.В.* Бильярдная проблема в симметричных координатах // *Письма в ЖЭТФ.* 2002. Т. 75, № 8. С. 499.

21. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Новосибирск. Препринт ИЯФ, № 267, 1969.

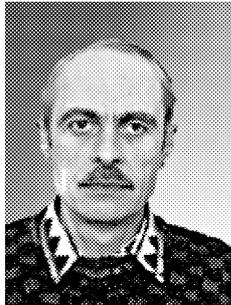
*Институт монокристаллов
НАН Украины, Харьков*

*Поступила в редакцию 14.06.2006
После доработки 23.10.2006*

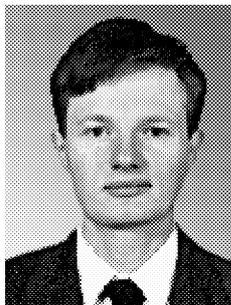
CHAOTIC MODES OF ASYMMETRIC CIRCULAR BILLIARD WITH BEAMS REFLECTION AND REFRACTION

V.V. Yanovsky, S.V. Naydenov, A.V. Kurilo

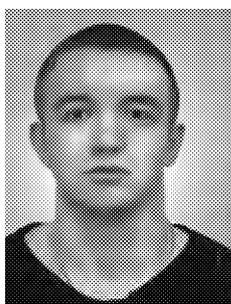
The paper studies the chaotic dynamics in circular asymmetric billiard with beams reflection and refraction. Phase dynamics is characterized by a variety of dynamics modes, which is connected with the effect of traditional chaotization mechanisms as well as with the complicity of allowable motion laws. In the multisheet symmetric phase space, the circular billiard reconstructions have been analysed its asymmetry degrees changes.



Яновский Владимир Владимирович – родился в 1950 году в г. Полтава, окончил Харьковский государственный университет в 1973 году. После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков). В настоящее время работает в Институте монокристаллов (ИМ) НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований (1983) и доктора физико-математических наук в ИМ НАНУ (1996) в области теоретической физики. Область научных интересов – теоретическая физика, хаос и теория турбулентности, нелинейная физика. Автор более 160 научных публикаций.



Найдёнов Сергей Вячеславович – родился в 1968 году в г. Харькове, окончил Харьковский государственный университет в 1993 году. После окончания ХГУ работает в Институте монокристаллов (ИМ) НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в ИМ НАНУ (1998) в области теоретической физики. Область научных интересов – теоретическая и математическая физика, детерминированный хаос, теория конденсированного состояния вещества. Лауреат премии Президента Украины для молодых ученых (2003). Автор более 70 научных публикаций.



Курило Артем Викторович – родился в 1981 году в г. Купянске Харьковской области, окончил Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина в 2004 году. После окончания ХГУ работал в Институте монокристаллов НАН Украины. Область научных интересов – теоретическая физика, нелинейные явления и детерминированный хаос. Автор 3 научных публикаций.