



## ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕЧЕНИЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ПРИ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОМ НАГРЕВЕ

*Д.С. Голдобин*

В работе исследуются свойства локализации термоконвективных течений в тонком горизонтальном слое при заданном потоке тепла поперек слоя и то, как на эти свойства влияет прокачивание жидкости в горизонтальном направлении. Навязываемый тепловой поток не зависит от времени, но случайно неоднороден в пространстве вдоль одного из горизонтальных направлений (рассматривается двухмерная задача; средний по слою тепловой поток близок к критическому). Интерпретация результатов линейной теории подкреплена численным интегрированием полной нелинейной задачи. Полученные результаты справедливы не только для конвекции жидкости в пористой среде, но и для конвекции в однородной жидкости и для некоторых других гидродинамических систем.

### Введение

Эффекты локализации в распределенных системах со случайно неоднородными параметрами впервые привлекли широкое внимание в связи с явлениями в квантово-механических системах (локализация Андерсона [1, 2]). Позже подобные эффекты были обнаружены и исследовались не только для случайной, но и для квазипериодической модуляции параметров (например, [3, 4]). Локализация изучалась также и в некоторых гидродинамических системах (например, [5]).

В данной работе рассматривается тепловая конвекция в горизонтальном слое со случайной стационарной пространственной неоднородностью нагрева. Ранее, в работе [6], исследовалось влияние такой неоднородности на порог устойчивости в одномерном уравнении Ландау – Гинзбурга, но свойства локализации решений в линеаризованном варианте этой системы не отличаются от таковых в стационарном уравнении Шредингера с потенциалом в виде  $\delta$ -коррелированного гауссова шума (подробно описанных, например, в [7]). Гидродинамическая система, фигурирующая в настоящей работе, описывается уравнением, линеаризация которого может быть сведена к упомянутому уравнению Шредингера лишь в отсутствие горизонтального прокачивания жидкости через слой. Кроме того, есть существенная разница в наблюдаемости эффектов, связанных с формальными свойствами уравнений, описывающих разные по своей природе системы.

Данная работа посвящена анализу вопроса об интерпретации локализации формальных решений линеаризованного варианта уравнений, описывающих тепловую конвекцию в тонком слое при случайно неоднородном нагреве, исследованию влияния на эти свойства прокачивания жидкости и наблюдению проявления этих свойств в исходной нелинейной системе.

## 1. Тепловая конвекция в тонком горизонтальном слое

Рассматривается подогреваемый снизу горизонтальный слой пористой среды, насыщенный жидкостью. Система координат выбирается так, что плоскость  $(x, y)$  горизонтальна, а  $z = 0$  и  $z = h$  – нижняя и верхняя границы слоя, соответственно. Верхняя и нижняя границы слоя непроницаемы для жидкости и обладают низкой теплопроводностью, что подразумевает заданный тепловой поток через границы. Этот тепловой поток полагается стационарным, но может быть неоднороден в горизонтальных направлениях:  $Q(x, y) = Q_{\text{cr}}(1 + \varepsilon^2 q(x, y))$ , где  $Q_{\text{cr}}$  – критическое значение теплового потока, при котором в однородном слое возникают конвективные течения;  $\varepsilon^2$  – характерная величина относительных отклонений.

Характерные горизонтальные размеры неоднородностей нагрева полагаются большими по сравнению с толщиной слоя:  $h|\nabla q|/|q| \sim \sigma \ll 1$ , – а  $\varepsilon \ll 1$ . Тогда в описанной системе будут развиваться длинноволновые структуры [8] с характерным горизонтальным масштабом  $L = \varepsilon^{-1}h$ , который удобно выбирать за единицу измерения горизонтальных координат.

Поскольку в используемой нами постановке задачи уравнения тепловой конвекции жидкости, насыщающей пористую среду, подобны таковым, например, для конвекции в слое однородной [9] или турбулентной жидкости [10], мы позволяем себе не останавливаться здесь на исходных уравнениях и выводе уравнений длинноволнового приближения в конкретной задаче, а сразу приводим безразмерное уравнение длинноволновой конвекции в слое пористой среды, ограничившись приведенной выше постановкой задачи.

В длинноволновом приближении (или, что то же самое, приближении тонкого слоя) возмущения температуры остаются почти постоянными поперек слоя  $\theta = \theta(x, y)$  и при соответствующем выборе единиц измерения их эволюция описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\theta} - \nabla P_{\text{adv}} \nabla \theta &= -\Delta^2 \theta + \nabla (-q(x, y) \nabla \theta + \nabla \theta (\nabla \theta)^2), \\ \Delta P_{\text{adv}}(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $P_{\text{adv}}(x, y)$  – давление, связанное с возможным вынужденным прокачиванием жидкости через слой (прокачивание может быть навязано за счет условий на боковых границах слоя), скорость прокачивания  $\vec{u}_{\text{adv}} = -\nabla P_{\text{adv}}$ ; поскольку  $\theta$ ,  $P_{\text{adv}}$  и  $q$  зависят только от горизонтальных координат, все операторы дифференцирования двумерны.

В настоящей работе рассматривается случай  $q(x, y) = q_0 + \xi(x)$ , где  $\xi(x)$  – нормированный гауссовский  $\delta$ -коррелированный шум<sup>1</sup>,  $\langle \xi(x) \rangle = 0$ ,

<sup>1</sup>Приближение  $\delta$ -коррелированного шума не противоречит длинноволновому приближению – достаточно соблюсти следующую иерархию малости величин:  $\varepsilon \ll \sigma^2 \ll 1$ .

$\langle \xi(x + x') \xi(x) \rangle = 2\delta(x')$  (интенсивность шума обращена в единицу подходящим выбором единиц измерения), и исследуются однородные вдоль  $y$  решения, для которых скорость прокачивания  $-\nabla P_{\text{adv}} = u \vec{e}_x$  ( $\vec{e}_x$  – орт оси  $x$ ),  $u = \text{const}$ . Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\dot{\theta} = (-u\theta - \theta_{xxx} - [q_0 + \xi(x)]\theta_x + (\theta_x)^3)_x. \quad (2)$$

Можно отметить, что поле скорости жидкости в главном порядке имеет вид

$$\vec{v} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{e}_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{e}_z, \quad \Psi = f(z) \psi(x) = \Psi_0 \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \theta_x, \quad (3)$$

где  $\psi(x) \equiv \theta_x(x)$  – амплитуда функции тока; константа  $\Psi_0$  определяется выбором единиц измерения. Здесь не фигурирует вклад в скорость от прокачивания, поскольку его характерные значения малы на фоне конвективных течений. Существенное же влияние прокачивания на систему связано с тем, что его пространственная симметрия отличается от симметрии конвективных течений: у конвективных течений суммарный поток жидкости через любое сечение слоя равен нулю, а для течения, связанного с прокачиванием, это не так. Важно, что, хотя в длинноволновом приближении уравнения эволюции возмущений температуры при двухмерной конвекции в однородной жидкости и при конвекции жидкости в пористой среде совпадают (с точностью до перенормировки параметров), функции  $f(z)$  различны.

Численный счет выявил, что при достаточно малых  $u$  в системе (2) реализуются устойчивые стационарные решения. Мы интересуемся свойствами локализации нетривиальных стационарных решений. Если некоторое решение будет локализовано в окрестности точки  $x_0$ , то вдали от нее  $\theta_x \sim \exp(-\gamma_{\pm}|x - x_0|)$  (при  $(x - x_0)u > 0$  выбирается показатель локализации в направлении по потоку  $\gamma_-$ , при  $(x - x_0)u < 0$  – показатель локализации в направлении против потока  $\gamma_+$ ; обратную величину  $\lambda_{\pm} = \gamma_{\pm}^{-1}$  принято называть длиной локализации). В области этих экспоненциальных «хвостов» решения малы и показатели могут быть определены из линеаризации уравнения (2), которое в стационарном случае может быть однократно проинтегрировано по  $x$ :

$$u\theta + \theta''' + [q_0 + \xi(x)]\theta' = \text{const} \equiv S \quad (4)$$

(штрих обозначает производную по координате  $x$ ), при  $u \neq 0$  замена  $\theta \rightarrow \theta + S/u$  позволяет обратить поток тепла  $S$  в ноль.

Примечательно, что при  $u = S = 0$  для  $\theta'$  получается стационарное уравнение Шредингера (уравнение при  $q(x, y)$ , зависящем от обеих горизонтальных координат, к уравнению Шредингера уже не сводится), свойства локализации в котором при  $\delta$ -коррелированном потенциале хорошо исследованы (см., например, [7]): все состояния с любой энергией (соответствующей в нашем случае средней надкритичности  $q_0$ ) локализованы. Однако данный случай примечателен не только наличием прокачивания, но и принципиальным различием в физической интерпретации и наблюдаемости эффектов, связанных с формальными свойствами уравнений, в данной нелинейной гидродинамической задаче и линейном уравнении Шредингера: в уравнении Шредингера различные локализованные решения линейной задачи принципиально не взаимодействуют между собой и соответствуют связанным состояниям

частиц в случайном потенциале, тогда как в данной задаче все такие моды взаимодействуют между собой через нелинейность и вместе формируют некоторое стационарное течение, которое при большой пространственной плотности локализованных мод может иметь примерно постоянную в пространстве интенсивность.

Таким образом, для того чтобы наблюдать локализованные течения в данной системе (если они имеют место в линеаризованной стационарной задаче), пространственная плотность возбуждаемых мод должна быть невелика. Такая ситуация реализуется при достаточно большом отрицательном среднем отклонении теплового потока от критического значения:  $q_0 < 0$ . Для пояснения этого утверждения введем локальное среднее  $q_l(x) \equiv l^{-1} \int_{x-l/2}^{x+l/2} q(x_1) dx_1$ . Если в окрестности некоторой точки  $x$  значение  $q_l(x)$  положительно для достаточно больших  $l$  («достаточно большие  $l$ » – это  $l$  порядка единицы), в окрестности этой точки может развиваться конвективное течение, в то время как в областях с отрицательными  $q_l$  течение в среднем демпфируется. Для гауссова  $\delta$ -коррелированного шума  $q_l$  – гауссова случайная величина со средним  $\langle q_l \rangle = q_0$  и дисперсией  $D(q_l) = 2/l$ , то есть  $q_l$  принимает положительное значение с вероятностью  $P(q_l > 0) = \Phi(q_0/\sqrt{D(q_l)}) = \Phi(q_0\sqrt{l/2})$  (здесь  $\Phi$  – функция ошибок). При больших отрицательных  $q_0$  величина  $P(q_l > 0) \approx (-q_0)^{-1}(\pi l)^{-1/2} \exp(-q_0^2 l/4)$  является малой, и области возбуждения конвективного течения располагаются в пространстве достаточно разреженно, что может позволить наблюдать локализованные течения.

## 2. Показатель локализации

**2.1. Показатели роста поля температуры.** Рассмотрим стохастическую динамическую систему

$$\theta' = \psi, \quad \psi' = \phi, \quad \phi' = -[q_0 + \xi(x)]\psi - u\theta. \quad (5)$$

Спектр показателей Ляпунова данной системы состоит из трех элементов:  $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$ . В силу инвариантности системы (5) относительно преобразования  $(u, x, \theta, \psi, \phi) \rightarrow (-u, -x, \theta, -\psi, \phi)$ ,

$$\gamma_1(q_0, u) = -\gamma_3(q_0, -u) \quad \text{и} \quad \gamma_2(q_0, u) = -\gamma_2(q_0, -u).$$

Помимо прочего, из этих соотношений следует, что  $\gamma_2(q_0, u = 0) = 0$ . С другой стороны, при  $u = 0$  система пропускает однородное решение  $\{\theta, \psi, \phi\} = \{1, 0, 0\}$ , которое и соответствует  $\gamma_2 = 0$ . Поскольку дивергенция фазового потока системы (5) равна нулю,

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \quad \text{и} \quad \gamma_2(q_0, u) = -\gamma_1(q_0, u) + \gamma_1(q_0, -u).$$

Таким образом, достаточно вычислять максимальный показатель Ляпунова  $\gamma_1$ . На рис. 1 приведены результаты вычисления  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

При  $u = 0$ ,  $S = 0$  для течения, локализованного в окрестности  $x_0$ , на достаточно удалении от  $x_0$

$$\theta(x) \approx \begin{cases} \Theta_{2,-} + \Theta_1(x)e^{\gamma_1(x-x_0)}, & \text{при } x < x_0, \\ \Theta_{2,+} + \Theta_3(x)e^{\gamma_3(x-x_0)}, & \text{при } x > x_0, \end{cases}$$

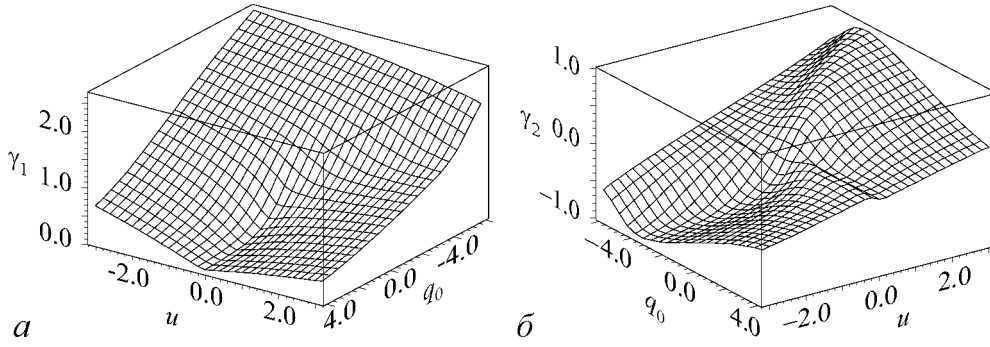


Рис. 1. Показатели Ляпунова в системе (5)

где  $\Theta_1(x)$  и  $\Theta_3(x)$  – ограниченные функции (не затухающие и не нарастающие на больших расстояниях), зависящие от конкретной реализации шума. Собирая эти асимптоты, можно выписать решение между двумя областями возбуждения конвективных течений, локализованными в  $x_1$  и  $x_2 > x_1$ ,

$$\theta(x_1 < x < x_2) \approx \Theta_3(x)e^{\gamma_3(x-x_1)} + \Theta_2 + \Theta_1(x)e^{\gamma_1(x-x_2)}. \quad (6)$$

Амплитуда соответствующей функции тока  $\psi \approx \Psi_3(x)e^{\gamma_3(x-x_1)} + \Psi_1(x)e^{\gamma_1(x-x_2)}$  ( $\Psi_{1,3}(x)$  ограничены подобно  $\Theta_{1,3}(x)$ ) локализована в окрестности  $x_1$  и  $x_2$  с показателем  $\gamma_1$  ( $\gamma_3(q_0, u = 0) = -\gamma_1(q_0, u = 0)$ ), тогда как возмущения поля температуры не локализованы.

При  $u > 0$  (случай  $u < 0$  подобен и отдельного рассмотрения не требует) сдвигом начала отсчета температуры  $\theta \rightarrow \theta + S/u$  всегда можно добиться отсутствия потока тепла:  $S = 0$ . Из требования  $S = 0$  при  $u \neq 0$  следует, что в области демпфирования течения, где  $\psi \rightarrow 0$ , и возмущение температуры  $\theta \rightarrow 0$ . В самом деле, решение (6) принимает вид

$$\theta(x_1 < x < x_2) \approx \Theta_3(x)e^{\gamma_3(x-x_1)} + \Theta_2(x)e^{\gamma_2(x-x_2)} + \Theta_1(x)e^{\gamma_1(x-x_2)} \quad (7)$$

(поскольку  $\gamma_2(q_0 < 0, u > 0) > 0$ , связанная с этим показателем Ляпунова мода локализована в окрестности  $x_2$ ), и при  $u \neq 0$  вклад второго слагаемого вдали от центров возбуждения стремится к нулю. С другой стороны, теперь мода, связанная с  $\gamma_2$ , вносит вклад в амплитуду функции тока:  $\psi \approx \Psi_3(x)e^{\gamma_3(x-x_1)} + \Psi_2(x)e^{\gamma_2(x-x_2)} + \Psi_1(x)e^{\gamma_1(x-x_2)}$ .

В результате, при  $\gamma_2 > 0$  ( $u > 0$ ) течение локализовано по потоку (правый склон локализованного решения) с показателем  $\gamma_3$ :  $\gamma_- = |\gamma_3|$ . В левой же части окрестности области возбуждения в течении представлены две моды

$$\psi(x < x_2) \approx \Psi_2(x)e^{\gamma_2(x-x_2)} + \Psi_1(x)e^{\gamma_1(x-x_2)}. \quad (8)$$

При умеренных значениях  $u$   $\Psi_1(x)$  и  $\Psi_2(x)$  соизмеримы, мода  $\Psi_1(x)e^{\gamma_1(x-x_2)}$  при удалении от  $x_2$  быстро «теряется» на фоне  $\Psi_2(x)e^{\gamma_2(x-x_2)}$  и свойства локализации определяются  $\gamma_2$ :  $\gamma_+ = \gamma_2$ . При  $u = 0$  функция  $\Psi_2(x) = 0$ , и при малых  $u$ , по непрерывности,  $\Psi_2(x)$  должно быть мало. Тогда течение (8) успевает существенно затухнуть в области, где еще доминирует мода, связанная с  $\gamma_1$ , и именно эта мода определяет характерную длину локализации:  $\gamma_+ = \gamma_1$ .

**2.2. Показатели роста среднеквадратичных значений.** Для приближительной аналитической оценки ведущего показателя Ляпунова можно проанализировать поведение средних по реализациям шума значений полей (см. [11]; в работе [12], например, подобным образом оценивался показатель Ляпунова в похожей стохастической системе). А именно, здесь полезен следующий результат из [11], справедливый для стохастического линейного обыкновенного дифференциального уравнения с шумом в коэффициентах:

$$y'_i = L_{ij} y_j + \xi(x) \Gamma_{ij} y_j .$$

При гауссовом  $\delta$ -коррелированном шуме  $\xi(x)$  ( $\langle \xi(x) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(x+x') \xi(x) \rangle = 2\delta(x')$ ) динамика средних  $\langle y_i \rangle$  подчиняется системе уравнений

$$\langle y_i \rangle' = (L + \Gamma^2)_{ij} \langle y_j \rangle . \quad (9)$$

Если рассматривать  $\langle \theta \rangle$ ,  $\langle \psi \rangle$  и  $\langle \phi \rangle$ , то  $\Gamma^2 = 0$ , и шум себя не проявляет. Это связано с симметрией системы и мало говорит о ее поведении при конкретной реализации шума. Для анализа того, что имеет место при конкретной реализации шума, следует рассматривать поведение среднеквадратичных значений (см. [11]). Для  $\vec{y} = \{\theta^2, \theta\psi, \theta\phi, \psi^2, \psi\phi, \phi^2\}$  уравнения (5) дают

$$\begin{aligned} y'_1 &= 2y_2 , \\ y'_2 &= y_4 + y_3 , \\ y'_3 &= y_5 - [q_0 + \xi(x)]y_2 - uy_1 , \\ y'_4 &= 2y_5 , \\ y'_5 &= y_6 - [q_0 + \xi(x)]y_4 - uy_2 , \\ y'_6 &= -2[q_0 + \xi(x)]y_5 - 2uy_3 . \end{aligned}$$

Тогда

$$A \equiv L + \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -u & -q_0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -u & 0 & -q_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2u & 2 & -2q_0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Показателем роста среднеквадратичных значений  $\mu$  является максимальное вещественное (среднеквадратичная величина не может колебаться) собственное значение матрицы  $A$ , имеющее физический смысл<sup>2</sup>. Хотя характеристическое уравнение матрицы  $A$  имеет шестую степень относительно собственных значений  $\mu$ , оно имеет лишь вторую степень относительно  $u$ , и поверхность максимального вещественного значения  $\mu(q_0, u)$  может быть найдена в параметрическом виде — она состоит из

<sup>2</sup>Формальное собственное решение имеет физический смысл, если для него соблюдены условия  $\langle \theta^2 \rangle \geq 0$ ,  $\langle \psi^2 \rangle \geq 0$ ,  $\langle \phi^2 \rangle \geq 0$ ,  $\langle \theta^2 \rangle \langle \psi^2 \rangle \geq \langle \theta\psi \rangle^2$ ,  $\langle \theta^2 \rangle \langle \phi^2 \rangle \geq \langle \theta\phi \rangle^2$  и  $\langle \psi^2 \rangle \langle \phi^2 \rangle \geq \langle \psi\phi \rangle^2$ .

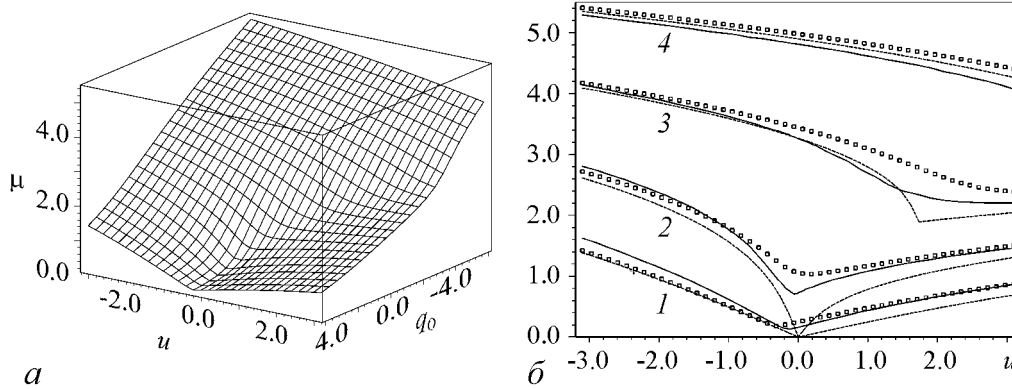


Рис. 2. Показатели роста в системе (5). На правом графике: сплошная линия — удвоенный максимальный показатель Ляпунова  $2\gamma_1$ , квадраты — показатель роста среднеквадратичных  $\mu$ , и пунктирная линия — удвоенный максимальный показатель Ляпунова системы (5) в отсутствие шума. Кривые 1–4 построены для значений  $q_0 = 3.0, 0.0, -3.0, -6.0$ , соответственно

двух частей:

$$u_{1,2} = \frac{7\mu^3 + 4q_0\mu - 8 \pm \sqrt{81\mu^6 + 216q_0\mu^4 - 240\mu^3 + 144q_0^2\mu^2 - 192q_0\mu + 64}}{16}, \quad (10)$$

определенных при  $\mu > 0$ ,  $q_0 \geq 2\mu/3 - 3\mu^2/4 + \sqrt{2\mu/3}$ . На рис. 2 можно видеть эту поверхность, а также оценить степень согласования между показателями роста  $2\gamma_1$  и  $\mu$  (которые не обязаны совпадать, по определению).

### 3. Решения полной нелинейной задачи

Хотя свойства локализации в стационарном линейном уравнении (4) при  $u = 0$  хорошо известны, поведение гидродинамической задачи (2) при отсутствии прокачивания заслуживает внимания в силу упомянутых ранее принципиальных различий между данной системой и уравнением Шредингера.

В соответствии с ожиданиями относительно наблюдаемости локализованных решений при  $q_0 < 0$ , на рис. 3 можно видеть примеры локализованных решений при  $u = 0$ . При адиабатических боковых границах (рис. 3, а) течение локализовано в окрестности области, где  $q_{l=\pi}$  спонтанно принимает положительные значения, и демпфируется за ее пределами в соответствии с предсказаниями линейной теории (нерегулярный фон на уровне  $\theta_x^2 \sim 10^{-25}$  связан с погрешностью численного счета). Адиабатические граничные условия для ограниченной в горизонтальном направлении области соответствуют большому (по сравнению с горизонтальными размерами области, где производится численный счет) расстоянию между областями возбуждения течений в бесконечном слое. При  $q_0 = -3.1$ ,  $P(q_{l=\pi} > 0) \approx 5 \cdot 10^{-5}$ , и эти области, действительно, должны располагаться в пространстве достаточно редко<sup>3</sup>.

При периодических граничных условиях (рис. 3, б) эффективно проявляется конечность расстояния между областями возбуждения. В отсутствие шума систе-

<sup>3</sup>Использованная оценка очень груба и не подразумевает достоверного определения характерных расстояний между центрами возбуждения течений.

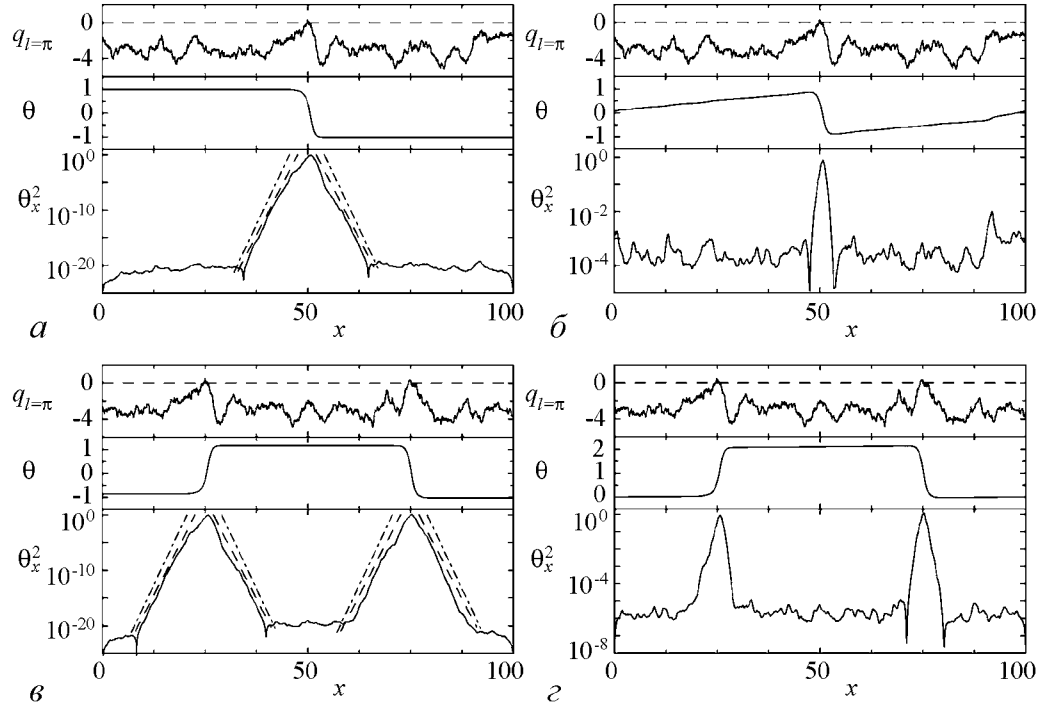


Рис. 3. Примеры стационарных решений уравнения (2) в отсутствие прокачивания при  $q_0 = -3.1$  (реализации  $q(x)$  представлены графиками  $q_{l=\pi}(x)$ ). Боковые границы: *а*, *в* – адиабатические непроницаемые, *б* – периодические, *г* – изотермические. Штриховая линия отмечает наклон, соответствующий затуханию решения с показателем  $2\gamma_1 = 3.332$ , а штрихпунктирная –  $\mu = 3.623$

ма (2) пропускает тривиальное решение в виде  $\theta = q_0^{-1} S x$ . При наличии шума с этой модой связано стационарное решение  $\theta' = q_0^{-1} S + \psi_1$ ,  $\langle \psi_1 \rangle = 0$ , которое при малых  $S$  подчиняется линейному уравнению

$$\psi_1'' + [q_0 + \xi(x)]\psi_1 = -q_0^{-1} S \xi(x)$$

(здесь  $\langle \xi(x)\psi_1 \rangle = 0$ ), то есть  $\psi_1 \propto S$ . При наличии шума это решение реализуется в области демпфирования течения ( $q_l < 0$ ). В ситуации, изображенной на рис. 3, *б*,  $q_0^{-1} S = [\theta]/L$ , где  $[\theta] \approx 2$  – перепад температур, навязанный нелинейным течением в области  $q_l > 0$ , а  $L \approx 100$  – период структуры, и  $(S/q_0)^2 \approx 4 \cdot 10^{-4}$  – именно такой порядок интенсивности переходного течения и наблюдается вдали от центра возбуждения и не позволяет наблюдать характер затухания «хвостов» интенсивного локализованного течения. Для стационарного течения поток тепла  $S$  постоянен вдоль слоя, в силу чего среднее переходное течение  $\langle \Psi \rangle \propto \langle \theta' \rangle = q_0^{-1} S$  остается постоянным по всему слою даже при наличии нескольких областей возбуждения конвективного течения.

Примечательно, что связанный с переходным течением поток тепла  $S$  при адиабатических граничных условиях должен затухать до нуля. Поэтому в слое с адиабатическими вертикальными границами стационарные локализованные решения реализуются без переходного течения при произвольном количестве областей возбуждения (рис. 3, *в*). В свою очередь, при изотермических вертикальных границах интенсивность фонового течения тем меньше, чем протяженней слой. Дело в том, что



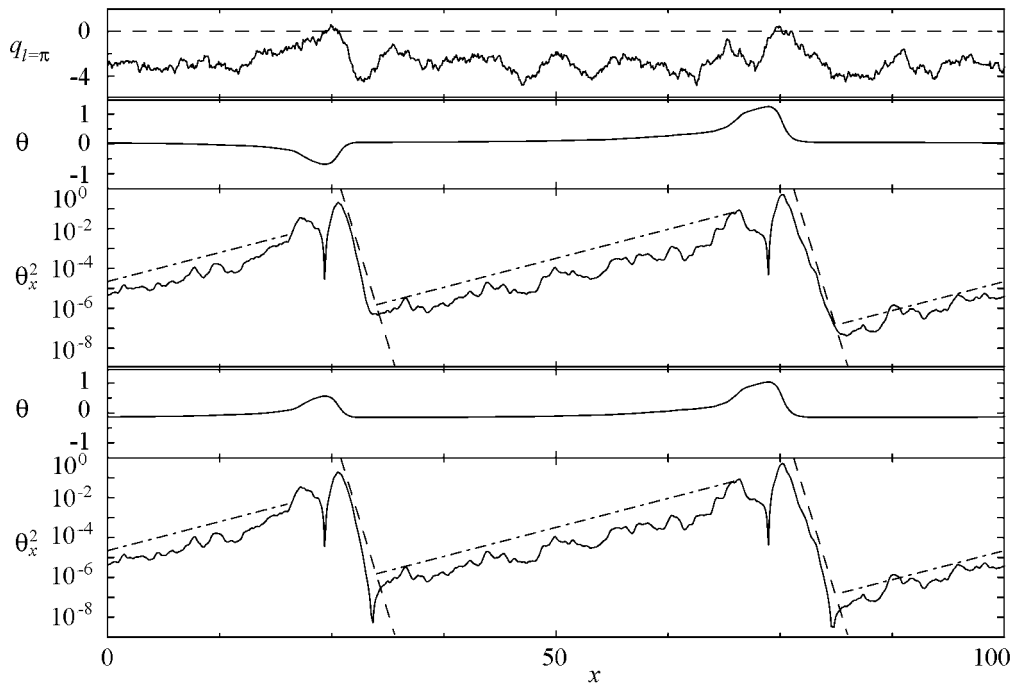


Рис. 4. Примеры стационарных решений уравнения (2) при  $u = 0.3$ ,  $q_0 = -3.0$  (реализация  $q(x)$  представлена графиком  $q_{l=\pi}(x)$ ) в слое с периодическими граничными условиями. Штриховая линия отмечает наклон, соответствующий затуханию решения с показателем  $2\gamma_3 = -3.394$ , а штрихпунктирная —  $2\gamma_2 = 0.268$

в системе имеется мультистабильность относительно знака скачка поля температуры при переходе через область интенсивного течения и при большом количестве скачков они, в среднем, друг друга компенсируют, что приводит к небольшому значению  $q_0^{-1}S = L_{\text{layer}}^{-1} \sum_j [\theta]_j$  (например, на рис. 3, а фоновое течение существенно меньше, чем на рис. 3, б).

Примеры течений при  $u \neq 0$  можно видеть на рис. 4. В соответствии с предсказаниями раздела 2.1. температура по обе стороны от области интенсивного течения одинакова: локализованы не только течения, но и возмущения поля температуры. И, что более примечательно, свойства локализации против потока определяются показателем  $\gamma_2$  даже при довольно малых  $u$  и, соответственно,  $\gamma_2$ , то есть могут очень сильно изменяться.

Примечательно также, что горизонтальное прокачивание может приводить к подавлению конвективных течений. Причем, чем больше  $u$ , тем сильнее стабилизирующая роль прокачивания. Однако этот эффект не связан с рассматриваемыми в работе эффектами локализации, и потому остается за рамками настоящего исследования.

### Заключение

В работе рассматривается двухмерная тепловая конвекция жидкости в тонком горизонтальном слое со случайной стационарной неоднородностью нагрева, обеспечиваемой фиксированным потоком тепла поперек слоя. Средняя величина пото-

ка тепла ниже критического значения для однородного слоя. При неоднородности, моделируемой гауссовым  $\delta$ -коррелированным шумом, в системе возможны локальные превышения критического значения теплового потока, приводящие, как показано, к возбуждению локализованных течений, изучению свойств которых и посвящена данная работа.

Исследованы свойства локализации нелинейных течений и влияние на них прокачивания жидкости в горизонтальном направлении. Обнаружено, что прокачивание приводит к локализации не только течений, но и возмущений поля температуры. Вычислены показатели локализации в направлении по потоку прокачивания и против (см. рис. 1). Аналитически определен показатель роста среднеквадратичных значений, дающий оценку показателей локализации, определяемых численно.

В соответствии с предсказаниями теории, численное интегрирование полной нелинейной системы выявило радикальное влияние прокачивания на свойства локализации в направлении против потока прокачивания: длина локализации при малых конечных  $u$  может увеличиваться на порядок.

Автор признателен Д.В. Любимову и А.С. Пиковскому за плодотворные обсуждения и полезные комментарии.

*Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ–ННАО 04-02-04011 и PE-009-0 Американского Фонда Гражданских Исследований и Развития (АФГИР).*

#### **Библиографический список**

1. *Anderson P.W.* Absence of diffusion in certain random lattices // *Phys. Rev.* 1958. Vol. 109. P. 1492.
2. *Fröhlich J., Spencer T.* Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy // *Commun. Math. Phys.* 1983. Vol. 88. P. 151.
3. *Grepel D.R., Fishman Sh., Prange R.E.* Localization in an incommensurate potential: an exactly solvable model // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. P. 833.
4. *Bourgain J., Wang W.-M.* Anderson localization for time quasi-periodic random Schrödinger and wave equations // *Commun. Math. Phys.* 2004. Vol. 248. P. 429.
5. *Vlad M.O., Ross J., Schneider F.W.* Long memory, fractal statistics, and Anderson localization for chemical waves and patterns with random propagation velocities // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 57. P. 004003.
6. *Hammele M., Schuler S., Zimmermann W.* Effects of parametric disorder on a stationary bifurcation // *Physica D.* 2006. Vol. 218. P. 139.
7. *Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
9. *Knobloch E.* Pattern selection in long-wavelength convection // *Physica D.* 1990. Vol. 41. P. 450.
10. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Крупномасштабная турбулентность в конвекции Рэлея – Бенара // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1989. № 5. С. 43.

11. *Кляцкин В.И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
12. *Zillmer R., Pikovsky A.* Continuous approach for the random-field Ising chain // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. P. 056108.

*Пермский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 11.01.2007*

## **LOCALIZATION OF FLOWS IN A HORIZONTAL LAYER SUBJECT TO RANDOMLY INHOMOGENEOUS HEATING**

*D.S. Goldobin*

We study localization of thermo-convective flows in a shallow horizontal layer subject to a fixed thermal flux across the layer, and the effect of advection on the localization properties. The thermal flux applied is stationary in time and randomly inhomogeneous in space (the problem considered is 2-D; the mean flux is nearly critical). The interpretation of linear results is underpinned by numerical simulation of the original nonlinear problem. The results presented in the article are relevant for thermal convection in a porous medium as well as for natural convection and some other hydrodynamical systems.



*Голдобин Денис Сергеевич* – родился в Перми (1981). Окончил физический факультет Пермского университета (2004). В настоящее время является аспирантом Пермского государственного университета по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы». Область научных интересов – вибрационные эффекты в гидродинамике, тепловая конвекция, статистическая физика, нелинейная динамика. Автор 10 научных статей по указанным выше направлениям. E-mail: Denis.Goldobin@gmail.com