



## ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В МОДЕЛЯХ АВТОГЕНЕРАТОРНЫХ СИСТЕМ С ЧАСТОТНЫМ И ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

*В.П. Пономаренко*

Представлены результаты исследования динамических режимов в моделях автогенераторных систем с частотным и частотно-фазовым управлением. Основное внимание уделено исследованию возникновения и развития режимов детерминированного хаоса в таких системах. Выявлена возможность существования различных типов хаотических аттракторов в фазовом пространстве данных моделей. Исследованы различные сценарии перехода от регулярных режимов к хаотическим. Результаты представлены в виде одно- и двухпараметрических бифуркационных диаграмм, проекций фазовых портретов, сечений Пуанкаре и временных реализаций колебательных режимов.

1. Исследованию процессов формирования и развития сложных колебаний в автогенераторных системах с фазовым и частотным управлением в настоящее время уделяется большое внимание. Это связано с тем, что такие системы представляют собой интересный класс радиофизических объектов, которые: во-первых, обладают весьма сложной динамикой и обеспечивают легко реализуемую возможность эффективного воздействия на свойства и области существования колебательных режимов путем изменения параметров цепей управления; во-вторых, являются эффективными устройствами для решения задач синхронизации и обработки сигналов. Одной из хорошо известных систем этого класса, имеющую как теоретическую, так и практическую значимость, является система частотной автоподстройки (ЧАП). Обобщенная структурная схема системы, построенной по принципу отрицательной обратной связи, содержит [1, 2] перестраиваемый генератор синусоидальных колебаний и цепь управления, состоящую из частотного дискриминатора с нелинейной апериодической характеристикой, фильтра низких частот (ФНЧ) и частотного модулятора. Для динамики систем ЧАП характерна неединственность режимов стационарной генерации с неизменной расстройкой частоты управляемого генератора относительно опорной частоты дискриминатора, в связи с чем эти системы имеют ряд общих свойств поведения, присущих другим активно изучающимся мультстабильным автоколебательным системам (кольцевым генераторам [3], генераторам с инерционной нелинейностью [4], генераторам Чуа [5] и др.).

В работах [6, 7] показано, что петля частотного управления с ФНЧ третьего порядка не только позволяет решать задачу стабилизации частоты генератора, но и предоставляет широкие возможности для возбуждения сложных режимов частотно-модулированных колебаний управляемого генератора и проявления эффектов динамического хаоса. Интересные возможности в плане генерации сложных и хаотических колебаний обнаружены [8–10] в случае использования положительной (вместо традиционной отрицательной) обратной связи в петле частотного управления, реализовать которую можно путем инвертирования характеристики частотного дискриминатора. В частности, в такой системе могут возникать хаотические колебания, которым соответствует двухспиральный аттрактор типа двойной завиток (double scroll). В работах [11, 12] обращено внимание на существование в системе ЧАП с двухгорбой характеристикой дискриминатора хаотических режимов, которые соответствуют трех- и четырехспиральным аттракторам. Установленные в работах [6–12] свойства колебательных режимов и сценарии их эволюции при изменении параметров инерционности цепи автоподстройки и начальной частотной расстройки создают предпосылки для многофункционального применения систем с частотным управлением за счет использования режимов сложных регулярных и хаотических колебаний в качестве рабочих состояний систем.

В связи с обнаруженной в [6–12] сильной зависимостью свойств и областей существования колебательных режимов систем с частотным управлением от структуры и параметров цепи автоподстройки и в целях обеспечения генерации модуляционных колебаний в достаточно широкой области изменения параметров и эффективного управления такими колебаниями представляется интересным исследование динамики системы ЧАП в следующих случаях: 1) увеличения сложности ФНЧ; 2) применения дополнительной цепи фазового управления, то есть перехода к комбинированному частотно-фазовому управлению. В данной работе рассматриваются динамические модели системы ЧАП с ФНЧ четвертого порядка, имеющим коэффициент передачи  $K(p) = (1 + a_1p + a_2p^2)/(1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3 + b_4p^4)$ , и системы с частотно-фазовым управлением в случае ФНЧ третьего порядка ( $K(p) = 1/(1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3)$ ) в цепи частотной автоподстройки и ФНЧ первого порядка ( $K_1(p) = 1/(1 + b_0p)$ ) в цепи фазового управления ( $a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$  – параметры инерционности). Нелокальное исследование этих моделей сопряжено с существенными трудностями, в связи с чем в качестве основного метода их исследования мы привлекаем компьютерное моделирование, которое базируется на качественно-численных методах анализа нелинейных динамических систем [3, 4, 13, 14]. Основная задача работы состоит в выяснении новых свойств и особенностей динамического поведения системы ЧАП, обусловленных усложнением структуры цепи управления и применением дополнительной цепи фазового управления.

2. Математическую модель, описывающую динамику системы ЧАП с ФНЧ четвертого порядка, получаем из общего уравнения системы [1] при подстановке в него рассматриваемого выражения для коэффициента передачи  $K(p)$  и записываем в виде

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= y, & dy/d\tau &= z, & dz/d\tau &= v, \\ \mu_1 dv/d\tau &= \sigma - \Phi(x) - (\lambda + b\Phi'(x))y - (1 - \rho + \rho\Phi'(x))z - \rho\Phi''(x)y^2 - \mu v. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1)  $\tau$  – безразмерное время;  $x, y, z$  и  $v$  – безразмерные переменные ( $x$  – отклонение частоты управляемого генератора от опорной частоты дискриминатора);  $\lambda, \mu, b, \rho$  и  $\mu_1$  – безразмерные параметры, характеризующие инерционность цепи управления ( $\lambda = (b_1 - a_1)/\sqrt{b_2}$ ,  $b = a_1/\sqrt{b_2}$ ,  $\mu = b_3/(b_2\sqrt{b_2})$ ,  $\mu_1 = b_4/b_2^2$ ,  $\rho = a_2/b_2$ );  $\sigma$  – начальная расстройка частот;  $\Phi(x) = x - Q(x)$  – обобщенная нелинейность системы ( $Q(x)$  – характеристика частотного дискриминатора, знак «минус» перед  $Q(x)$  соответствует положительной обратной связи по цепи управления). Будем аппроксимировать характеристику частотного дискриминатора, как и в [6–10], функцией  $Q(x) = 2ax/(1 + a^2x^2)$ , где параметр  $a$ , имеющий смысл коэффициента усиления по цепи управления, определяет раствор и крутизну характеристики  $Q(x)$ .

**2.1.** Рассмотрим влияние параметра  $\mu_1$  на режимы стационарной генерации системы, которые определяются [8] устойчивыми состояниями равновесия модели (1). Состояния равновесия находим из уравнений  $\sigma - \Phi(x) = 0, y=0, z=0, v=0$ . При значениях

$$-\sigma^*(a) < \sigma < \sigma^*(a), \text{ где } \sigma^*(a) = a^{-1}(2a/(\sqrt{a(a+4)}-a)-1)\sqrt{\sqrt{a(a+4)}-a-1}$$

существуют три состояния равновесия  $A_1(x_1, 0, 0, 0)$ ,  $A_2(x_2, 0, 0, 0)$  и  $A_3(x_3, 0, 0, 0)$ , координаты  $x_1(\sigma, a)$ ,  $x_2(\sigma, a)$  и  $x_3(\sigma, a)$  которых при  $\sigma \geq 0$  удовлетворяют неравенствам  $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$ , а при  $\sigma < 0$  – неравенствам  $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ . Условия устойчивости состояний равновесия  $A_1$  и  $A_3$ , соответствующих ветвям характеристики  $\Phi(x)$  с  $\Phi'(x) > 0$ , определяем из анализа коэффициентов соответствующего характеристического уравнения и записываем в виде

$$\mu[(1 - \rho + \rho\Phi'(x_i))(\lambda + b\Phi'(x_i)) - \mu\Phi'(x_i)] - \mu_1(\lambda + b\Phi'(x_i))^2 > 0, \quad i = 1, 3. \quad (2)$$

Состояние равновесия  $A_2$ , соответствующее ветви нелинейности  $\Phi(x)$  с  $\Phi'(x) < 0$ , всегда неустойчиво.

Устойчивые состояния равновесия  $A_1$  и  $A_3$  соответствуют режимам стационарной генерации на частотах, отличающихся от опорной частоты дискриминатора на величину  $x_1(\sigma, a)$  или  $x_3(\sigma, a)$ . Анализируя неравенства (2), устанавливаем, что область  $G_1$  устойчивости состояния равновесия  $A_1$  существует при значениях  $\mu_1 < \mu_1^*$ , где  $\mu_1^* = (1 - \rho + \rho\Phi'(x_1))^2/(4\Phi'(x_1))$ . Границы области  $G_1$  определяются уравнениями

$$\lambda_{1,2} = -b\Phi'(x_1) - \mu[1 - \rho + \rho\Phi'(x_1) \pm \sqrt{(1 - \rho + \rho\Phi'(x_1))^2 - 4\mu_1\Phi'(x_1)}]/(2\mu_1), \quad (3)$$

область  $G_1 = \{\lambda_2 < \lambda < \lambda_1\}$ . Область  $G_2$  устойчивости состояния равновесия  $A_3$  существует при значениях  $\mu_1 < \mu_1^{**}$ , где  $\mu_1^{**} = (1 - \rho + \rho\Phi'(x_3))^2/(4\Phi'(x_3))$ . Границы этой области определяются уравнениями

$$\lambda_{3,4} = -b\Phi'(x_3) - \mu[1 - \rho + \rho\Phi'(x_3) \pm \sqrt{(1 - \rho + \rho\Phi'(x_3))^2 - 4\mu_1\Phi'(x_3)}]/(2\mu_1), \quad (4)$$

область  $G_2 = \{\lambda_4 < \lambda < \lambda_3\}$ . При  $\mu_1 = \mu_1^*$  границы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  совпадают, при  $\mu_1 > \mu_1^*$  состояние равновесия  $A_1$  неустойчиво. При  $\mu_1 = \mu_1^{**}$  совпадают границы  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$ , а когда  $\mu > \mu_1^{**}$ , состояние равновесия  $A_3$  неустойчиво. Таким образом, выяснено, что параметр  $\mu_1$  оказывает сильное влияние на области существования моногармонических режимов генератора:

при значениях  $\mu_1 < \min(\mu_1^*, \mu_1^{**})$  такие режимы существуют при значениях параметров в областях  $G_1$  и  $G_2$ ;

когда  $\min(\mu_1^*, \mu_1^{**}) < \mu_1 < \max(\mu_1^*, \mu_1^{**})$ , возможно существование только одного из режимов моногенерации;

при  $\mu_1 > \max(\mu_1^*, \mu_1^{**})$  такие режимы в системе невозможны.

Нарушение границ  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (границ  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$ ) области  $G_1$  (области  $G_2$ ) приводит, в зависимости от знака первой ляпуновской величины  $L$  [15], к следующим двум вариантам поведения системы. Если  $L < 0$ , тогда в фазовом пространстве  $U$  происходит мягкое рождение устойчивого предельного цикла  $L_1$  (устойчивого предельного цикла  $L_3$ ), содержащего внутри себя ставшее неустойчивым состояние равновесия  $A_1$  (состояние равновесия  $A_3$ ). В случае, когда  $L > 0$ , в фазовом пространстве происходит стягивание седлового предельного цикла  $\Gamma_1$  (седлового предельного цикла  $\Gamma_3$ ) к остающемуся устойчивым состоянию равновесия  $A_1$  (состоянию равновесия  $A_3$ ), а затем потеря устойчивости  $A_1$  ( $A_3$ ) и жесткий переход к устойчивому предельному циклу  $L_1$  (к устойчивому предельному циклу  $L_3$ ). Численное исследование системы (1) показывает, что в этом случае циклы  $L_1$  и  $\Gamma_1$  (циклы  $L_3$  и  $\Gamma_3$ ) возникают в результате седло-узловой бифуркации, которая происходит в области устойчивости  $G_1$  (в области устойчивости  $G_2$ ). С появлением в фазовом пространстве  $U$  устойчивых предельных циклов системы (1) связано существование режимов периодической модуляции частоты колебаний управляемого генератора.

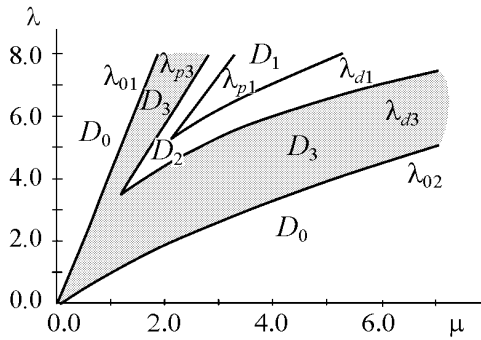


Рис. 1. Области динамических режимов модели (1)

На рис. 2 приведены  $(x, y)$ -проекции фазовых портретов ( $a$ -м,  $o$ ,  $p$ ) и  $(x, z)$ -проекции сечений Пуанкаре ( $n, n$ ) аттракторов модели (1), построенные для различных значений параметров  $\mu$  и  $\lambda$ . На диаграмме  $\{\mu, \lambda\}$  кривые  $\lambda_{d1}$  и  $\lambda_{p1}$  выделяют область параметров  $D_1 = \{\lambda_{d1} < \lambda < \lambda_{p1}\}$ , при которых в фазовом пространстве  $U$  одновременно существуют устойчивые предельные циклы  $L_1$  и  $L_3$  ( $a$ ). В области  $D_1$  обнаружено также существование устойчивых трехоборотного  $C_1$  ( $b$ ) и четырехоборотного  $C_2$  ( $в$ ) предельных циклов вокруг неустойчивого состояния равновесия  $A_1$ . Следовательно, характер режима периодической модуляции, который установится в системе при значениях  $(\mu, \lambda) \in D_1$ , зависит от того, к какому из циклов  $L_1$ ,  $L_3$ ,  $C_1$  или  $C_2$  будет притягиваться траектория модели (1) при заданном начальном состоянии системы.

При переходе с увеличением  $\lambda$  или с уменьшением  $\mu$  через линию  $\lambda_{p1}$  цикл  $L_1$  теряет устойчивость с мягким рождением в фазовом пространстве притягивающего двумерного тора  $T_1$  ( $з$ ), то есть от режима цикла  $L_1$  система плавно переходит

**2.2.** Для того, чтобы получить представление о возможных динамических состояниях и бифуркациях модели (1), обратимся к бифуркационной диаграмме  $\{\mu, \lambda\}$  (рис. 1), построенной при значениях  $a = 20$ ,  $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $\mu_1 = 0.2$ . При выбранных значениях параметров  $a$ ,  $\sigma$  и  $\rho$  выполняется неравенство  $\mu_1 > \max(\mu_1^*, \mu_1^{**})$ , то есть реализуется случай, когда режимы стационарной генерации в системе не существуют.

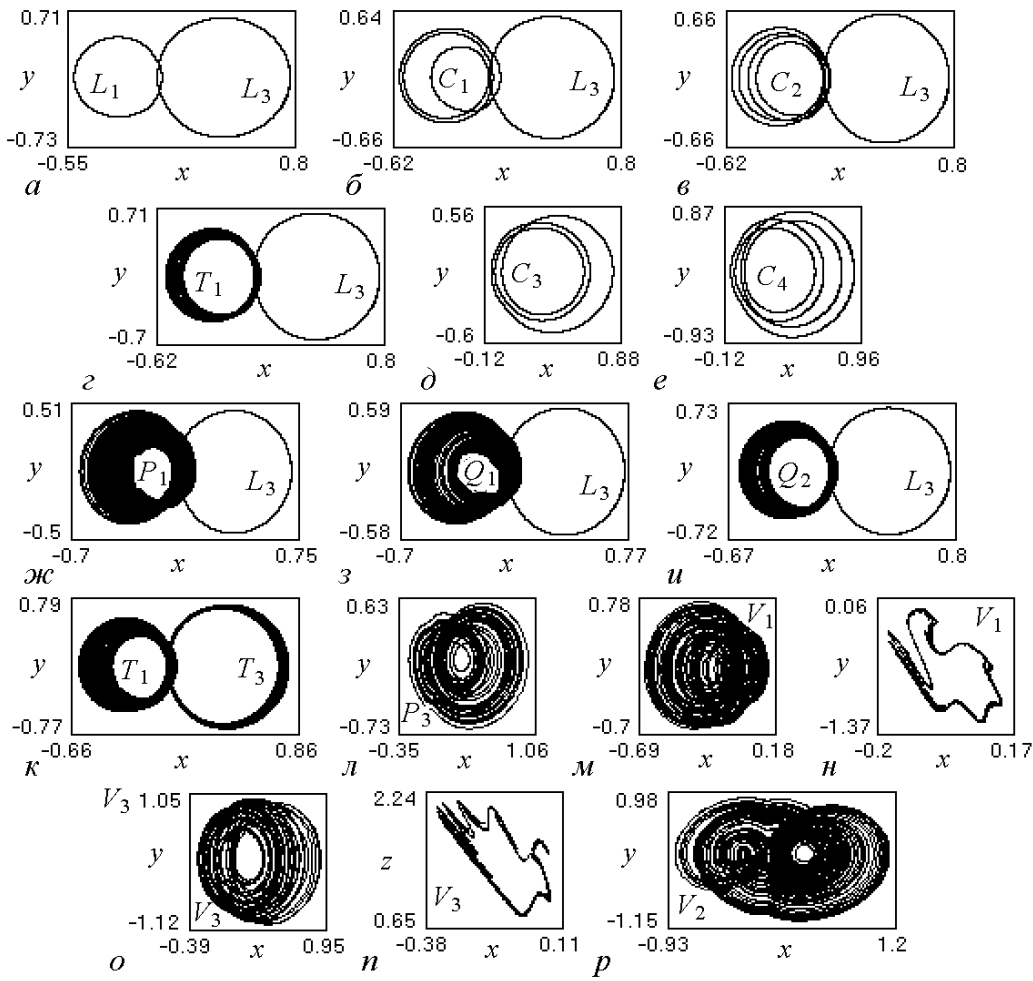


Рис. 2. Проекция фазовых портретов (а-м) и сечения Пуанкаре (н, н) аттракторов модели (1) при значениях  $\mu$ ;  $\lambda$ : 2.88, 7.0 (а); 3.0, 6.35 (б); 3.12, 7.5 (в); 2.66, 7.0 (г); 5.0, 6.7 (д); 1.29, 4.0 (е); 4.85, 7.1 (ж); 3.0, 5.75 (з); 2.65, 7.5 (и); 2.373, 7.0 (к); 3.0, 3.8 (л); 1.512, 6.0 (м, н); 0.935, 4.0 (о, н); 0.75, 1.0 (р)

к режиму квазипериодических двухчастотных колебаний. При переходе с уменьшением  $\lambda$  или с увеличением  $\mu$  через линию  $\lambda_{d1}$  реализуется бифуркация удвоения периода цикла  $L_1$ . В области  $D_2 = \{\lambda_{d3} < \lambda < \lambda_{p3}\} \setminus D_1$  для генератора характерны следующие режимы: режим цикла  $L_3$ ; режимы циклов  $C_1$  и  $C_2$ ; режимы трехоборотного и четырехоборотного предельных циклов  $C_3$  (д) и  $C_4$  (е) вокруг неустойчивого состояния равновесия  $A_3$ ; режимы хаотических аттракторов  $P_1$  (ж),  $Q_1$  (з) и  $Q_2$  (и), образующихся на базе циклов  $L_1$ ,  $C_1$  и  $C_2$ , соответственно, в результате бифуркаций удвоения периода. Таким образом, в области  $D_2$  система демонстрирует мультистабильное поведение; какой из колебательных режимов установится при этом в генераторе – это зависит от начальных условий.

При переходе с увеличением  $\lambda$  или с уменьшением  $\mu$  через линию  $\lambda_{p3}$  происходит мягкое рождение в фазовом пространстве двумерного притягивающего тора  $T_3$  (к) в результате потери устойчивости предельного цикла  $L_3$ . При пересечении с уменьшением  $\lambda$  или с увеличением  $\mu$  линии  $\lambda_{d3}$  наблюдается бифуркация удвоения периода цикла  $L_3$ . Результаты численного исследования модели (1) показывают, что для значений  $\mu$  и  $\lambda$  в области  $D_3 = \{\lambda_{o2} < \lambda < \lambda_{o1}\} \setminus D_2$  система демонстрирует

богатый набор регулярных и хаотических модуляционных режимов, в том числе режимы хаотических аттракторов  $P_1$  и  $P_3$  (*жс, л*), режимы тор-хаоса аттракторов  $V_1$  и  $V_3$  (*м-п*), возникающих в результате разрушения торов  $T_1$  и  $T_3$ , и режим двухспирального хаотического аттрактора  $V_2$  (*р, с*) с нерегулярными переключениями движений между неустойчивыми состояниями равновесия  $A_1$  и  $A_3$ . Режим аттрактора  $V_2$  возникает с уменьшением  $\lambda$  при удалении от линии  $\lambda_{d3}$ , область его существования примыкает к линии  $\lambda_{02}$ . Движение из области  $D_3$  через линии  $\lambda_{01}$  и  $\lambda_{02}$  в область  $D_0 = \{\lambda > \lambda_{01}\} \cup \{\lambda < \lambda_{02}\}$  приводит к жесткому переходу системы к режиму «большого» предельного цикла  $C_0$ , динамический диапазон которого охватывает все три состояния равновесия  $A_1, A_2$  и  $A_3$ .

Из полученных результатов следует, что если зафиксировать начальное состояние системы в области  $D_1$  (с периодическими модуляционными режимами), а затем перемещаться в область  $D_3$ , уменьшая  $\mu$  или  $\lambda$ , то в обоих случаях наблюдается переход к сложным режимам поведения генератора. При этом в случае уменьшения  $\lambda$  вначале происходит хаотизация режима цикла  $L_1$ , затем – хаотизация режимов циклов  $C_1, L_3$  и  $C_3$  через бифуркации удвоения периода. В случае уменьшения  $\mu$  происходит переход к режимам торов  $T_1$  и  $T_3$  с последующей их хаотизацией. Для обоих случаев характерно чередование режимов колебаний различной сложности. На рис. 3 приведены однопараметрические бифуркационные диаграммы:  $\{\lambda, x\}$  (а), построенная для значения  $\mu=3$ , и  $\{\mu, x\}$  (б), соответствующая значению  $\lambda = 6.95$ . Рисунок представляет примеры развития режимов предельных циклов  $L_1$  и  $L_3$  при уменьшении параметров  $\lambda$  и  $\mu$ .

Для диаграммы  $\{\lambda, x\}$  характерны следующие явления: жесткий переход от режима хаотического аттрактора  $P_1$  к режиму хаотического аттрактора  $Q_1$ , область существования которого прерывается «окном» трехоборотного предельного цикла  $C_1$ ; переключение системы от режима хаотического аттрактора  $Q_1$  к режиму двухоборотного предельного цикла  $L_3^2$ ; переход к режиму хаотического аттрактора  $P_3$ ; возникновение режима двухспирального хаотического аттрактора  $V_2$ ; прекращение колебаний на аттракторе  $V_2$  и переход к режиму предельного цикла  $C_0$ . Отметим, что область значений  $\lambda$ , соответствующая существованию режимов, возникающих на базе предельных циклов  $L_1$  и  $C_1$ , меньше области существования режимов, образующихся на базе предельного цикла  $L_3$ .

При изменении параметра  $\mu$  обнаружены следующие интересные нетривиальные особенности динамики системы. В соответствии с диаграммой  $\{\mu, x\}$  после потери устойчивости предельного цикла  $L_1$  в системе возникают квазипериодические модуляционные колебания, определяемые тором  $T_1$ , которому соответствует устойчивая инвариантная замкнутая кривая  $\Gamma_1$  отображения Пуанкаре. При переходе с уменьшением  $\mu$  через значение 2.782 возникает (при наличии кривой  $\Gamma_1$ ) сложная четырехкратная седло-узловая неподвижная точка, которая распадается на устойчивую и седловую четырехкратные неподвижные точки  $M_1$  и  $M_2$ , расположенные вне кривой  $\Gamma_1$ . Неподвижной точке  $M_1$  соответствует в фазовом пространстве устойчивый четырехоборотный предельный цикл  $C_2$ . В интервале значений  $2.586 < \mu < 2.782$  режим тора  $T_1$  существует одновременно с режимом цикла  $C_2$ . Когда  $\mu$  переходит через значение 2.586, тор  $T_1$  исчезает в результате слияния кривой  $\Gamma_1$  с «петлей», образованной сепаратрисными инвариантными кривыми седловой неподвижной точки  $M_2$ . В интервале  $2.453 < \mu < 2.586$  существует режим цикла  $C_2$ . Далее при

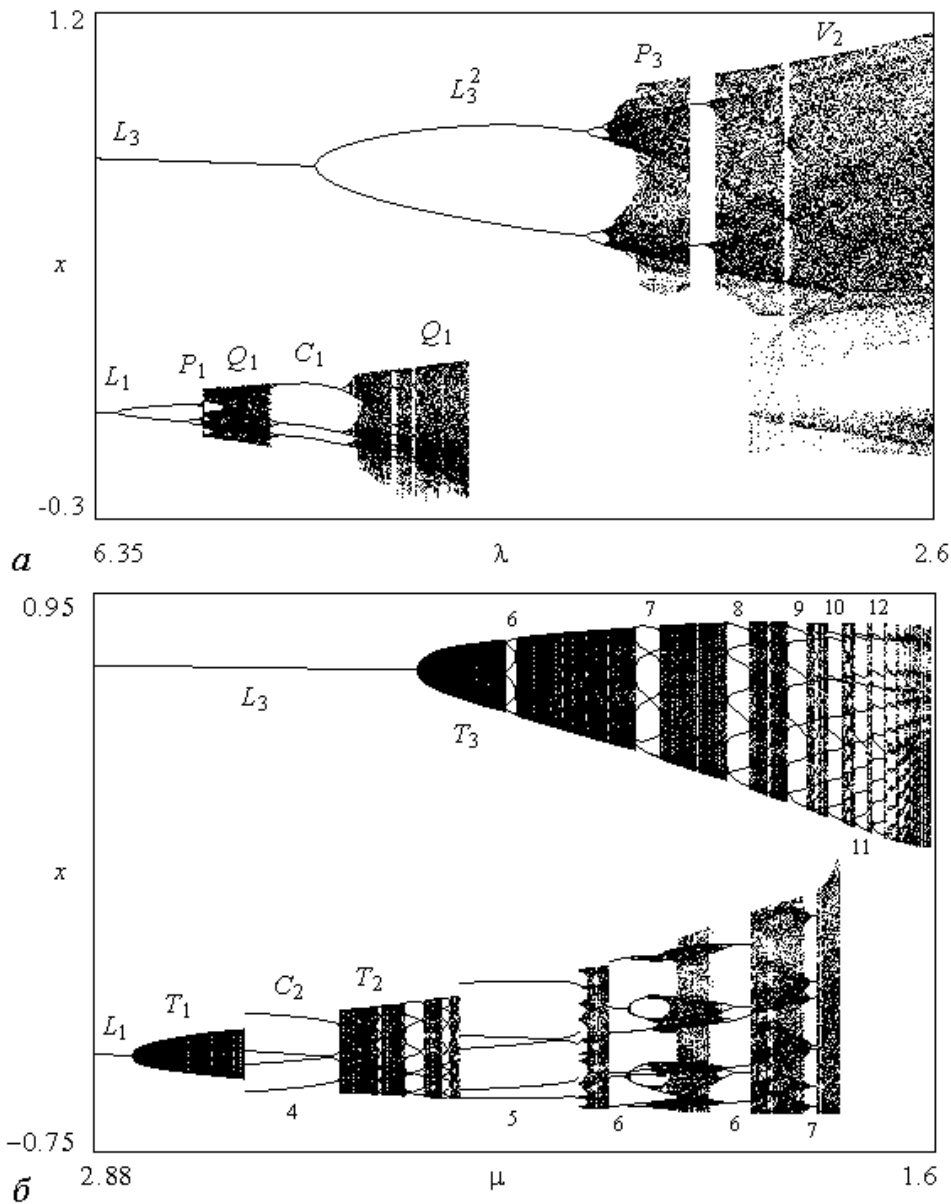


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы: *а* –  $\{\lambda, x\}$ , соответствующая  $\mu = 3.0$ ; *б* –  $\{\mu, x\}$ , соответствующая  $\lambda = 6.95$

переходе с уменьшением  $\mu$  через значение 2.453 происходит рождение устойчивой инвариантной замкнутой кривой  $\Gamma_2$  из сепаратрисных инвариантных кривых неподвижной точки  $M_2$ , и в интервале  $2.429 < \mu < 2.453$  снова наблюдается одновременное существование режима тора  $T_2$ , соответствующего кривой  $\Gamma_2$ , и режима цикла  $C_2$ . Цикл  $C_2$  исчезает в результате седло-узловой бифуркации, когда  $\mu$  переходит через значение 2.429, и система жестко переходит к режиму тора  $T_2$ . При  $\mu < 2.335$  после «окна» девятиоборотного предельного цикла начинается искажение формы инвариантной кривой  $\Gamma_2$ , что свидетельствует о постепенном вырождении тора  $T_2$  в тор-хаос. В интервале  $1.743 < \mu < 2.335$  при уменьшении  $\mu$  происходит чередование хаотических колебаний и колебаний на пяти-, шести- и семиоборотном предельных

циклах. При этом внутри «окна» шестиоборотного цикла имеет место хаотизация колебаний через бифуркации удвоения периода с последующими дехаотизацией через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения, и возвращением к режиму шестиоборотного цикла. Когда  $\mu$  становится меньше 1.743, происходит жесткий переход от хаотических колебаний к колебаниям на десятиоборотном предельном цикле вокруг состояния равновесия  $A_3$ .

Развитие режима предельного цикла  $L_3$  характеризуется, согласно диаграмме  $\{\mu, x\}$ , следующими особенностями. В интервале  $1.794 < \mu < 2.408$  наблюдается чередование квазипериодических колебаний, соответствующих тору  $T_3$ , и периодических режимов, отвечающих резонансным предельным циклам на торе  $T_3$ . При  $\mu < 1.794$  происходит переход к режиму тор-хаоса, в интервале  $1.6 < \mu < 1.794$  имеет место чередование периодических и хаотических режимов генератора. Примечательно, что периодические модуляционные режимы определяются предельными циклами, число оборотов траекторий на которых увеличивается последовательно на единицу, начиная с шести. Процесс развития колебаний завершается прекращением хаотического режима и жестким переходом системы к режиму большого предельного цикла  $C_0$ .

Исследование поведения бифуркационных кривых, приведенных на рис. 1, при изменении начальной расстройки  $\sigma$  показывает, что уменьшение  $\sigma$  ведет к сближению и совпадению при  $\sigma = 0$  бифуркационных кривых  $\lambda_{d1}$  и  $\lambda_{d3}$ , а также кривых  $\lambda_{p1}$  и  $\lambda_{p3}$ , к уменьшению и исчезновению при  $\sigma = 0$  области  $D_2$ . Кроме этого, при уменьшении  $\sigma$  на бифуркационных диаграммах  $\{\lambda, x\}$  и  $\{\mu, x\}$  (см. рис. 3) увеличиваются области значений  $\lambda$  и  $\mu$ , соответствующих существованию колебательных режимов, развивающихся на базе предельного цикла  $L_1$ . При небольших значениях  $\sigma$  в системе (1) возможно возникновение хаотического режима с перемежаемостью типа тор-хаос – тор-хаос. Этот режим определяется хаотическим аттрактором  $V_4$ , который является объединением хаотических аттракторов  $V_1$  (см. рис. 2, *м, н*) и  $V_3$  (см. рис. 2, *о, п*). Режим системы, соответствующий аттрактору  $V_4$ , характеризуется нерегулярным чередованием хаотических колебаний, соответствующих аттракторам  $V_1$  и  $V_3$ . На рис. 4 приведены бифуркационные диаграммы  $\{a, x\}$ , построенные при значениях  $\sigma = 0.085$ ,  $\lambda = 2.0$ ,  $b = 0.1$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $\mu_1 = 0.2$ ,  $\rho = 0.1$  (рис. 4, *а*) и  $\sigma = 0.002$ ,  $\lambda = 6.05$ ,  $b = 0.1$ ,  $\mu = 1.35$ ,  $\mu_1 = 0.2$ ,  $\rho = 0.1$  (рис. 4, *б*). Эти диаграммы характеризуют процессы преобразования режимов предельных циклов  $L_1$  и  $L_3$  в режим хаотического двухспирального аттрактора  $V_2$  (см. рис. 4, *а*) и в режим хаотического аттрактора  $V_4$  (см. рис. 4, *б*) при изменении параметра нелинейности  $a$ . Примечательно, что режимы аттракторов  $V_2$  и  $V_4$  существуют в широких областях изменения параметра  $a$ . На рис. 5, *а* и *б* даны  $(x, z)$ -проекции сечения Пуанкаре и зависимости  $x(\tau)$ , соответствующие аттракторам  $V_2$  и  $V_4$ .

Исследование динамики системы при изменении  $\sigma$  позволило обнаружить следующие два сценария развития режимов генератора в рассматриваемом случае  $\mu_1 > \max(\mu_1^*, \mu_1^{**})$ . Для первого сценария характерны независимое преобразование режимов колебаний относительно состояний равновесия  $A_1$  и  $A_3$  и скачкообразные переходы между этими режимами. Второй сценарий поведения системы отличается постепенными переходами между режимами колебаний относительно состояний равновесия  $A_1$  и  $A_3$  через сложные хаотические режимы, соответствующие аттракторам  $V_2$  и  $V_4$ .



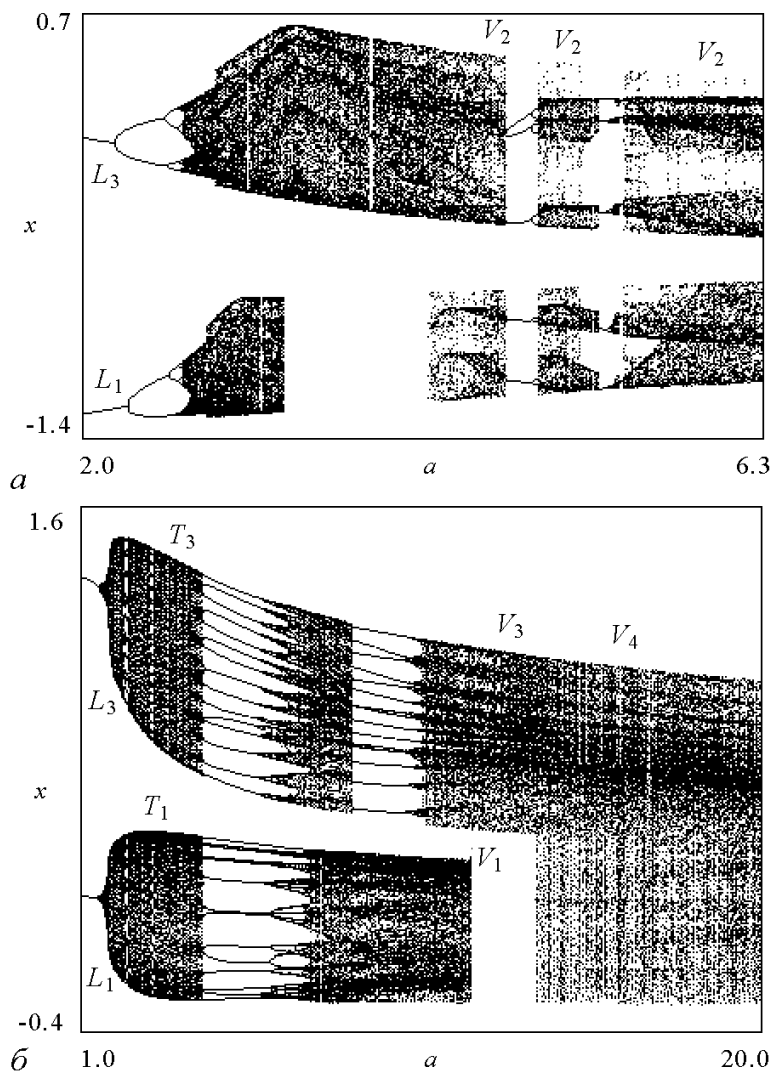


Рис. 4. Развитие режимов предельных циклов  $L_1$  и  $L_3$  при изменении параметра нелинейности  $a$

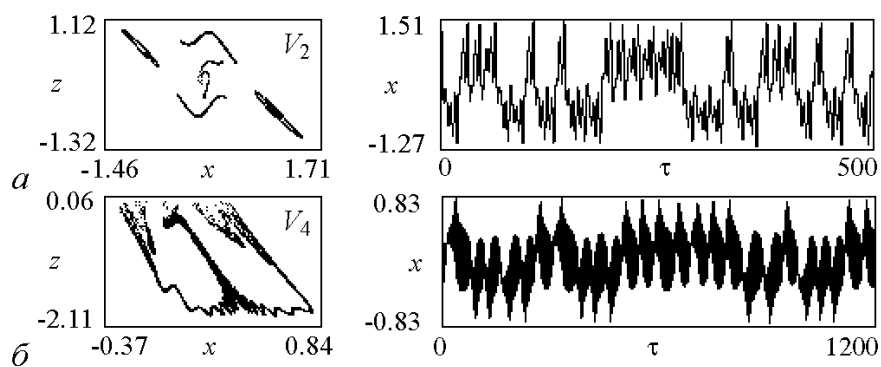


Рис. 5. Проекция фазовых портретов и временные реализации, соответствующие аттракторам  $V_2$  при  $a = 4.6$  (а) и  $V_4$  при  $a = 19.0$  (б)

3. Математическую модель системы ЧАП с ФНЧ третьего порядка и простейшей дополнительной петлей фазового управления с ФНЧ первого порядка получаем из общего уравнения системы частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАП) [16] при подстановке рассматриваемых выражений для коэффициентов передачи  $K(p)$  и  $K_1(p)$

$$\begin{aligned}
d\varphi/d\tau &= u, & du/d\tau &= z, & dz/d\tau &= v, & dv/d\tau &= w, \\
\varepsilon_1\mu_3 dw/d\tau &= \gamma - \sin\varphi - r\Phi(y) - (1 + \varepsilon_2 \cos\varphi)u - \\
&-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_2 \cos\varphi + r\beta\varepsilon_1\Phi'(y))z - (\mu_2 + \mu_3 \cos\varphi + \varepsilon_1\varepsilon_2)v - \\
&-(\mu_2\varepsilon_1 + \mu_3)w + \mu_2 u^2 \sin\varphi + \mu_3 u^3 \cos\varphi + 3\mu_3 uz \sin\varphi,
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $\varepsilon_1 = b_0\Omega$ ,  $\varepsilon_2 = b_1\Omega$ ,  $\mu_2 = b_2\Omega^2$ ,  $\mu_3 = b_3\Omega^3$ ,  $\Phi(y) = 2y/(1 + y^2)$ ,  $\Phi'(y) = 2(1 - y^2)/(1 + y^2)^2$ ,  $y = \beta u$ ,  $\gamma = \delta\omega/\Omega$ ,  $r = \Omega_1/\Omega$ ,  $\Omega$  и  $\Omega_1$  – коэффициенты усиления по цепям фазового и частотного управления;  $\delta\omega$  – начальная частотная расстройка;  $\beta = \beta_1\Omega$ ,  $\beta_1$  – расстройка частот, при которой достигается максимум  $\Phi(y)$ . Множество значений переменной  $\varphi$  образует окружность, что обуславливает цилиндричность фазового пространства системы  $U_1 = \{\varphi(\text{mod}2\pi), u, z, v, w\}$ . Система (5) инвариантна относительно замены  $(\varphi, u, z, v, w, \gamma) \rightarrow (-\varphi, -u, -z, -v, -w, -\gamma)$ , поэтому достаточно ее рассмотреть при значениях  $\gamma \geq 0$ . Параметр  $r$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем значения  $r < 0$  соответствуют инверсии характеристики частотного дискриминатора системы ЧАП. Остальные параметры системы положительны по своему физическому смыслу.

Основными режимами системы ЧФАП являются: режим синхронизации управляемого генератора опорным сигналом – в этом режиме разность частот колебаний управляемого генератора и опорного сигнала равна нулю, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение; квазисинхронные режимы, в которых имеет место периодическая или хаотическая модуляция частоты управляемого генератора около стабилизируемой по опорному сигналу средней частоты; периодические или хаотические асинхронные режимы, при которых разность фаз  $\varphi$  неограниченно возрастает или убывает. В цилиндрическом фазовом пространстве  $U_1$  режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия модели (5), квазисинхронным режимам соответствуют предельные циклы или хаотические аттракторы колебательного типа (без вращения фазы), аналогичные аттракторам модели (1); асинхронным режимам соответствуют предельные циклы или хаотические аттракторы вращательного или колебательно-вращательного типа.

**3.1.** Выясним условия существования режима синхронизации. Система (5) при значениях  $0 \leq \gamma < 1$  имеет два состояния равновесия  $A_1(\arcsin\gamma, 0, 0, 0, 0)$  и  $A_2(\pi - \arcsin\gamma, 0, 0, 0, 0)$ . Состояние равновесия  $A_1$  может быть как устойчивым, так и неустойчивым; состояние равновесия  $A_2$  – неустойчивое седлового типа. Условия устойчивости состояния равновесия  $A_1$  определяются из анализа коэффициентов соответствующего характеристического уравнения и даются следующими неравенствами:

$$c_1 c_2 - c_3 > 0, \quad (c_1 c_2 - c_3)(c_3 c_4 - c_3 c_5) - (c_1 c_4 - c_5) > 0, \tag{6}$$

в которых

$$c_1 = (\mu_2 \varepsilon_1 + \mu_3) / (\mu_3 \varepsilon_1), \quad c_2 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \mu_2 + \mu_3 (1 - \gamma^2)^{1/2}) / (\mu_3 \varepsilon_1),$$

$$c_3 = (2r\beta \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_2 (1 - \gamma^2)^{1/2}) / (\mu_3 \varepsilon_1),$$

$$c_4 = (1 + 2r\beta + \varepsilon_2 (1 - \gamma^2)^{1/2}) / (\mu_3 \varepsilon_1), \quad c_5 = (1 - \gamma^2)^{1/2} / (\mu_3 \varepsilon_1).$$

Неравенства (6) являются условиями существования режима синхронизации, а область значений параметров  $C_s$ , в которой выполняются неравенства (6), соответствует области удержания этого режима. При нарушении условий (6) происходит, как и в системе (1), либо рождение устойчивого колебательного предельного цикла, либо стягивание седлового предельного цикла к состоянию равновесия  $A_1$  с последующим жестким переходом к устойчивому колебательному предельному циклу. Таким образом, при пересечении границы области устойчивости  $C_s$  с нарушением условий (6) режим синхронизации мягко или жестко сменяется квазисинхронным режимом.

**3.2.** Обсудим особенности поведения системы в области неустойчивости режима синхронизации, выявленные при численном исследовании модели (5) и обусловленные влиянием дополнительной цепи фазового управления. Одним из интересных эффектов от объединения систем ЧАП и ФАП является переход системы от квазисинхронного режима к асинхронному режиму. Этот эффект иллюстрируют приведенные на рис. 6: однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $\{r, u\}$  точечного отображения Пуанкаре, построенная при значениях  $\gamma = 0.1$ ,  $\beta = 5$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 2$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 4.5$  (а); проекции фазовых портретов и зависимости  $u(\tau)$  (б-м), соответствующие аттракторам системы (5) при различных значениях параметра  $r$ . Диаграмма  $\{r, u\}$  характеризует развитие квазисинхронного режима предельного цикла  $S_0$  (б) при изменении параметра  $r$  от  $-0.78$  до  $-1.55$ . При уменьшении  $r$  вначале на базе цикла  $S_0$  образуется колебательный хаотический аттрактор  $P_0$  в результате бифуркаций удвоения периода (в, з), далее аттрактор  $P_0$  преобразуется в колебательно-вращательный хаотический аттрактор  $W_0$ . На рис. 6, д, е приведены проекция фазового портрета и реализация  $u(\tau)$ , соответствующие аттрактору  $W_0$  с максимальным ляпуновским показателем  $h_{\max} = 0.122$ . Затем наблюдается чередование режима аттрактора  $W_0$  с режимами двухоборотных (4 $\pi$ -периодических по  $\varphi$ ) вращательных предельных циклов. При  $r < -1.363$  система переходит к режиму однооборотного (2 $\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) вращательного предельного цикла  $L_0$  (ж), который через бифуркации удвоения периода преобразуется в хаотический аттрактор  $W_1$  (з). С уменьшением  $r$  наблюдается переход от режима аттрактора  $W_1$  к режиму колебательно-вращательного хаотического аттрактора  $W_2$  через перемежаемость хаос-хаос (и, к). На рис. 6, л, м даны проекция фазового портрета и реализация  $u(\tau)$ , соответствующие аттрактору  $W_2$  с максимальным ляпуновским показателем  $h_{\max} = 0.188$ .

Другим интересным эффектом динамики системы с частотно-фазовым управлением представляется образование режима вращательного хаотического аттрактора с переключениями фазовой переменной  $u$ . Такой хаотический аттрактор может возникать в процессе преобразования как квазисинхронного, так и асинхронного

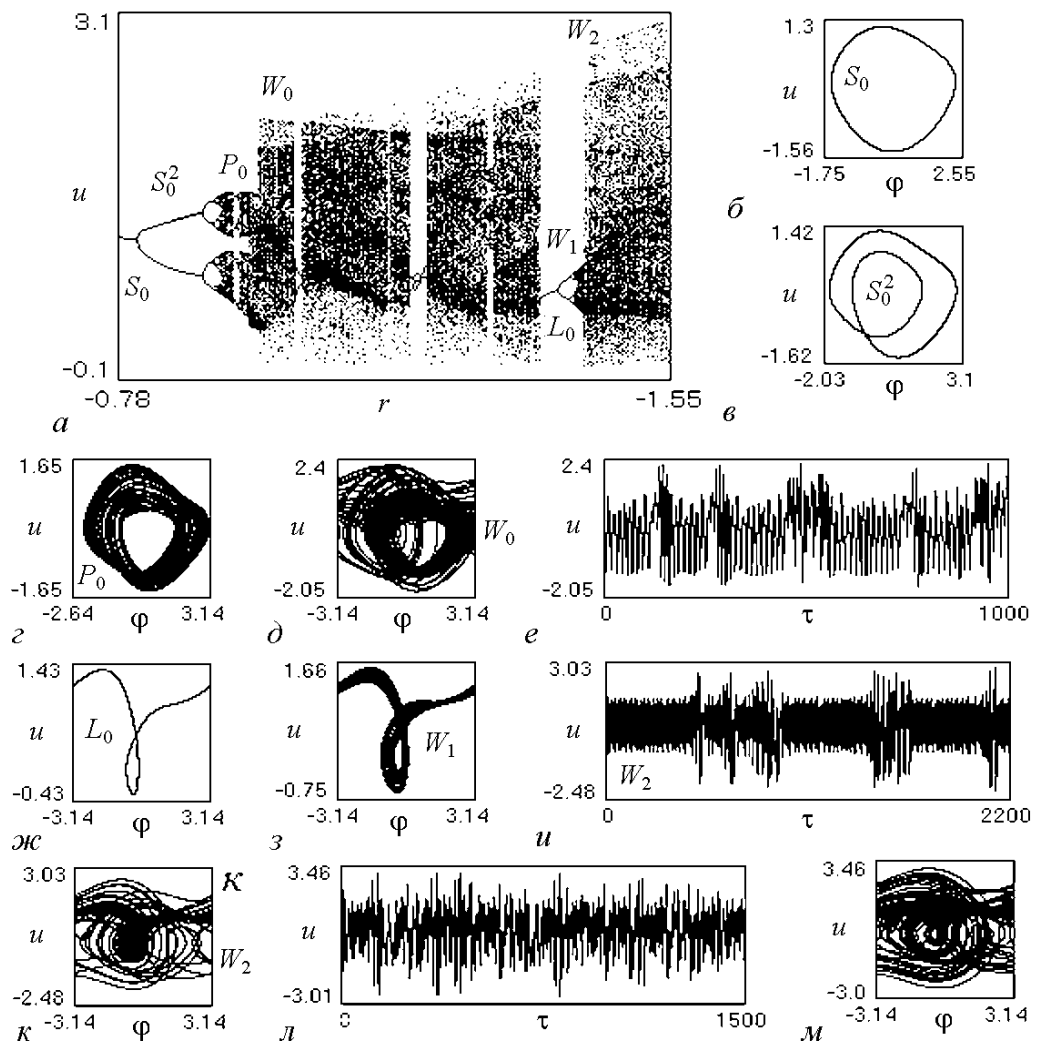


Рис. 6. Диаграмма развития квазисинхронного режима при изменении параметра  $r$  (а), проекции фазовых портретов (б-д, ж, з, к, м) и временные реализации (е, и, л) аттракторов системы (5) при значениях  $r$ :  $-0.78$  (б),  $-0.87$  (в),  $-0.97$  (з),  $-0.985$  (д, е),  $-1.365$  (ж),  $-1.43$  (з),  $-1.432$  (и, к),  $-1.55$  (л, м)

режима при изменении параметров. На рис. 7, а приведена бифуркационная диаграмма  $\{\mu_3, u\}$ , соответствующая значениям параметров  $\gamma = 0.1$ ,  $r = -1.5$ ,  $\beta = 5.75$ ,  $\varepsilon_1 = 10$ ,  $\varepsilon_2 = 1.9$ ,  $\mu_2 = 2$ , которая отражает особенность развития режимов вращательных предельных циклов, связанную с образованием режима вращательного хаотического аттрактора с переключениями на базе асинхронного режима; на рис. 7, б-к даны проекции фазовых портретов, зависимости  $u(\tau)$  и сечения Пуанкаре, соответствующие аттракторам системы (5) при различных значениях варьируемого параметра  $\mu_3$ . При  $\mu_3 = 2.36$  в фазовом пространстве  $U_1$  одновременно существуют асинхронные режимы вращательных предельных циклов  $L_4$  и  $L_5$  (б). С увеличением  $\mu_3$  для системы характерны следующие явления: образование вращательного хаотического аттрактора  $W_3$  (в) через бифуркации удвоения периода цикла  $L_4$ ; жесткий переход от режима аттрактора  $W_3$  к режиму двухоборотного предельного цикла  $L_5^2$ , образовавшегося в результате бифуркации удвоения периода цикла  $L_5$ ; образование

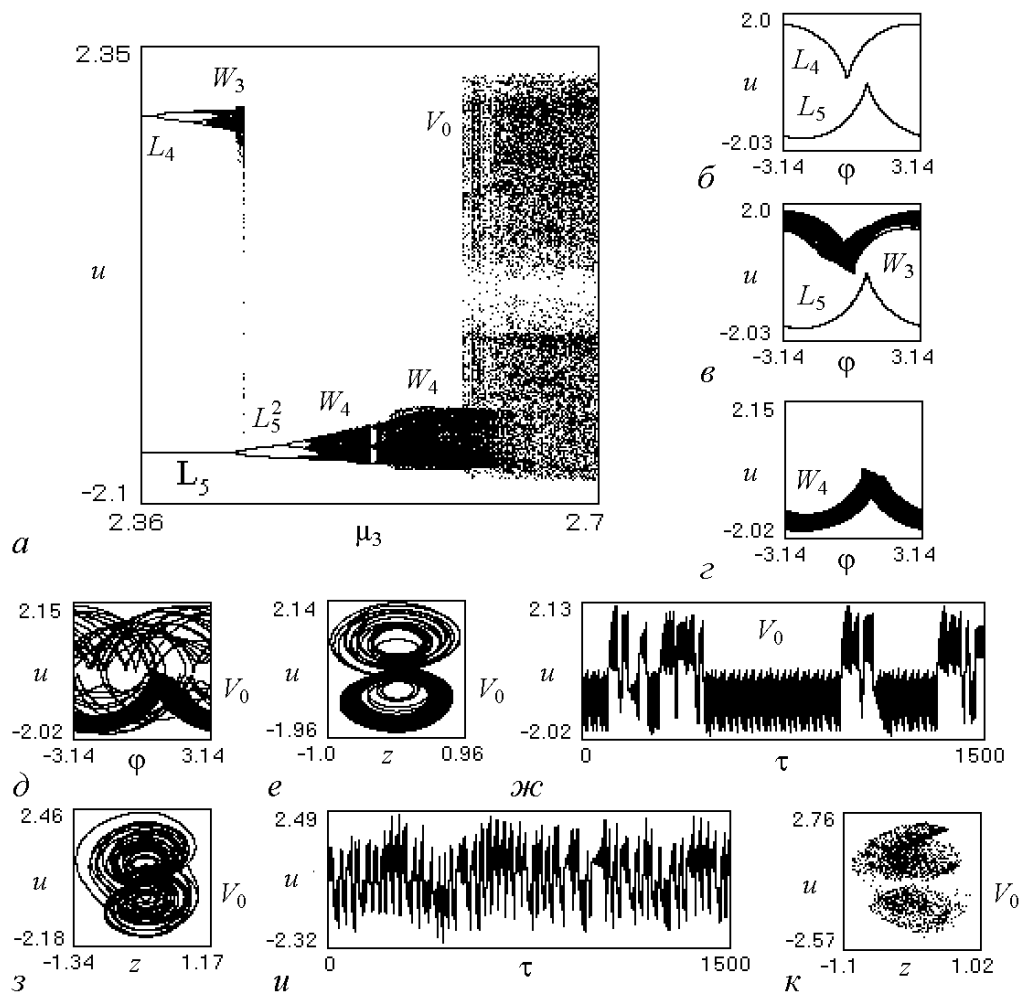


Рис. 7. Диаграмма развития асинхронных режимов при изменении параметра  $\mu_3$  (а), проекции фазовых портретов (б-е, з), сечение Пуанкаре (к) и временные реализации (ж, и) аттракторов системы (5) при значениях  $\mu_3$ : 2.36 (б), 2.433 (в), 2.599 (з), 2.61 (д-ж), 3.7 (з, и, к)

вращательного хаотического аттрактора  $W_4$  (з) через бифуркации удвоения периода цикла  $L_5$ ; переход (при  $\mu_3 > 2.5995$ ) к режиму вращательного хаотического аттрактора  $V_0$  с переключением переменной  $u$  (д-ж). При значениях  $\mu_3 > 2.5995$  на диаграмме  $\{\mu_3, u\}$  наблюдаются две области сосредоточения колебаний с нерегулярными переходами между этими областями. Хаотический аттрактор  $V_0$  при  $\mu_3 = 2.61$  (д-ж) имеет максимальный ляпуновский характеристический показатель  $h_{\max} = 0.133$ . С увеличением  $\mu_3$  частота переключений движений на аттракторе  $V_0$  увеличивается, величина  $h_{\max}$  растет. На рис. 7, з-к показаны фазовый портрет, реализация  $u(\tau)$  и сечение Пуанкаре, соответствующие аттрактору  $V_0$  с  $h_{\max} = 0.2$ .

На рис. 8 приведены проекции фазовых портретов и зависимости  $u(\tau)$ , иллюстрирующие переход к режиму вращательного хаотического аттрактора с переключениями на базе квазисинхронного режима колебательного предельного цикла  $S_1$ , который зафиксирован при значениях  $\gamma = 0.1$ ,  $r = -1.55$ ,  $\beta = 5$ ,  $\varepsilon_1 = 1.8$ ,  $\varepsilon_2 = 2.05$ ,

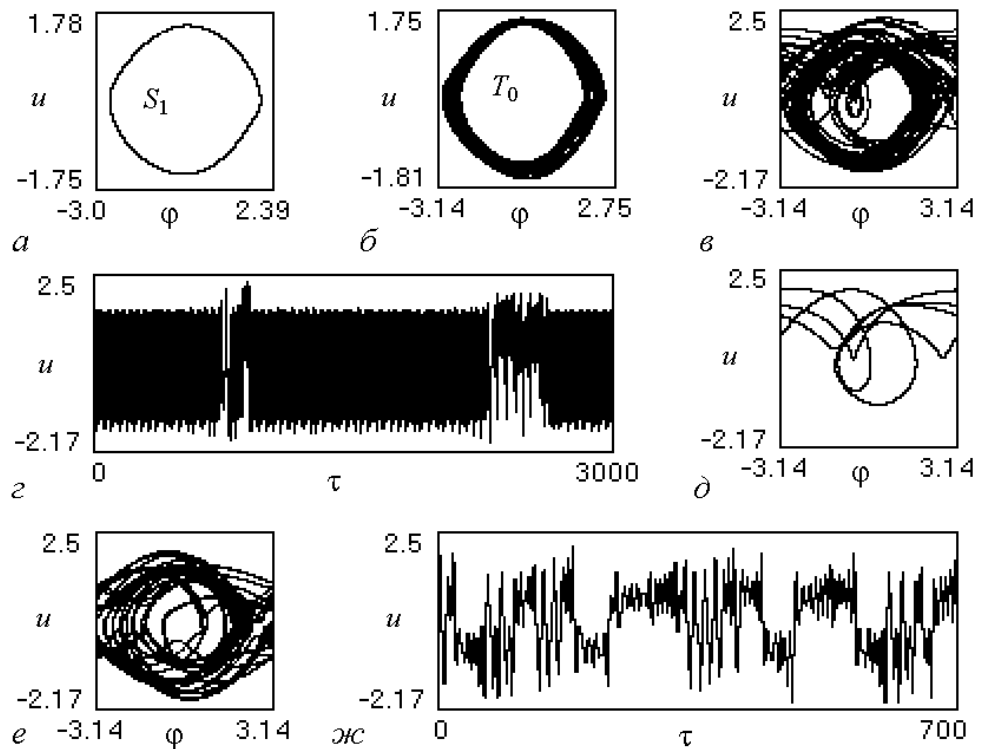


Рис. 8. Эволюция квазисинхронного режима при изменении параметра  $\mu_2$ : 1.32 (а), 1.357 (б), 1.358 (в, з), 1.39 (д), 1.55 (е, ж)

$\mu_3 = 2.35$ , параметр  $\mu_2$  изменяется от 1.32 до 1.55. Здесь имеет место следующий сценарий развития динамики системы с увеличением  $\mu_2$ :

*режим цикла  $S_1$  (а)  $\rightarrow$  квазисинхронный режим тора  $T_0$  (б)  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  переход к режиму колебательно-вращательного хаотического  
аттрактора через перемежаемость (в, з)  $\rightarrow$  асинхронный режим  
вращательного четырехоборотного предельного цикла (д)  $\rightarrow$   
жесткий переход к режиму колебательно-вращательного хаотического  
аттрактора с переключениями (е, ж).*

Численное исследование системы (5) показывает, что развитие неустойчивости асинхронного режима вращательного предельного цикла происходит также и в результате бифуркации рождения двумерного вращательного тора. Этот эффект иллюстрируют бифуркационная диаграмма  $\{\mu_2, u\}$ , построенная на рис. 9, а для значений  $\gamma = 0.1$ ,  $r = -1.55$ ,  $\beta = 5$ ,  $\varepsilon_1 = 1.8$ ,  $\varepsilon_2 = 2.045$ ,  $\mu_3 = 2.35$ , и проекции фазовых портретов, сечения Пуанкаре и зависимости  $u(\tau)$ , соответствующие аттракторам системы (5) при различных значениях параметра  $\mu_2$  (б-к). При уменьшении  $\mu_2$  вначале из вращательного предельного цикла  $L_6$  (б) рождается двумерный вращательный тор  $T_4$ , фазовый портрет и сечение Пуанкаре которого даны соответственно на рис. 9, в, г. Область существования режима тора  $T_4$  прерывается «окном» четырехоборотного (8л-периодического по  $\varphi$ ) вращательного предельного цикла, после которого наблюдается искажение замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma_4$  (з, д), что сви-

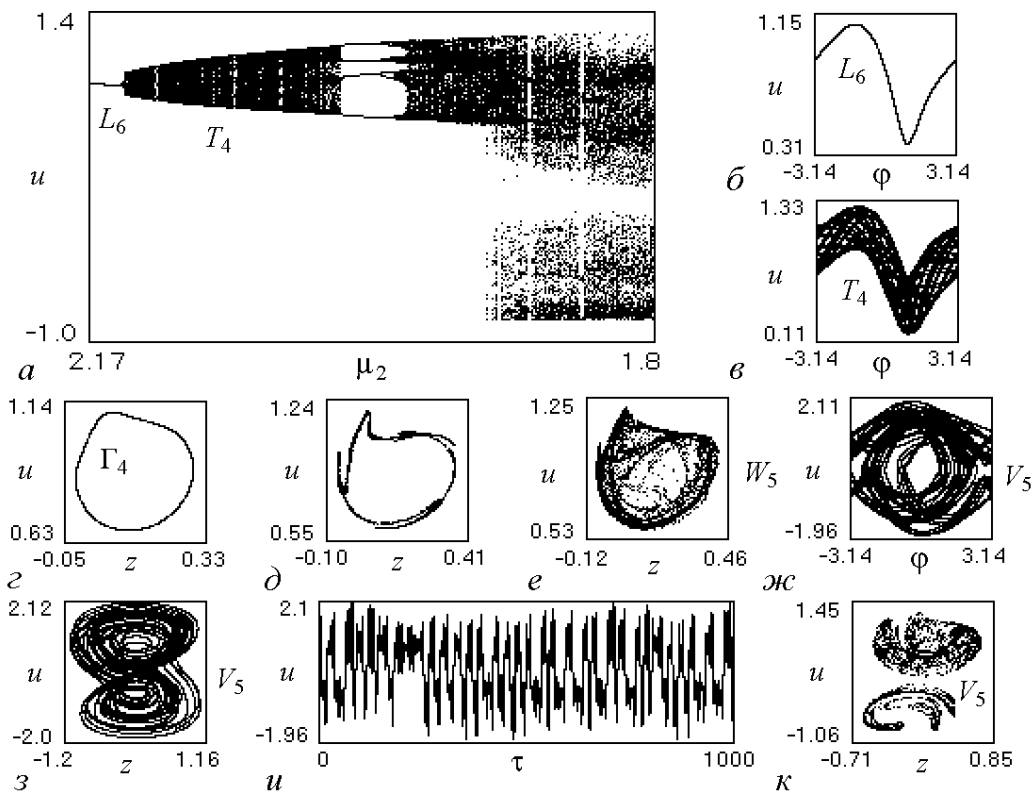


Рис. 9. Эволюция асинхронного режима при изменении  $\mu_2$  (а), проекции фазовых портретов (б, в, ж, з), сечения Пуанкаре (z-е, к) и реализации колебаний ( $u$ ) при значениях  $\mu_2$ : 2.17 (б), 2.05 (в, з), 1.95 (д), 1.917 (е), 1.8 (ж-к)

детельствует о постепенном вырождении тора  $T_4$  в хаотический вращательный аттрактор  $W_5$  типа тор-хаос (д, е). Затем режим аттрактора  $W_5$  преобразуется в режим хаотического вращательного аттрактора  $V_5$  с переключениями фазовой переменной  $u$ . На рис. 9, ж-к даны проекции фазовых портретов, реализация  $u(\tau)$  и сечение Пуанкаре, соответствующие аттрактору  $V_5$  с максимальным ляпуновским показателем  $h_{\max} = 0.1039$ . При дальнейшем уменьшении  $\mu_2$  величина  $h_{\max}$  вначале растет (при  $\mu_2 = 1.42$ ,  $h_{\max} = 0.1824$ ), затем убывает. При  $\mu_2 < 1.38$  наблюдаются перемежаемость хаос-хаос, затем переход к режиму колебательного тора, который с уменьшением  $\mu_2$  вырождается в колебательный предельный цикл. Таким образом, результаты, представленные на рис. 9, показывают пример перевода системы из асинхронного режима в квазисинхронный режим.

В результате исследования системы (5) выяснено, что образование режима хаотических колебаний на базе двумерного вращательного тора реализуется также через бифуркации удвоения торов. Происходящие при этом явления характеризуют представленные на рис. 10 проекции отображения Пуанкаре (а-г, е-н, п) и реализации  $u(\tau)$  (д, о, р, с). В качестве начального состояния системы выбран режим вращательного тора  $T_5$ , которому соответствует замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma_5$  (рис. 10, а), при значениях параметров  $\gamma = 0.1$ ,  $r = -1.55$ ,  $\beta = 5$ ,  $\varepsilon_1 = 1.7$ ,  $\varepsilon_2 = 2.05$ ,  $\mu_2 = 2.05$ ,  $\mu_3 = 2.35$ , и прослежена его эволюция при изменении параметра  $\varepsilon_1$ . Установлено, что увеличение  $\varepsilon_1$  в интервале (2.12; 8.87) сопровождается чередованием режима

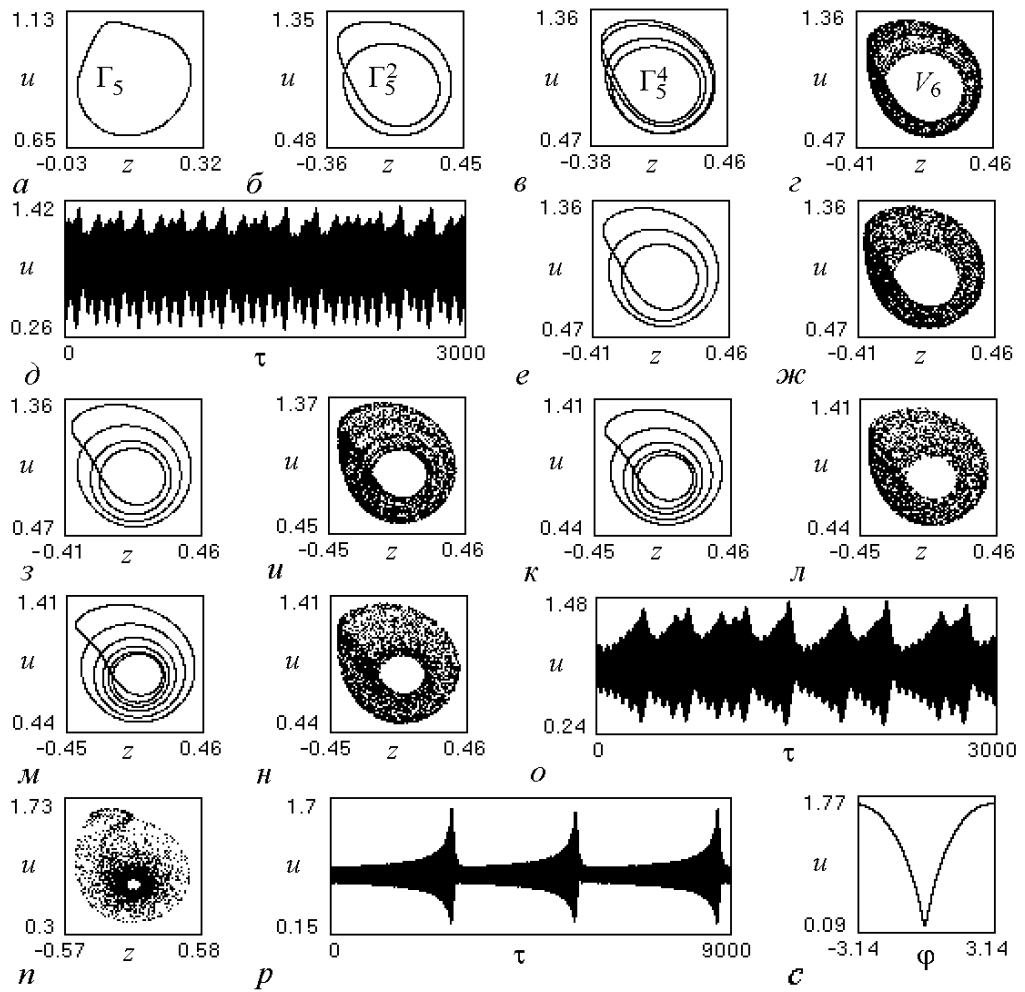


Рис. 10. Сложные асинхронные режимы системы, наблюдаемые при изменении параметра  $\varepsilon_1$ : 1.7 (а), 12.8 (б), 14.3 (в), 18.0 (г, д), 18.2 (е), 22.5 (ж), 22.8 (з), 26.0 (и), 26.1 (к), 28.5(л), 28.7 (м), 30.7 (н, о), 67.3 (п), 75.76 (р)

тора  $T_5$  и режимов вращательных предельных циклов оборотности 4, 5, 6 и 7 (соответственно  $8\pi$ -,  $10\pi$ -,  $12\pi$ - и  $14\pi$ -периодических по  $\varphi$ ); при  $\varepsilon_1 > 8.87$  наблюдаются бифуркации удвоения периода замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma_5$  (б, в), адекватные бифуркациям удвоения тора  $T_5$ , которые завершаются образованием хаотического аттрактора  $V_6$  (г, д). При дальнейшем увеличении  $\varepsilon_1$  происходит чередование режима аттрактора  $V_6$  и режимов сложных двумерных торов (е-о), причем число оборотов замкнутых инвариантных кривых, соответствующих этим торам, начиная с трех (е), последовательно увеличивается на единицу. Переходы к хаосу реализуются через бифуркации удвоения этих замкнутых инвариантных кривых. На рис. 10, е, з, к, м показаны, соответственно, трех-, четырех-, пяти- и шестиоборотные замкнутые инвариантные кривые  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  и  $\Gamma_9$ .

Следующее явление, наблюдаемое при увеличении  $\varepsilon_1$ , заключается в появлении в фазовом пространстве  $U_1$  пары вращательных однооборотных ( $2\pi$ -периодических по  $\varphi$ ) предельных циклов – устойчивого  $L_7^+$  и седлового  $L_7^-$ . Это происходит, когда параметр  $\varepsilon_1$  переходит через значение 49.13 и система (5) испытывает



седло-узловую бифуркацию однооборотного вращательного предельного цикла. В интервале  $\varepsilon_1 \in (49.14; 75.51)$  режим хаотических колебаний на аттракторе  $V_6$  и режим цикла  $L_7^+$  существуют одновременно ( $n-c$ ). При продолжении увеличения  $\varepsilon_1$  и переходе через значение 75.51 наблюдается прекращение хаотических колебаний и жесткий переход к режиму цикла  $L_7^+$ . Анализ фазовых портретов, сечений Пуанкаре и реализаций  $u(\tau)$ , построенных при различных значениях параметра  $\varepsilon_1$  из интервала (49.14; 75.51), позволяет заключить, что механизмом такого перехода является столкновение в фазовом пространстве хаотического аттрактора  $V_6$  с седловым предельным циклом  $L_7^-$ , в результате которого фазовые траектории устремляются к предельному циклу  $L_7^+$  ( $c$ ).

Отметим, что переход к хаосу через удвоения инвариантных торов реализуется также и в случаях, когда варьируемыми параметрами являются  $\mu_3$  или  $r$ . При этом в случае, когда  $\mu_3$  является варьируемым параметром, возможен вариант поведения системы, при котором процесс чередования режима тор-хаоса и режимов сложных многооборотных торов завершается переходом к хаотическому аттрактору с переключением фазовой переменной  $u$ .

4. В данной работе в рамках моделей (1) и (5) рассмотрены особенности динамики автогенераторной системы с частотным управлением, обусловленные усложнением фильтра в цепи автоподстройки и добавлением цепи фазового управления с простейшим фильтром первого порядка. Установлено, что применение фильтра четвертого порядка вызывает следующие эффекты динамики системы с частотным управлением: уменьшение, а затем исчезновение областей существования моногармонических режимов управляемого генератора; объединение хаотических аттракторов, возникающих при разрушении торов, и переход к режиму перемежающегося тор-хаоса; качественное различие в поведении системы при пересечении границ области периодических автомодуляционных режимов – в одном случае имеет место переход к режимам тор-хаоса, в другом случае наблюдаются бифуркации удвоения периода, также ведущие к хаотизации колебаний; увеличение области параметров, соответствующих режиму периодической частотной модуляции с большим динамическим диапазоном изменения фазовых переменных.

Добавление цепи фазовой автоподстройки приводит к появлению в комбинированной системе с частотно-фазовым управлением новых, не свойственных отдельным подсистемам частотной и фазовой автоподстройки режимов, определяемых периодическими и хаотическими аттракторами вращательного и колебательно-вращательного типов. Численное исследование модели (5) дало возможность увидеть специфику аттракторов асинхронных режимов, развивающихся в системе, и выяснить механизмы перехода к хаотическому поведению. В частности, обнаружены переходы между квазисинхронными и асинхронными режимами, возникновение режимов хаотических аттракторов с переключениями, возникновение хаотических режимов в результате бифуркаций удвоения периода предельных циклов, через перемежаемость, через разрушение инвариантных торов, а также в результате бифуркаций удвоения торов.

Выясненные в работе особенности динамики моделей (1) и (5) позволяют ориентироваться в выборе значений параметров петель автоподстройки при решении задач формирования различных типов колебаний генератора и управления их свой-

ствами и областями существования. Большое разнообразие несинхронных режимов и возможность эффективного воздействия на их свойства и области существования путем легко реализуемого изменения параметров цепей управления создает предпосылки для расширения области применения систем с частотным и частотно-фазовым управлением и, в частности, для применения в системах передачи информации с хаотическими сигналами [17].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 05-02-17409, № 06-02-16499).*

### **Библиографический список**

1. *Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.* Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.
2. *Клэппер Дж., Фрэнкл Дж.* Системы фазовой и частотной автоподстройки частоты. М.: Энергия, 1977.
3. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. *Chua's circuits: A paradigm for chaos / Edited by R. Madan.* Singapore: World Scientific, 1993.
6. *Заулин И.А., Пономаренко В.П.* Динамические режимы и бифуркационные явления в нелинейных статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 5. С. 889.
7. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Сложная динамика систем с неединственным состоянием равновесия // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 1. С. 30.
8. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828.
9. *Пономаренко В.П.* Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 44.
10. *Пономаренко В.П.* Формирование сложных колебаний в автогенераторной системе с нелинейной цепью частотного управления // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 565.
11. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // Журнал технической физики. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
12. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125.
13. *Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Фрайман Л.А.* Качественно-численный метод в исследовании трехмерных нелинейных СФС // Системы фазовой синхронизации

ции / Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл. 2. С. 21.

14. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Вып. 2(4). Н. Новгород, 1997. С. 15.
15. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.
16. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Науч. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
17. Дмитриев А.С., Широков М.Е. Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.

НИИ Прикладной математики  
и кибернетики Нижегородского  
государственного университета

Поступила в редакцию 27.02.2007

## DYNAMICAL REGIMES IN MODELS OF AUTOOSCILLATORY SYSTEMS WITH FREQUENCY AND FREQUENCY-PHASE CONTROL

*V.P. Ponomarenko*

We present the results of investigation of dynamical regimes in the models of oscillatory systems with frequency and frequency-phase control. The processes of excitation of nonsynchronous regimes and transitions between them are considered. A special attention is given to the study of the origin and stages of development of deterministic chaos in these systems. The existence of several types of chaotic attractors is established. Various scenarios of transition from regular dynamical regimes to chaotic ones under variation of the systems parameters are analyzed. The results are presented in the form of one- and two-parameter bifurcation diagrams, phase portraits and waveforms of attractors.



*Пономаренко Валерий Павлович* – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail: povp@uic.nnov.ru