

**ВЫДЕЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ  
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЙ  
ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ  
ХАОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

*А.А. Короновский, А.Е. Храмов*

В работе предложен метод выделения неустойчивых периодических пространственно-временных состояний хаотической динамики пространственно распределенных систем, аналогичных неустойчивым орбитам хаотических аттракторов систем с малым числом степеней свободы. Предложенный метод применен к анализу пространственно-временного хаоса в пучково-плазменной системе со сложным поведением – гидродинамической модели диода Пирса.

При исследовании сложной динамики хаотических систем с малым числом степеней свободы одной из важных характеристик оказываются наборы неустойчивых периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор. Неустойчивые периодические орбиты (НПО) представляют собой седловые периодические решения уравнений, описывающих исследуемую динамическую систему. Интерес к НПО хаотических аттракторов определяется, во-первых, тем, что набор НПО является важной характеристикой динамической системы, позволяя сделать выводы о сложности хаотического режима [1–3]. Во-вторых, особенности динамики связанных хаотических систем в терминах неустойчивых периодических орбит часто используются для объяснения особенностей различных типов хаотической синхронизации, в частности, полной [4], фазовой синхронизации [5], синхронизации временных масштабов [23]. В-третьих, знание НПО имеет большое прикладное значение в задачах управления хаосом, под которым понимаются методы стабилизации НПО малыми воздействиями на систему с помощью различных типов обратной связи. В частности, в методе непрерывной обратной связи [7], наиболее часто используемом на практике, для такой стабилизации необходимо знать траекторию в фазовом пространстве, соответствующую НПО. Для нахождения НПО используется либо метод построения распределения времен возврата [8], либо метод, предложенный P. Schmelcher и F. Diakonov (SD-метод) [9, 10].

В пространственно распределенных хаотических системах аналогом НПО являются неустойчивые периодические пространственно-временные состояния

(НППВС) [11–14], которые также могут быть использованы для управления хаотической динамикой распределенных систем. Так, в работах [12, 14, 15] исследовалось управление сложной хаотической динамикой распределенных пучково-плазменных систем путем стабилизации НППВС. В [12, 14, 16] для нахождения НППВС модели хаотической пучково-плазменной системы (диод Пирса в режиме с образованием виртуального катода и полного прохождения электронов) был использован метод построения распределений времен возврата, аналогичный соответствующему методу для систем с малым числом степеней свободы [8], однако такой подход недостаточно точен и требует больших численных затрат для построения соответствующих распределений.

В данной работе мы предлагаем использовать для выделения НППВС SD-метод [9, 10], адаптированный для анализа распределенной системы. В качестве исследуемой модели рассмотрим гидродинамическую модель диода Пирса, которая является одной из эталонных моделей с хаотической динамикой [17–21].

Динамика электронного потока в диоде Пирса в рамках гидродинамического приближения описывается самосогласованной системой уравнений движения, непрерывности и уравнения Пуассона относительно безразмерных переменных [17]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2(\rho - 1) \quad (1)$$

с граничными условиями:  $v(0, t) = 1$ ,  $\rho(0, t) = 1$ ,  $\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0$ . В уравнениях (1) гидродинамической теории диода Пирса использованы безразмерные переменные: потенциал поля пространственного заряда  $\varphi$ , плотность  $\rho$ , скорость электронного потока  $v$ , координата  $x$  и время  $t$ , которые связаны с размерными переменными соотношениями  $\varphi' = (v_0^2/\eta)\varphi$ ,  $\rho' = \rho_0\rho$ ,  $v' = v_0v$ ,  $x' = Lx$ ,  $t' = (L/v_0)t$ , где штрихом обозначены размерные величины,  $\eta$  – удельный заряд электрона;  $\alpha$  – параметр Пирса, имеющий смысл относительного угла пролета электронов по плазменной частоте  $\omega_p$  (подробнее см. [17]).

Рассмотрим процедуру выделения НППВС с помощью SD-метода применительно к распределенной системе.

На первом этапе исследования восстанавливается вектор состояния  $\mathbf{R}$  системы в фазовом пространстве. Известно [17–20], что размерность  $N$  фазового пространства хаотических колебаний в диоде Пирса может быть приближенно оценена как  $N = 3$ , что косвенно подтверждается расчетом размерности аттракторов [19] и построением конечномерной модели методом Галеркина [21]. В качестве вектора состояния в данном случае использовался вектор, составленный из значений плотности пространственного заряда, снимаемых из различных точек пространства взаимодействия:  $\mathbf{R}(t) = \{\rho(x = 0.25, t), \rho(x = 0.5, t), \rho(x = 0.75, t)\}^T$ .

Важным моментом здесь является однозначное соответствие между восстановленным вектором  $\mathbf{R}(t_0)$  в конечномерном фазовом пространстве и пространственным состоянием распределенной системы  $\mathbf{U}(t_0) = \langle \rho(x, t_0), v(x, t_0), \varphi(x, t_0) \rangle^T$  в произвольный момент времени  $t = t_0$ . Для анализа такого соответствия в работе использовался метод ближайших соседей [22], с помощью которого было показа-

но, что расстояние  $d(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\|$  между двумя векторами  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(t_1)$  и  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(t_2)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  близко к нулю только тогда, когда расстояние между двумя пространственными состояниями

$$S(\mathbf{U}(t_1), \mathbf{U}(t_2)) = \left( \int_0^1 \|\mathbf{U}(x, t_1) - \mathbf{U}(x, t_2)\|^2 dx \right)^{1/2} \quad (2)$$

также близко к нулю. Здесь  $\|\cdot\|$  суть Евклидова норма в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Согласно методу ближайших соседей это означает однозначное соответствие между состоянием исходной распределенной системы  $\mathbf{U}(x, t)$  и восстановленным вектором  $\mathbf{R}(t)$ , поэтому мы можем использовать восстановленный аттрактор в конечномерном фазовом пространстве для нахождения НППВС с помощью SD-метода.

Далее для нахождения неустойчивой орбиты и соответствующего ей неустойчивого периодического пространственно-временного состояния в восстановленном фазовом пространстве выбирается некоторая произвольная плоскость (в данном случае  $\rho(x = 0.25, t) = 1.0$ ), которая рассматривается как плоскость сечения Пуанкаре. Обозначим состояние системы, соответствующее моменту  $n$ -го пересечения фазовой траекторией выбранного сечения Пуанкаре, как  $\mathbf{R}_n$  (отметим, что данное пересечение происходит в некоторый момент времени  $t_n$ ). Тогда описание поведения системы можно свести к дискретному отображению вида

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{R}_n), \quad (3)$$

где  $\mathbf{G}(\cdot)$  – оператор эволюции. Очевидно, что аналитическое выражение для оператора  $\mathbf{G}$  найти невозможно, однако, численно интегрируя исходную систему гидродинамических уравнений (1), возможно найти последовательность значений  $\{\mathbf{R}\}_n$ , получающуюся из отображения (3).

SD-метод для нахождения неустойчивых периодических орбит предполагает исследование модифицированной модели распределенной системы, которая описывалась бы следующим отображением [10]:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \lambda C [\mathbf{G}(\mathbf{R}_n) - \mathbf{R}_n]. \quad (4)$$

В работах [9, 10] строго показано, что подобная модифицированная система в случае анализа дискретных систем и систем с малым числом степеней свободы позволяет эффективно стабилизировать неустойчивые периодические орбиты исходной системы, которые в случае модифицированной системы (4) из седловых становятся устойчивыми по всем направлениям. Применение SD-метода к анализу распределенной системы также оказывается эффективным для выделения НППВС.

В уравнении (4)  $\lambda = 0.1$  – константа метода и  $C$  – матрица, которая была выбрана, следуя работе [10]

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Модифицированное отображение (4) позволяет определить только неустойчивое периодическое состояние наинизшего периода  $T_1$ , которому соответствует единственное прохождение системой за период  $T_1$  выбранного сечения Пуанкаре. Для нахождения неустойчивых периодических состояний с периодом  $T_p$  более высокого порядка, которые характеризуются прохождением фазовой траекторией сечения Пуанкаре  $p$  раз за период  $T_p$ , необходимо рассматривать модифицированное отображение вида

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \lambda C [\mathbf{G}^p(\mathbf{R}_n) - \mathbf{R}_n], \quad (6)$$

где  $\mathbf{G}^p(\cdot)$  –  $p$  раз проитерированное отображение  $\mathbf{G}(\cdot)$  (то есть при численном решении исходной системы гидродинамических уравнений и восстановлении отображения (6) следует рассматривать только каждое  $p$ -е пересечение фазовой траектории плоскости сечения Пуанкаре, где  $p$  – очевидно, целое.

Таким образом, численно итерируя отображение (6) при различных значениях  $p$ , удается найти неустойчивые периодические пространственно-временные состояния, которые в модифицированной системе, описываемой отображением (6), оказываются устойчивыми. Поэтому результатом интегрирования модифицированной системы (которая представляет собой систему гидродинамических уравнений с учетом отображения (6)) оказывается периодическое решение, соответствующее неустойчивому периодическому состоянию в исходной системе.

При численном интегрировании модифицированной системы возникает единственная сложность, определяемая тем, что при нахождении состояния  $\mathbf{R}_{n+1}$  в момент времени  $t^{n+1}$  в соответствии с формулой (6) известны только координаты этого состояния в сечении Пуанкаре, но не определены соответствующие ему пространственные распределения плотности пространственного заряда  $\rho(x, t^{n+1})$ , скорости  $v(x, t^{n+1})$  электронного потока и потенциала  $\varphi(x, t^{n+1})$ . Для нахождения данных пространственных распределений была использована следующая процедура. Система гидродинамических уравнений, описывающая диод Пирса, интегрировалась до тех пор, пока некоторое состояние  $\mathbf{R}_s$  системы не совпадало с искомым состоянием  $\mathbf{R}_{n+1}$  с некоторой заданной точностью:  $\|\mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_s\| < \delta = 10^{-3}$ . При выполнении данного условия пространственные распределения, соответствующие состоянию  $\mathbf{R}_s$ , принимались за пространственные распределения состояния  $\mathbf{R}_{n+1}$  и далее делалась очередная итерация в соответствии с формулой (6).

Обратимся к результатам выделения неустойчивых пространственно-временных состояний хаотической динамики диода Пирса SD-методом. На рис. 1, *a* показана пространственно-временная динамика плотности пространственного заряда пучка в диоде Пирса в режиме развитых хаотических колебаний при  $\alpha = 2.858\pi$ . Как показало исследование неустойчивых пространственно-временных состояний, модифицированная процедура SD-метода применительно к распределенной системе оказывается сходящейся и позволяет находить искомые периодические пространственно-временные состояния. Сходимость процедуры иллюстрирует рис. 1, *б*, на котором показана зависимость значений плотности пространственного заряда  $\rho_n(x = 0.75)$  в момент прохождения изображающей точкой в фазовом пространстве сечения Пу-

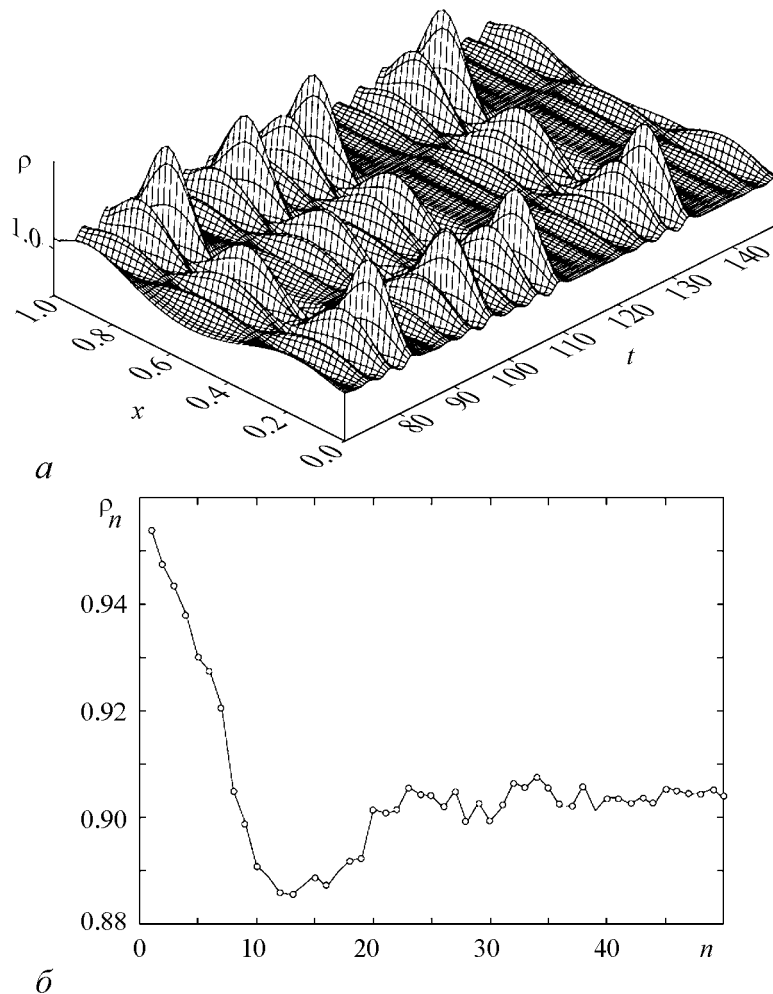


Рис. 1. *a* – Пространственно-временное распределение плотности пространственного заряда  $\rho(x, t)$  в исследуемом режиме колебаний при  $\alpha = 2.858\pi$ , когда в диоде Пирса наблюдается пространственно-временной хаос. *б* – Зависимость значений плотности пространственного заряда  $\rho$  в момент прохождения изображающей точки в псевдофазовом пространстве сечения Пуанкаре от номера итерации SD-метода при выделении орбиты первого порядка ( $p = 1$ , период  $T = 4.2$ ). Параметр Пирса  $\alpha = 2.858\pi$

анкаре от номера  $n$  итерации SD-метода при выделении неустойчивого состояния первого порядка ( $p = 1$ ). Хорошо видно, что итерационный процесс SD-метода сходится к определенному значению, соответствующему неустойчивому периодическому во времени пространственно-временному состоянию системы.

На рис. 2 показаны пространственно-временные распределения плотности пространственного заряда  $\rho^T(t)$ , соответствующие НППВС с различными порядками  $p$  (и, соответственно, периодами  $T$ ), выделенные SD-методом. Отметим, что полученные пространственно-временные распределения находятся в очень хорошем соот-

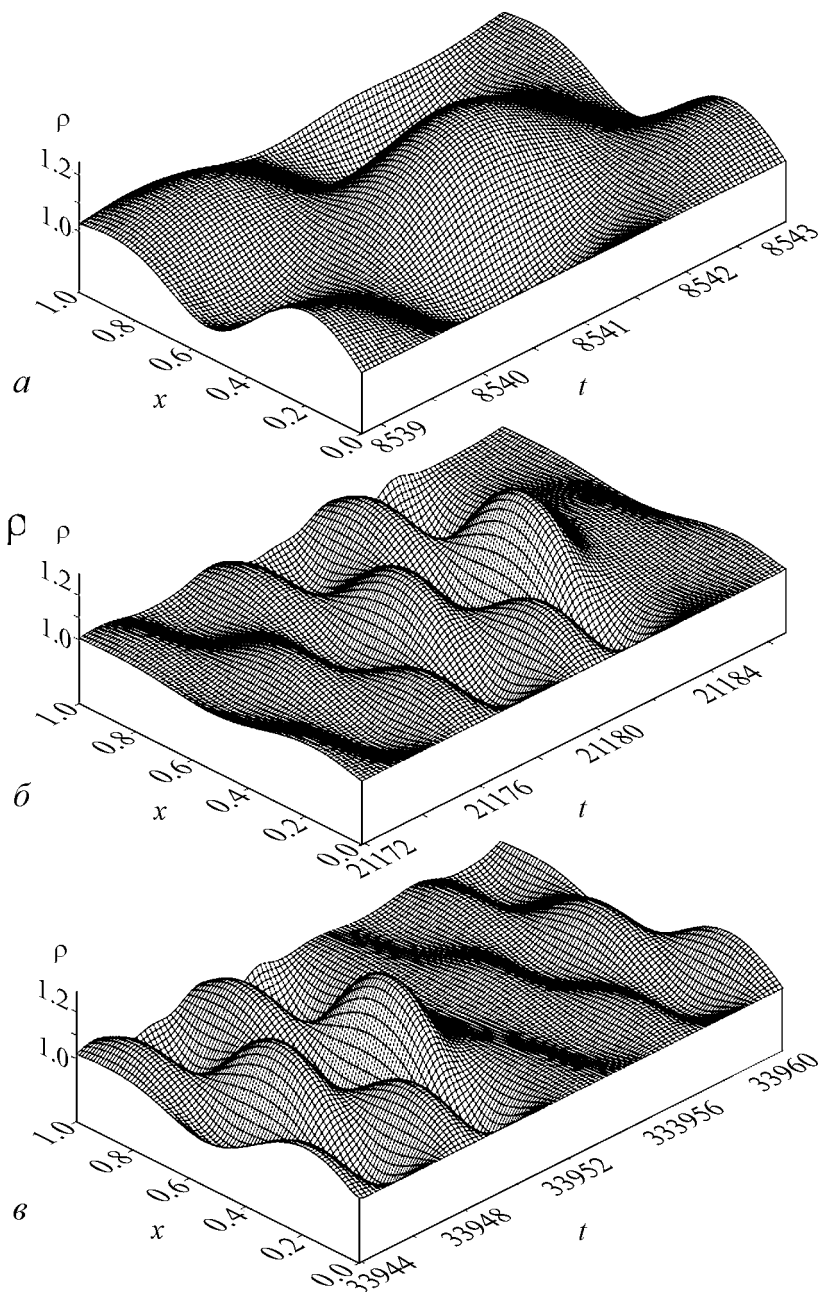


Рис. 2. Пространственно-временные распределения плотности пространственного заряда  $\rho(x, t)$  электронного пучка, соответствующие различным неустойчивым периодическим пространственно-временным состояниям при  $\alpha = 2.858\pi$ , выделенным SD-методом:  $a - T = 4.2$  ( $p = 1$ ),  $б - T = 16.9$  ( $p = 3$ ),  $в - T = 18.9$  ( $p = 4$ )

ветствии с распределениями неустойчивых состояний, найденными в работах [11] из анализа распределений времен возврата.

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проекты 05-02-16273 и 06-02-81013), Президентской программой поддержки Ведущих научных школ РФ (проект НШ-4167.2006.2), а также ФНИ «Династия» и МЦФФМ.*

## Библиографический список

1. Cvitanović P. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos // *Physica D*. 1991. Vol. 51. P. 138.
2. Barreto E., Hunt B.R., Grebogi C., Yorke J.A. From high dimension chaos to stable periodic orbits: The structure of parameter space // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78(24). P. 4561.
3. Carroll T.L. Approximating chaotic time series through unstable periodic orbits // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 59 (2). P. 1615.
4. Pikovsky A.S., Grassberger P. Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // *J. Phys. A*. 1991. Vol. 24. P. 4587.
5. Pikovsky A.S., Zaks M., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators in terms of periodic orbits // *Chaos*. 1997. Vol. 7 (4). P. 680.
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I. Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71 (5). P. 056204.
7. Pyragas K. Continuous control of chaos, by self-controlling feedback // *Phys. Lett. A*. 1992. Vol. 170. P. 421.
8. Lathrop D.P., Kostelich E.J. Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits // *Phys. Rev. A*. 1989. Vol. 40 (7). P. 4028.
9. Schmelcher P., Diakonov F.K. Detecting unstable periodic orbits of chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79 (25). P. 4734.
10. Pingel D., Schmelcher P., Diakonov F.K. Detecting unstable periodic orbits in chaotic continuous-time dynamical systems // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64 (2). P. 026214.
11. Короновский А.А., Ремпен И.С., Храмов А.Е. Исследование неустойчивых периодических пространственно-временных состояний в распределенной автоколебательной системе со сверхкритическим током // *Изв. РАН, сер. физич.* 2003. Т. 67 (12). С. 1705.
12. Ремпен И.С., Храмов А.Е. Стабилизация неустойчивых периодических состояний хаотической динамики в диоде Пирса // *Изв. РАН, сер. физич.* 2004. Т. 68 (12). С. 1789.
13. Franceschini G., Bose S., Schöll E. Control of chaotic spatiotemporal spiking by time-delay autosynchronization // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60 (5). P. 5426.
14. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Rempen I.S. Controlling chaos in spatially extended beam-plasma system by the continuous delayed feedback // *Chaos*. Vol. 16 (1) P. 013123.
15. Friedel H., Grauer R., Spatschek H.K. Controlling chaotic states of a Pierce diode // *Physics of plasmas*. 1998. Vol. 5 (9). P. 3187.
16. Анфиногентов В.Г. Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
17. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
18. Godfrey B.B. Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode // *Phys. Fluids*. 1987. Vol. 30. P. 1553.
19. Анфиногентов В.Г., Трубецков Д.И. Хаотические колебания в гидродинамической модели диода Пирса // *Радиотехника и электроника*. 1992. Т. 37. С. 2251.

20. *Matsumoto H., Yokoyama H., Summers D.* Computer simulations of the chaotic dynamics of the Pierce beam-plasma system // *Phys. Plasmas*. 1996. Vol. 3 (1). P. 177.
21. *Hramov A.E., Rempen I.S.* Investigation of the complex dynamics and regime control in Pierce diode with the delay feedback // *Int. J. Electronics*. 2004. Vol. 91 (1). P. 1.
22. *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52 (4). P. 3420.

*Саратовский государственный университет*

*Поступила в редакцию 10.01.2007*

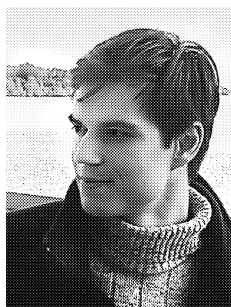
## DETECTION OF UNSTABLE PERIODICAL SPATIO-TEMPORAL STATES OF SPATIAL EXTENDED CHAOTIC SYSTEMS DYNAMICS

*A.A. Koronovskii, A.E. Hramov*

The method of detection of the unstable periodic spatio-temporal states of spatial extended chaotic systems dynamics is proposed. The application of this method is illustrated by the consideration of the fluid model of Pierce diode which is one of the base system of plasma physics and of microwave electronics.

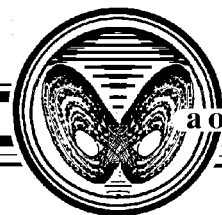


*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».



*Храмов Александр Евгеньевич* – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).  
E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru





## ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕМЕЖАЮЩЕГОСЯ ПОВЕДЕНИЯ

*А.А. Короновский, И.М. Минюхин, А.А. Тыщенко, А.Е. Храмов,  
И.С. Мидзяновская, Е.Ю. Ситникова, G. van Luijelaar, С.М. van Rijn*

В данной работе предлагается эффективный метод анализа сигналов при помощи непрерывного вейвлет-преобразования. Рассматривается применение данного метода для определения длительности ламинарных и турбулентных фаз движения для перемежающегося поведения различных типов, включая анализ временных рядов, порожденных живыми системами. Показано, что предложенный метод обладает высокой устойчивостью к шумам и флуктуациям, искажающим исходную временную реализацию.

### Введение. Обсуждение проблемы

Многие процессы в природе и физике носят перемежающийся характер. В частности, в гидродинамике в ряде случаев при больших числах Рейнольдса можно наблюдать перемежающуюся структуру течения [1]. Перемежаемость является одним из классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим [1, 2]. При этом сигнал представляет собой последовательность чередующихся регулярных (ламинарных) фаз и нерегулярных всплесков (турбулентные фазы). Число нерегулярных всплесков нарастает при увеличении управляющего параметра до тех пор, пока движение в системе полностью не хаотизируется. Перемежающееся поведение наблюдается вблизи границы возникновения режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [3–5]; чередование судорожной активности и «нормального» функционирования мозга у животных, генетически предрасположенных к абсанс эпилепсии, также представляет собой перемежаемость [6]. Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типа I–III [7, 8], on–off перемежаемость [9], перемежаемость типа «игольное ушко» [10].

При исследовании перемежаемости важной проблемой является задача о выделении в сигналах временных интервалов, соответствующих различным типам динамики систем, демонстрирующих перемежающееся поведение (задача о диагностике ламинарных и турбулентных фаз). Как правило, участки временной реализации, на которых наблюдается поведение, близкое к регулярному (так называемые ламинарные фазы), выделяются легче, нежели участки с нерегулярным (турбулентным)