



## СИНХРОНИЗАЦИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С ДВУМЯ ЧАСТОТАМИ\*

*В.С. Анищенко, С.М. Николаев*

В работе исследовано явление синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний. Рассмотрены как внешняя, так и взаимная синхронизация. Установлены закономерности синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе. Показано, что в общем случае осуществляется захват вначале одной, а затем второй базовой частоты. Результаты компьютерного моделирования подтверждаются данными радиофизического эксперимента.

### Введение

Квазипериодическими колебаниями называют устойчивые решения динамических систем, которые зависят от конечного числа периодических функций  $\phi_k(\omega_k t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), имеющих период  $T_k = 2\pi/\omega_k$  по каждому аргументу. Квазипериодические решения описывают достаточно сложные процессы колебаний с  $n$  независимыми частотами  $\omega_k$ , которые в общем случае рационально не связаны. Эти частоты  $\omega_k$  представляют собой с физической точки зрения независимые частотные моды парциальных колебательных систем, взаимодействующих между собой. Результатом такого взаимодействия и являются квазипериодические колебания.

Квазипериодические колебания с двумя и более независимыми частотами являются широко распространенным типом колебаний. В фазовом пространстве им отвечает предельное множество в виде  $n$ -мерного тора. Устойчивость, бифуркации и переходы к хаосу через квазипериодические колебания представляют достаточно сложную и во многом не до конца решенную задачу, которой посвящено большое количество работ [1–6]. Однако важная проблема синхронизации квазипериодических колебаний оказалась наименее исследованной. По существу, впервые синхронизация квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами была частично решена в [7, 8]. В работе [7] исследовано явление захвата числа вращения в системе двух связанных генераторов двухчастотных колебаний. Уже в этой работе установлено, что режим полной синхронизации реализуется в результате последовательного захвата сначала одной, а затем двух базовых частот. В работе [8] описаны результаты исследований по синхронизации двухчастотных резонансных колебаний внешним

\*По материалам доклада на Школе «ХАОС–2007», Саратов, 9–14.10.2007.

гармоническим сигналом. Установлено принципиальное явление: при синхронизации предельного цикла на торе каждая из двух базовых частот системы синхронизируется независимо, несмотря на резонанс, при котором эти частоты рационально связаны. Бифуркационные механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе были исследованы в работе [9].

В настоящей статье излагаются результаты работ [7–10], которые систематизированы в более правильной, логически обоснованной последовательности, позволяющей наиболее полным образом осветить исследуемую проблему.

Исследуется наиболее простой случай двухчастотных колебаний, образом которых в фазовом пространстве является двумерный тор. Речь идет о синхронизации устойчивых фазовых траекторий динамической системы на двумерном торе. Как известно, на двумерном торе возможны две структуры траекторий. Первая – резонансная структура, отвечающая «языкам Арнольда» с рациональным числом вращения  $\Theta = p : q$ , где  $p, q$  – целые числа. Притягивающее предельное множество фазовых траекторий в случае резонансов на двумерном торе есть не что иное, как устойчивый предельный цикл, спектр мощности которого формально содержит лишь одну независимую частоту  $\omega_0$  и ее гармоники  $n\omega_0$ . Вторая структура отвечает так называемым эргодическим колебаниям с двумя рационально не связанными частотами  $\omega_0$  и  $\omega_1$ . Число вращения  $\Theta$  в этом случае выражается иррациональным числом. Спектр мощности колебаний в эргодическом случае включает две рационально не связанные частоты и набор комбинационных частот  $n\omega_0 \pm m\omega_1$ ,  $n$  и  $m$  – целые числа  $\pm 1, \pm 2, \dots$ . Сечения Пуанкаре резонансного и эргодического двумерного торов существенно различаются. В первом случае это конечное число неподвижных точек, зависящее от величины числа вращения  $\Theta$ , во втором – замкнутая инвариантная кривая.

Анализ проблемы синхронизации квазипериодических колебаний начнем с резонансного случая, а затем перейдем к случаю эргодических колебаний.

## 1. Синхронизация резонансного предельного цикла на двумерном торе

С целью проведения исследований необходимо задать динамическую систему, реализующую резонанс с заданным числом вращения  $\Theta = p : q$ , а затем решить задачу о синхронизации резонансного предельного цикла внешней периодической силой. Выберем для этого модель в виде системы двух симметрично связанных генераторов ван дер Поля с малой расстройкой их по частоте, чтобы реализовать резонанс на основном тоне с числом вращения  $\Theta = 1 : 1$  [9].

Зададим парциальный генератор ван дер Поля уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $m$  – параметр возбуждения,  $\alpha_1^2 = (2\pi f_1)^2$ ,  $f_1 = 1/T_0$  – частота,  $T_0$  – период колебаний. Как хорошо известно, автоколебания в системе (1) возникают вследствие бифуркации Андронова–Хопфа в точке  $m^* = 0$ , их амплитуда при  $m > m^*$  растет пропорционально  $\sqrt{m}$ .

В качестве второй системы рассмотрим тот же генератор ван дер Поля (1), введя расстройку по частоте ( $\alpha_2 \neq \alpha_1$ ). Будем исследовать режим автоколебаний в случае симметричной связи между генераторами

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь параметр  $k$  характеризует степень внутренней связи между генераторами, параметр  $m$  будет одинаковым для обоих генераторов, а частоты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выберем различными, но достаточно близкими друг к другу.

Рассмотрим режимы автоколебаний в системе (2) при значениях параметров  $m = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $k = 0.02$ . Параметр  $\alpha_2$  будем изменять в пределах  $0.98 < \alpha_2 < 1.02$ , исследуя влияние расстройки парциальных частот  $f_1$  и  $f_2$  на динамику системы.

На рис. 1 представлен результат расчета области синхронизации, которая характеризует эффект захвата частоты на основном тоне. Первый генератор ( $\alpha_1 = 1$ ) захватывает частоту второго и в результате в области синхронизации (область I на рисунке) частоты взаимодействующих генераторов равны:  $f_1 = f_2$ . Рис. 1 иллюстрирует эффект взаимной синхронизации двух генераторов путем захвата частоты. Область синхронизации I на рисунке представляет собой «клюв» или «язык» Арнольда с числом вращения Пуанкаре  $\Theta = 1 : 1$ , что отвечает синхронизации на основном тоне.

Вне области синхронизации (на рис. 1 это области II) наблюдаются режимы двухчастотных колебаний или биений, при которых частоты парциальных генераторов не совпадают ( $f_1 \neq f_2$ ).

Рассмотрим этот эффект с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений. В области II образом автоколебательного режима является нерезонансный (в общем случае) эргодический двумерный тор, отвечающий режиму двухчастотных квазипериодических колебаний.

При входе в область I из области II (с пересечением бифуркационных линий  $l_s$ , см. рис. 1) на двумерном торе рождается структура в виде устойчивого и седлового предельных циклов, лежащих на поверхности тора. Устойчивый цикл отвечает режиму взаимной синхронизации двух генераторов, характеризуя устойчивое периодическое движение с частотой  $f_1 = f_2$  в режиме захвата частоты.

Вышесказанное иллюстрирует рис. 2, где представлены проекции фазовых

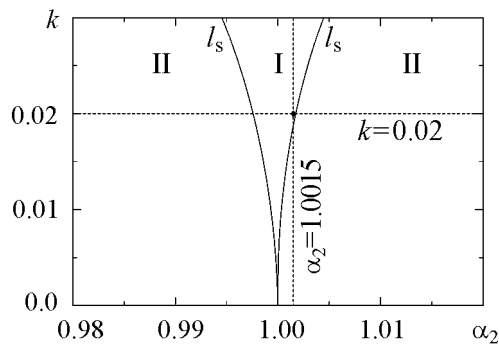


Рис. 1. Область взаимной синхронизации генераторов системы (2) при  $m = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ . I – область существования резонансного предельного цикла с числом вращения  $\Theta = 1 : 1$ , II – область квазипериодических колебаний

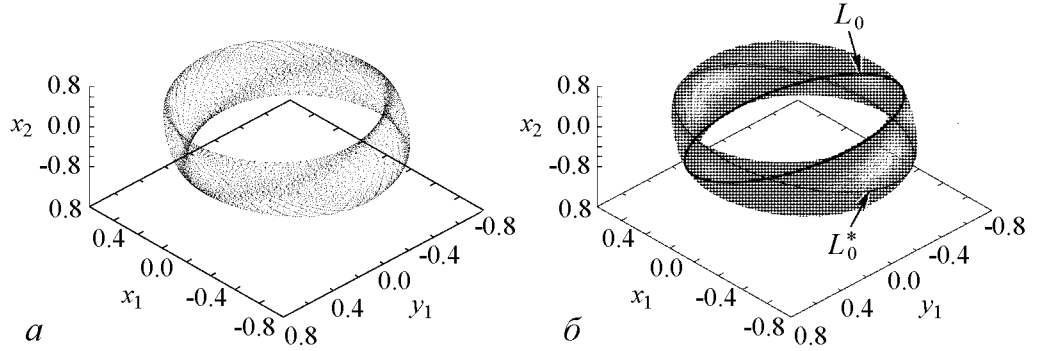


Рис. 2. Проекция фазовых траекторий на плоскость переменных  $(x_1, y_1, x_2)$  системы (2) для значений параметров  $m = 0.1, k = 0.02, \alpha_1 = 1$ : (а) для области II ( $\alpha_2 = 1.003$ ) и (б) для области I ( $\alpha_2 = 1.0015$ ). Проекция двумерного тора вне резонанса изображена серым, устойчивый  $L_0$  и седловой  $L_0^*$  циклы на торе в области резонанса изображены жирными линиями

портретов двумерного тора  $T^2$  (рис. 2, а) и устойчивого ( $L_0$ ) и седлового ( $L_0^*$ ) резонансных предельных циклов на нем (рис. 2, б).

Нашей задачей будет изучение особенностей синхронизации устойчивого резонансного предельного цикла на торе, показанного на рис. 2, б, внешним гармоническим сигналом. С этой целью исследуем реакцию системы (2) на внешний периодический сигнал, введя источник гармонического воздействия  $k_e \sin[(2\pi f_e)t]$  во второе уравнение системы (2)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1, \\
 \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1) + k_e \sin[(2\pi f_e)t], \\
 \dot{x}_2 &= y_2, \\
 \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Выберем режим колебаний автономной системы (3) ( $k_e = 0$ ), отвечающий области резонанса I (см. рис. 1), задав значения параметров  $m = 0.1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.0015, k = 0.02$ . Этому режиму отвечает указанная точка на плоскости параметров рис. 1. В автономной системе будет реализоваться режим устойчивых периодических автоколебаний. Ему отвечает устойчивый предельный цикл  $L_0$ . Отметим, что с точки зрения экспериментатора, наблюдающего режим периодических колебаний, это обычное устойчивое периодическое движение с частотой  $f_1$  и спектром, включающим нечетные гармоники  $f_1(2n + 1), n = 0, 1, 2, \dots$ , в силу квадратичного характера нелинейности. Тот факт, что предельный цикл  $L_0$  лежит на поверхности двумерного тора, никак не проявляется в обычном эксперименте. Однако более детальные исследования показали, что этот факт является принципиальным и приводит к весьма существенным отличиям при анализе эффекта внешней синхронизации, если речь идет о синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе.

На рис. 3, а, б представлены зависимости частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  от частоты внешнего сигнала  $f_e$ . Амплитуда сигнала воздействия была выбрана  $k_e = 0.025$ , частоты  $f_1$  и  $f_2$  нормировались на частоту внешнего сигнала  $f_e$ . Рис. 3, в иллюстрирует зависимость числа вращения  $\Theta = f_1 : f_2$  от частоты внешнего воздействия. Как видно из графиков, на рис. 3 целесообразно выделить области A, B, C и D, в ко-

торых динамика системы качественно различна. Используем для анализа результаты расчета спектра характеристических показателей Ляпунова (рис. 4).

В области  $A$  частота внешнего сигнала достаточно удалена от частоты предельного цикла  $f_1 = f_2 \approx 0.158$ . В системе реализуются квазипериодические колебания с частотами  $f_e$  и  $f_1 = f_2$ . Им отвечает существование в фазовом пространстве двумерного тора, что подтверждается наличием двух нулевых показателей Ляпунова в спектре ЛХП (см. рис. 4). Условие резонанса  $f_1 = f_2$  в области  $A$  еще не нарушается.

В области  $B$  режим взаимной синхронизации (см. рис. 1, 2) разрушается. Частоты  $f_1$  и  $f_2$  становятся различными, о чем свидетельствует график зависимости числа вращения  $\Theta$  от частоты внешнего воздействия (см. рис. 3, в). Рождается режим квазипериодических колебаний с тремя независимыми частотами  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_e$ . Ему отвечает аттрактор в виде трехмерного тора и наличие трех нулевых показателей в спектре ЛХП (см. рис. 4). Динамика системы в области  $B$  достаточно сложна. На трехмерном торе с изменением частоты  $f_e$  могут возникать частичные резонансы в виде  $T^2$  и даже хаотические режимы.

В области  $C$  реализуется первое из явлений, представляющих особый интерес: имеет место захват базовой частоты первого генератора внешним сигналом, при котором  $f_e = f_1$ , но  $f_1 \neq f_2$ . На трехмерном торе возникает резонансная структура в виде двумерного тора, что доказывается наличием двух нулевых показателей в спектре ЛХП (см. рис. 4). Расчеты показали, что сечение Пуанкаре в этом режиме имеет вид замкнутой инвариантной кривой.

Наконец, в области  $D$  реализуется режим полной синхронизации: внешний сигнал захватывает обе частоты взаимодействующих генераторов, и выполняется условие  $f_e = f_1 = f_2$ . В области  $D$  в спектре ЛХП лишь один показатель является нулевым, на фазовом портрете можно видеть аттрактор в виде предельного цикла.

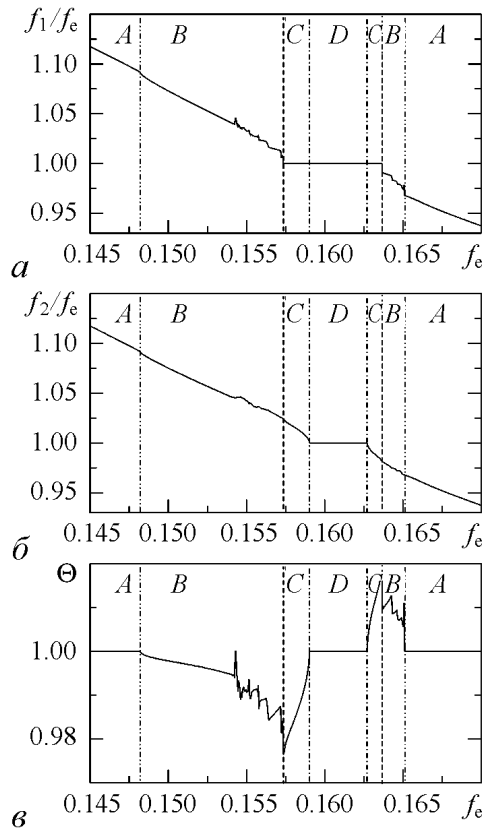


Рис. 3. Зависимости отношений частот генераторов  $f_1$  (а) и  $f_2$  (б) к частоте внешнего воздействия  $f_e$  и числа вращения  $\Theta = f_1 : f_2$  (в) от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0.025$

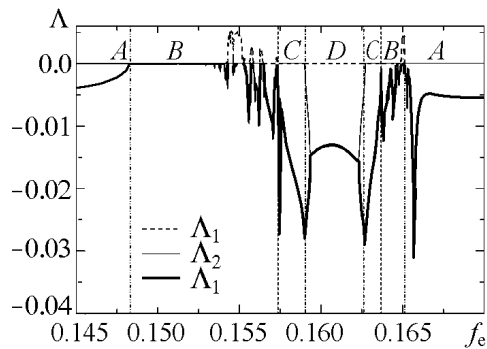


Рис. 4. Зависимости трех старших показателей Ляпунова от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0.025$

Изложенные выше результаты свидетельствуют о весьма важном отличии эффекта синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе от классического случая. Это отличие заключается в том, что при уменьшении расстройки частот  $f_e - f_1$  внешнее воздействие вначале разрушает режим исходной взаимной синхронизации, а затем осуществляется последовательный захват вначале одной базовой частоты, потом второй. В итоге реализуется эффект полной синхронизации, которому отвечает эффект захвата числа вращения (см. рис. 3, *в*, область *D*).

## 2. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла

С целью более детального понимания механизмов перестройки режимов колебаний в системе (3) при вариации частоты внешнего воздействия была построена бифуркационная диаграмма системы на плоскости параметров амплитуда – частота внешней силы (рис. 5). Графики, представленные на рис. 3 и 4, соответствуют движению по прямой  $k_e = 0.025$  диаграммы рис. 5. Переходам из областей *A* в области *B* отвечают бифуркационные линии  $l_{T^3}$ , из областей *B* в области *C* – линии  $l_p$ , из областей *C* в область *D* – линии  $l_f$ . Как видно из диаграммы, переходы в область *D* (полная синхронизация резонансного цикла) могут осуществляться из областей *A* или *B* через бифуркационные линии  $l_f$ . Рассмотрим более детально бифуркационные явления, которым отвечают вышеуказанные бифуркационные линии  $l_{T^3}$ ,  $l_p$  и  $l_f$ .

Как показали исследования, основным колебательным режимом системы (3) является режим трехчастотных квазипериодических колебаний с частотами  $f_e \neq f_1 \neq f_2$ . Соответствующим аттрактором является трехмерный тор  $T^3$ , область существования которого на диаграмме рис. 5 обозначена символом *B*. Все основные бифуркации в системе (3), ведущие к синхронизации исходного резонансного цикла, связаны с бифуркациями именно режима  $T^3$ .

Рассмотрим область *B*, где существует устойчивый трехмерный тор  $T^3$ . С целью более наглядного представления бифуркаций трехмерного тора будем использовать двойное сечение Пуанкаре. Для получения двойного сечения Пуанкаре сначала производился расчет обычного сечения Пуанкаре, а затем в полученную последовательность точек вводилась дополнительная секущая плоскость. Далее, так как вероятность того, что полученные решения окажутся близки к дополнительной секущей плоскости, мала, производилась линейная аппроксимация решений в ее окрестности. Обычное сечение Пуанкаре для  $T^3$  даст нам двумерный тор  $T_{T^3}$ . Двойное сечение Пуанкаре будет представлять собой инвариантную замкнутую кривую  $L_{T^3}$ . Неподвижная точка на этой инвариантной кривой будет являться образом резонансного двумерного тора, лежащего на  $T^3$ .

Исследуем переход из области *B* в область *A* диаграммы рис. 5 через бифуркационную линию  $l_{T^3}$ . На рис. 6 представлены результаты соответствующих расчетов с использованием двойного сечения Пуанкаре. Образом  $T^3$  здесь является кривая  $L_{T^3}$ , отвечающая режиму  $T^3$  в области *B*. При достижении бифуркационной точки (точки пересечения линии  $l_{T^3}$  из области *B* в направлении области *A*) на кривой  $L_{T^3}$  рождается неподвижная точка типа «седло-узел». Смещение по параметрам в область *A*

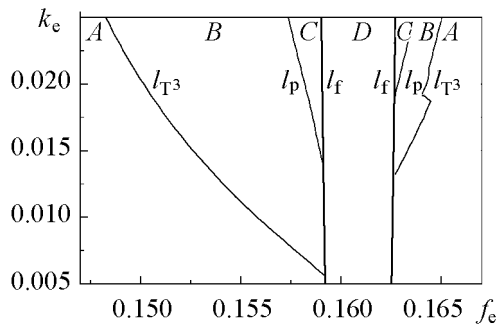


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма системы (3) на плоскости параметров  $(f_e, k_e)$ , построена для фиксированных значений  $m = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1.0015$ ,  $k = 0.02$

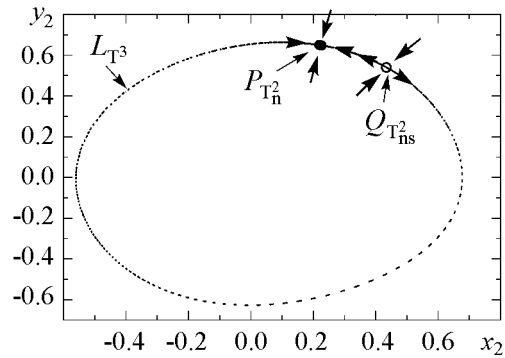


Рис. 6. Седло-узловая бифуркация в двойном сечении Пуанкаре, соответствующая пересечению линии  $l_{T^3}$  из области  $B$  в область  $A$ .  $L_{T^3}$  – инвариантная кривая,  $P_{T_n^2}$  – устойчивый узел,  $Q_{T_{ns}^2}$  – седло. Расчеты представлены для значений параметров:  $f_e = 1.482$ ,  $k_e = 0.025$ ,  $m = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1.0015$ ,  $k = 0.02$

приводит к расщеплению седло-узла на устойчивый узел и седло. В представлении двойного сечения Пуанкаре реализуется классическая седло-узловая бифуркация.

В полном фазовом пространстве системы (3) картина, представленная на рис. 6, отвечает рождению (исчезновению) пары двумерных торов на трехмерном торе  $T^3$ . Один из этих торов устойчивый ( $T_n^2$ ), другой – седловой ( $T_{ns}^2$ ).

Исследуем бифуркационный переход из области  $B$  в область  $C$ , которому отвечает пересечение бифуркационных линий  $l_p$  на диаграмме рис. 5. Расчеты показали, что на линии  $l_p$  реализуется также седло-узловая бифуркация и в области  $C$  рождаются также устойчивый и седловой резонансные<sup>1</sup> двумерные торы, лежащие на трехмерном торе  $T^3$ . Результаты расчетов иллюстрирует рис. 7. Режиму колебаний в области  $B$  отвечает трехмерный тор  $T^3$ , сечение Пуанкаре которого обозначено  $T_{T^3}$  на рис. 7. Резонансному устойчивому двумерному тору в области  $C$  отвечает инвариантная замкнутая кривая, обозначенная  $L_{T_p^2}$ . Для сравнения на рис. 7 представлен и образ устойчивого двумерного резонансного тора  $L_{T_n^2}$  в области  $A$ . Седловые торы на рис. 7 не приведены.

Торы  $T_n^2$  и  $T_p^2$  различны, так как с физической точки зрения отвечают разным условиям частичной синхронизации. В области  $A$  –  $f_1 = f_2$  и  $f_e \neq f_1$ , а в области  $C$  –  $f_e = f_1$  и  $f_1 \neq f_2$ .

Наконец, рассмотрим бифуркационный переход из области  $C$  в область  $D$  путем пересечения линии  $l_f$ . Этому переходу отвечает эффект захвата второй частоты  $f_2 = f_e$  и возникновение режима полной синхронизации  $f_1 = f_2 = f_e$ . Исследования показали, что линия  $l_f$  отвечает классической седло-узловой бифуркации резонансных циклов, лежащих на двумерном торе  $T_p^2$ . На двумерном торе  $T_p^2$ , который существует в области  $C$  и является резонансной структурой на  $T^3$ , в бифуркационной точке (на линии  $l_f$ ) рождаются устойчивый и седловой циклы. При пересечении

<sup>1</sup>Под резонансным двумерным тором здесь понимается частичный резонанс на трехмерном торе, когда две из трех независимых частот становятся равными. При этом двумерный тор на трехмерном торе является эргодическим.

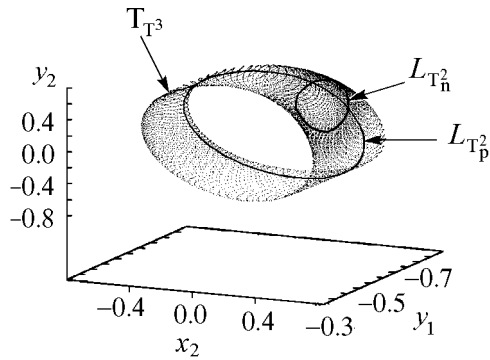


Рис. 7. Проекция сечений Пуанкаре трехмерного тора  $T_{T^3}$  ( $f_e = 0.15$ ) и резонансных двумерных торов  $L_{T_n^2}$  ( $f_e = 0.1482$ ) и  $L_{T_p^2}$  ( $f_e = 0.158$ )

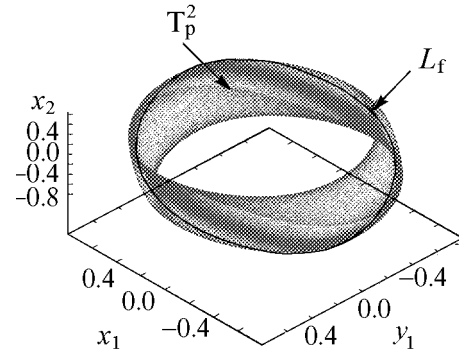


Рис. 8. Проекция фазовых портретов двумерного тора  $T_p^2$  (серый) и резонансного предельного цикла  $L_f$  (черный) на нем, рассчитанные для значений частоты  $f_e = 0.1587$  ( $T_p^2$ ) и  $f_e = 0.1592$  ( $L_f$ )

линии  $l_f$  в направлении области  $D$  возникает устойчивое периодическое движение, отвечающее режиму полной синхронизации. Результаты иллюстрирует рис. 8, где представлены фазовые проекции двумерного тора  $T_p^2$  (в области  $C$ ) и устойчивого резонансного предельного цикла  $L_f$  на нем (область  $D$ ).

### 3. Особенности синхронизации резонансных предельных циклов при различных значениях числа вращения $\Theta$ и коэффициента связи $k$

Изучение эффектов синхронизации, представленных выше, показало, что рассмотренный случай резонанса с числом вращения  $\Theta = 1 : 1$  является наиболее общим и достаточно сложным с точки зрения теории бифуркаций. Представляется важным изучение эффектов синхронизации при других значениях числа вращения, отвечающих резонансам  $\Theta = p : q$ , где  $p, q = 1, 2, \dots$ . Кроме того, эффекты синхронизации в системе (3) должны зависеть от коэффициента связи генераторов  $k$ . Эта зависимость важна для понимания механизмов синхронизации генераторов квазипериодических колебаний, в которых параметр связи может не входить явным образом в динамическую модель или в силу конструктивных особенностей системы не являться независимым параметром. В связи с вышесказанным представляется интересным исследовать особенности бифуркационных свойств системы (3) при различных значениях параметра связи  $k$ .

Рассмотрим режим резонансного предельного цикла в системе (2) с числом вращения  $\Theta = 1 : 3$  и попытаемся осуществить его синхронизацию внешним периодическим сигналом (3).

В автономной системе (3) при значениях параметров  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.328$ ,  $m = 0.1$  и  $k = 0.005$  реализуется эффект взаимной синхронизации, и существует устойчивый резонансный цикл на двумерном торе с числом вращения  $\Theta = 1 : 3$ . Фазовый портрет этого цикла и спектр мощности показаны на рис. 9. Введем внешнее воздействие (3) и будем изменять  $f_e$  вблизи частоты  $f_2$ .



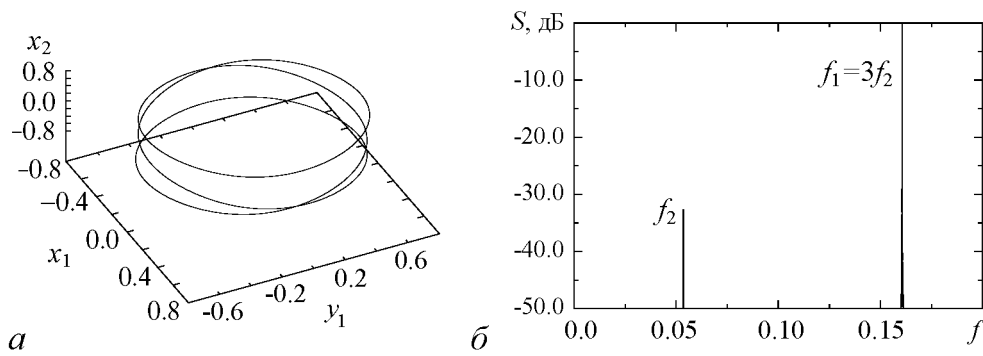


Рис. 9. Предельный цикл в системе (2) в условиях резонанса  $\Theta = 1 : 3$  (а) и соответствующий спектр мощности колебаний (б), рассчитанные для значений параметров  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.328$ ,  $m = 0.1$  и  $k = 0.005$

Результаты внешнего воздействия представлены на рис. 10. Главное отличие результатов от случая  $\Theta = 1 : 1$  (см. рис. 3) заключается в том, что эффект полной синхронизации здесь не имеет места. Реализуется эффект захвата второй частоты

( $f_e = f_2$ ), но при этом частота  $f_1$  не изменяется под действием внешней силы. Как и в случае резонанса  $1 : 1$  при условии, что частота  $f_e$  далека от  $f_2$ , существует область *A*, в которой реализуется резонансный двумерный тор  $T_{n1:3}^2$  на поверхности трехмерного тора  $T^3$ . Также имеется область *B*, в которой ввиду разрушения резонанса  $1 : 3$  существует трехмерный тор  $T^3$ . Далее реализуется переход из области *B* в область *C*, при котором возникает резонансный двумерный тор  $T_{p1:3}^2$ , отвечающий режиму частичной синхронизации  $f_e = f_2$ ,  $f_1 \neq 3f_2$ . Область *D* в данном случае отсутствует. Для полной синхронизации резонансного цикла в рассматриваемом случае необходимо использовать дополнительный внешний сигнал, по частоте близкий к  $f_1$ . На рис. 11 представлены в виде циклов *L* проекции сечений Пуанкаре двумерных торов, отвечающих областям *A* ( $T_{n1:3}^2$ ) и *C* ( $T_{p1:3}^2$ ) рис. 10, лежащие на трехмерном торе  $T^3$ , представленном в сечении Пуанкаре в виде двумерного тора  $T_{T^3}$ .

Результаты, представленные на рис. 10, получены для относительно малой величины коэффициента связи  $k = 0.005$ . Интересно выяснить, как

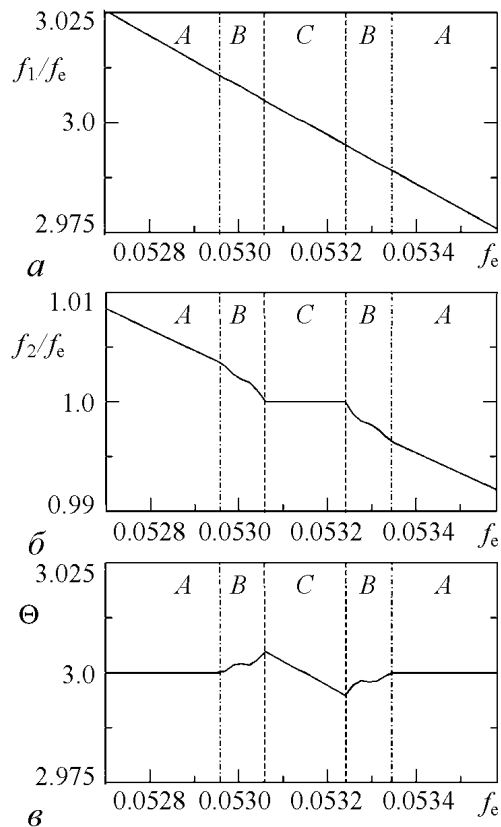


Рис. 10. Зависимость отношений частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  к частоте  $f_e$  и числа вращения  $\Theta$  от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0.005$  для резонанса  $1 : 3$

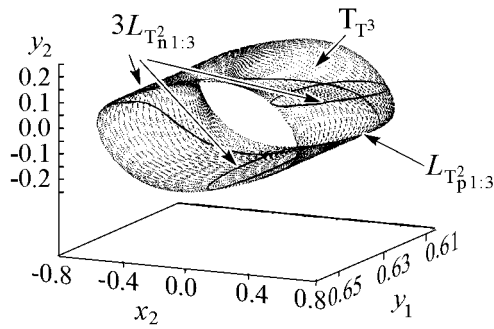


Рис. 11. Проекция сечений Пуанкаре двумерных торов в виде циклов:  $3L_{T_{n1:3}^2}$ , отвечающего области  $A$  (рис. 10) ( $f_e = 0.0527$ ), и  $L_{T_{p1:3}^2}$  отвечающего области  $C$  (см. рис. 10) ( $f_e = 0.0531$ ), лежащих на поверхности трехмерного тора  $T_{T^3}$

повлияет увеличение степени взаимосвязи генераторов на эффекты синхронизации? С этой целью были проведены расчеты для значения  $k = 0.02$  (рис. 12). Как видно из рисунка, с увеличением связи появляется область  $D$  – область полной синхронизации резонансного цикла на торе. Исследования показали, что с ростом  $k$  ( $k > 0.02$ ) ширина области  $D$  увеличивается и реализуется картина, качественно повторяющая случай резонанса 1 : 1 (см. рис. 3).

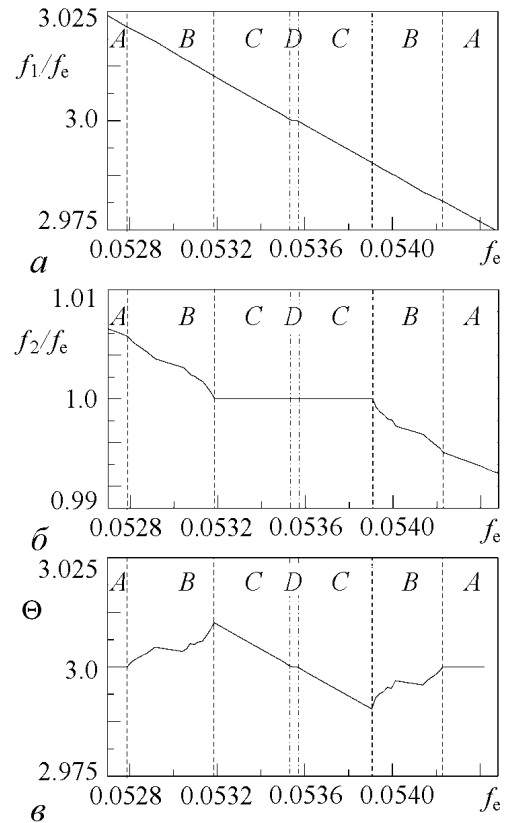


Рис. 12. Зависимость отношений частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  к частоте  $f_e$  и числа вращения  $\Theta$  от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0.005$  и  $k = 0.02$  для резонанса 1 : 3

#### 4. Синхронизация двухчастотных колебаний в автогенераторе квазипериодических колебаний

Представленные результаты свидетельствуют о следующем: резонансный цикл на двумерном торе в общем случае невозможно синхронизовать внешним периодическим сигналом. Основной причиной является то, что под действием внешнего сигнала режим резонанса разрушается. Колебания становятся квазипериодическими с тремя независимыми частотами. Эффект синхронизации реализуется при вариации параметров через седло-узловую бифуркацию рождения резонансных двумерных торов на трехмерном торе и далее – классическим образом – через седло-узловую бифуркацию предельных циклов на двумерном торе. С физической точки зрения картина выглядит следующим образом. Вначале реализуется эффект захвата одной из базовых частот системы, вторая при этом оказывается незахваченной. Затем осуществляется эффект захвата второй базовой частоты. Реализуется синхронизация исходного периодического режима колебаний.

Наблюдаемые эффекты зависят от расстройки базовых частот (от числа вращения) и от степени взаимосвязи двух генераторов. Большая расстройка, когда исходные базовые частоты различаются в несколько раз, приводит к тому, что синхро-

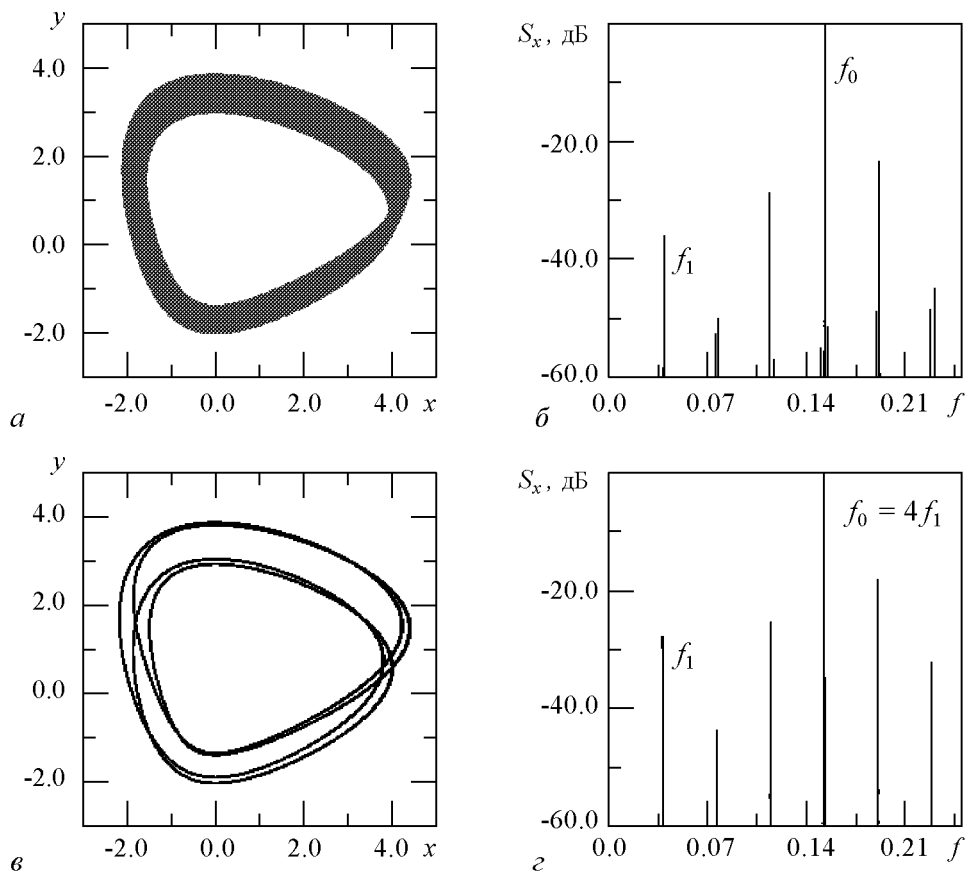


Рис. 13. Режимы эргодических (*a*, *b*) и резонансных (*c*, *d*) квазипериодических колебаний с двумя частотами ( $f_1$  – частота модуляции,  $f_0$  – частота несущей): *a* – проекция эргодического тора на плоскость  $(x, y)$ ; *b* – соответствующий спектр мощности колебаний  $x(t)$ ; *c* – предельный цикл на торе в случае резонанса  $f_1 : f_0 = 1 : 4$ ; *d* – спектр мощности резонансного цикла на торе

низуется лишь одна из базовых частот системы. Облегчить синхронизацию одновременно и второй базовой частоты может увеличение степени связи между генераторами. Таковы основные выводы. Являются ли они в достаточной степени общими? С целью ответа на поставленный вопрос проведем исследования синхронизации квазипериодических колебаний с использованием генератора двухчастотных колебаний, описанного в работе [8].

Рассмотрим уравнения генератора

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= mx + y - x\phi - dx^3, \\
 \dot{y} &= -x, \\
 \dot{z} &= \phi, \\
 \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Используя бифуркационную диаграмму системы (4), выберем значения управляющих параметров так, чтобы реализовать режим резонансных колебаний с числом вращения  $\Theta = 1 : 4$  и эргодических колебаний с близким, но иррациональным значе-

нием числа вращения. Параметры имеют следующие значения:  $m = 0.096$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $d = 0.001$ ; функция  $\Phi(x) = I(x)x^2$ . Для значения  $g = 0.257$  получаем режим эргодического двумерного тора, для  $g = 0.263$  – резонансный<sup>2</sup> тор с числом вращения  $\Theta = 1 : 4$ . Результаты расчетов иллюстрирует рис. 13, на котором  $f_1$  и  $f_0$  – базовые частоты системы (4).

Теперь исследуем динамику системы (4) в указанных на рис. 13 режимах при внешнем гармоническом воздействии

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - x\phi - dx^3 + k_e \sin[(2\pi f_e)t], \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \phi, \\ \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz.\end{aligned}\tag{5}$$

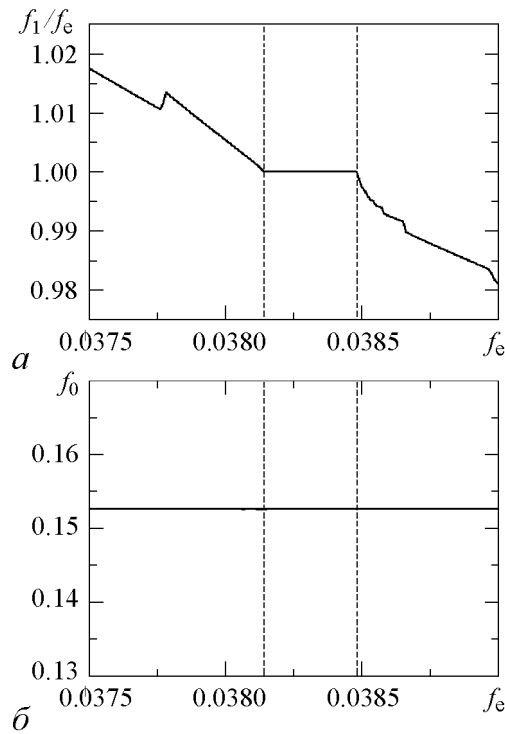


Рис. 14. Результаты расчета зависимости отношения частот  $f_1/f_e$  (а) и частоты  $f_0$  (б) от частоты воздействия в неавтономной системе (5) для значений параметров  $m = 0.096$ ,  $g = 0.263$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $d = 0.001$ ,  $k_e = 0.01$

Именно это и наблюдается. Резонанс  $1 : 4$  вначале разрушается, затем синхронизируется одна из базовых частот (см. рис. 14). Если мы разрушим резонанс, выйдя из области синхронизации  $\Theta = 1 : 4$  (см. рис. 13, а), то при внешнем воздействии будет синхронизоваться только одна из базовых частот. В случае, показанном на рис. 14, а, таковой является  $f_1$ , так как частота внешнего сигнала близка именно к

<sup>2</sup>Здесь термин «резонансный тор» используется в классическом смысле и характеризует режим устойчивого предельного цикла на торе.

$f_1$ . Изменив частоту внешнего сигнала, приблизив ее к  $f_0$ , будем наблюдать эффект захвата частоты  $f_0 = f_e$ , при этом  $f_1$  останется незахваченной.

Приведенные результаты подтверждают общий характер выводов, к которым мы пришли при исследовании системы двух связанных генераторов ван дер Поля. Действительно, вблизи резонанса  $\Theta = 1 : 4$ , когда  $f_1$  в четыре раза меньше  $f_0$  (расстройка между базовыми частотами велика), внешнее воздействие приводит к эффекту захвата лишь одной из двух базовых частот. Синхронизовать обе частоты не представляется возможным. Причиной является не только их большое различие, но и тот факт, что генератор (4) не позволяет увеличить степень взаимосвязи между двумя автоколебательными модами системы. Эта взаимосвязь задается внутренними свойствами системы (4).

Изложенные выше результаты численного моделирования эффекта синхронизации подтверждаются данными физического эксперимента, полученными на электронной модели генератора двухчастотных колебаний (4).

## 5. Результаты экспериментальных исследований

В эксперименте исследовалась синхронизация предельного цикла, отвечающего резонансу  $1 : 3$  (рис. 15, *a*). На рис. 15, *б* представлена экспериментальная

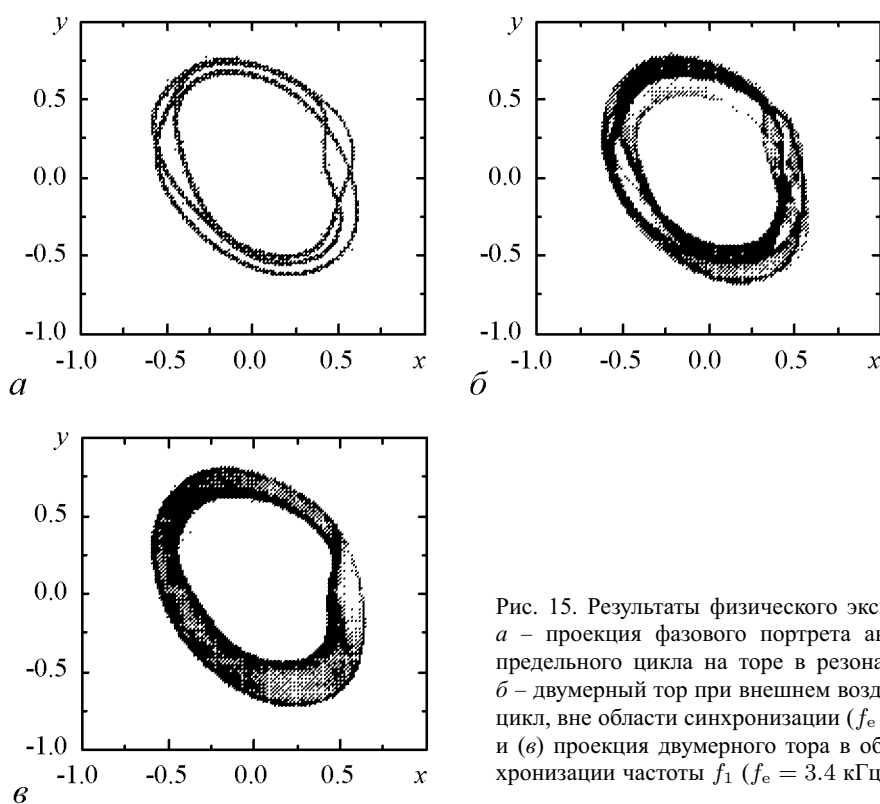
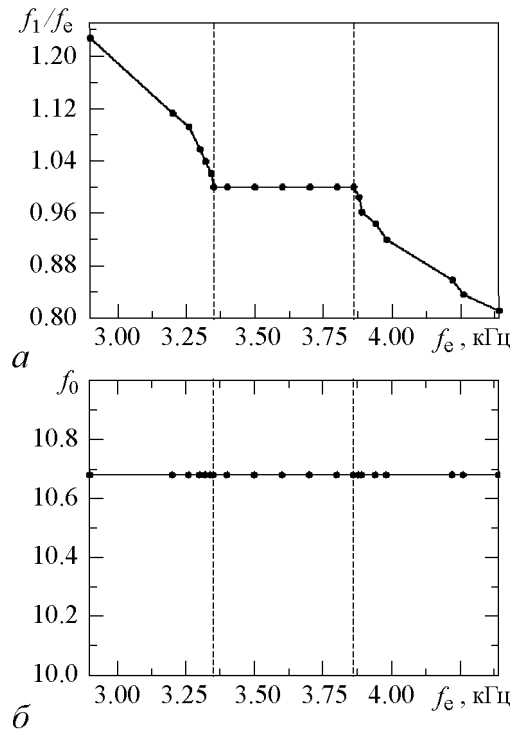


Рис. 15. Результаты физического эксперимента. *a* – проекция фазового портрета автономного предельного цикла на торе в резонансе  $1 : 3$ , *б* – двумерный тор при внешнем воздействии на цикл, вне области синхронизации ( $f_e = 2.9$  кГц) и (*в*) проекция двумерного тора в области синхронизации частоты  $f_1$  ( $f_e = 3.4$  кГц)



проекция двумерного тора, который появляется при внешнем воздействии на цикл (рис. 15, *a*) сигналом частоты 2.9 кГц (вне области синхронизации). Рис. 15, *б* соответствует проекции тора в области синхронизации частоты  $f_1$  ( $f_e = 3.4$  кГц). На рис. 16 представлены результаты измерений, аналогичных расчетам, показанным на рис. 14. Рис. 16, *a* иллюстрирует эффект внешней синхронизации частоты  $f_1$ , а рис. 16, *б* подтверждает независимость частоты  $f_0$  генератора от частоты внешнего сигнала  $f_e$ .

Рис. 16. Результаты физического эксперимента. *a* – зависимость отношения частот  $f_1/f_e$  и *б* – зависимость частоты  $f_0$  от частоты внешнего воздействия  $f_e$

## 6. Внешняя синхронизация квазипериодических колебаний двухчастотным сигналом

Представленные выше результаты свидетельствуют о том, что синхронизация двухчастотных колебаний внешним гармоническим сигналом вне зависимости от условий резонанса проявляется в захвате сначала одной и затем (возможно) второй базовой частоты генератора квазипериодических колебаний. При некоторых особых условиях (большой коэффициент связи парциальных подсистем или близость базовых частот) возможно реализовать эффект захвата двух базовых частот. Однако в общем случае это не реализуется. Естественно предположить, что эффект захвата двух базовых частот генератора можно обеспечить при внешнем двухчастотном воздействии, если число вращения внешнего генератора будет близко к числу вращения синхронизируемого генератора.

Рассмотрим случай однонаправленного воздействия квазипериодических колебаний одного генератора на второй, работающий также в режиме квазипериодических колебаний [7]. Уравнения системы двух взаимодействующих генераторов (4) при однонаправленной связи имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= mx_1 + y_1 - x_1\phi_1 - dx_1^3 + kx_2, \\
 \dot{y}_1 &= -x_1, \\
 \dot{z}_1 &= \phi_1, \\
 \dot{\phi}_1 &= -\gamma\phi_1 + \gamma\Phi(x_1) - g_1z_1, \\
 \dot{x}_2 &= mx_2 + y_2 - x_2\phi_2 - dx_2^3, \\
 \dot{y}_2 &= -x_2, \\
 \dot{z}_2 &= \phi_2, \\
 \dot{\phi}_2 &= -\gamma\phi_2 + \gamma\Phi(x_2) - g_2z_2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Данная системы описывает случай воздействия второго генератора на первый (слагаемое  $kx_2$  в первом уравнении), интенсивность которого определяет величина параметра  $k$ . Зафиксируем значения параметров  $m = 0.06$ ,  $d = 0.001$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $g_1 = 0.55$ . При фиксированном параметре  $g_1 = 0.55$  первый генератор в автономном режиме реализует квазипериодические колебания с числом вращения  $\Theta_1 = f_{11}/f_{01}$  (в нижних индексах частот первая цифра соответствует частоте: «0» – несущая частота, «1» – частота модуляции; вторая цифра – номер генератора). Число вращения второго генератора  $\Theta_2$  управляется с помощью параметра  $g_2$ . В случае нулевой связи при  $g_1 \neq g_2$  числа вращения будут различаться:  $\Theta_1 \neq \Theta_2$ . По аналогии с синхронизацией предельного цикла, когда вводится расстройка частот  $\Delta f = f_1 - f_2$ , мы будем рассматривать расстройку числа вращения  $\Delta\Theta \simeq g_1 - g_2$ . Задача анализа синхронизации в этом случае состоит в анализе режимов колебаний на плоскости двух управляющих параметров  $k$  и  $g_2$ . Численное решение этой задачи иллюстрирует рис. 17, представляющий структуру областей синхронизации.

Внутри большого «клюва» синхронизации, ограниченного бифуркационными линиями  $l_c$ , имеет место эффект захвата базовых частот квазипериодических колебаний,  $f_{01} = f_{02}$ , то есть происходит синхронизация несущих частот. При этом частоты модуляции остаются различными,  $f_{11} \neq f_{12}$ . Реализуется эффект частичной синхронизации квазипериодических колебаний. Внутри области, ограниченной бифуркационными линиями  $l_m$ , реализуется захват частот модуляции и, соответственно, числа вращения  $\Theta_1 = \Theta_2$ . Этот эффект иллюстрирует рис. 18. Как видно из рисунка, существует конечная область расстройки по числу вращения  $\Delta g_2$ , в которой  $\Theta_2/\Theta_1 = 1$ . Число вращения генератора 2 захватывает число вращения генератора 1. Как и в случае предельного цикла, ширина области захвата числа вращения растет с увеличением интенсивности воздействия  $k$ .

Описанные численные эксперименты по внешней синхронизации двух генераторов квазипериодических колебаний показали, что область захвата частот модуляции генераторов лежит внутри клюва синхронизации несущих частот. Сближая значения управляющих параметров генераторов, в колебаниях системы сначала присутствуют четыре независимых частоты, затем, после захвата несущих частот, остаются три независимых частоты, а затем захватываются частоты модуляции и, соответственно, числа вращения.

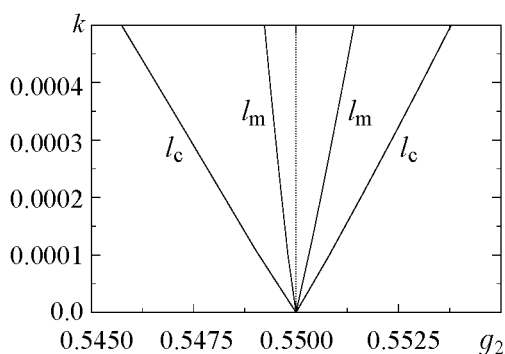


Рис. 17. Области синхронизации несущей ( $l_c$ ) и огибающей ( $l_m$ ) ( $m = 0.06$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $g_1 = 0.55$ ,  $d = 0.001$ )

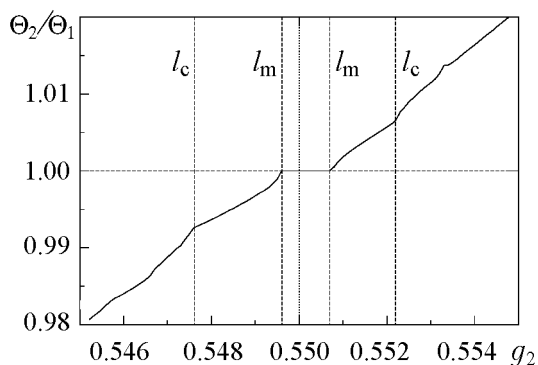


Рис. 18. Эффект захвата числа вращения ( $m = 0.06$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $g_1 = 0.55$ ,  $d = 0.001$ ,  $k = 0.0003$ )

## 7. Экспериментальный анализ внешней синхронизации двухчастотного генератора квазипериодическим сигналом

Исследуем эффекты воздействия двухчастотных колебаний в физическом эксперименте [10]. Выберем в качестве синхронизируемого генератора квазипериодических колебаний, описываемый уравнениями (4). Внешним сигналом  $F(t)$  будут служить амплитудно-модулируемые колебания, которые получались с использованием двух генераторов стандартных сигналов и модулятора

$$F(t) = k_e [1 + K_{\text{mod}} \sin(2\pi f_{1e} t)] \sin(2\pi f_{0e} t),$$

где  $k_e$  – амплитудный множитель,  $K_{\text{mod}}$  – коэффициент модуляции,  $f_{1e}$  – частота модуляции,  $f_{0e}$  – частота несущей. Параметры генератора квазипериодических колебаний были выбраны следующими:  $f_{1g} = 2.82$  кГц,  $f_{0g} = 10.69$  кГц, а коэффициент модуляции был приблизительно равен 0.3.

Зададим параметры внешнего сигнала  $F(t)$  следующими:  $f_{1e} = 3.06$  кГц,  $f_{0e} = 10.69$  кГц,  $K_{\text{mod}} = 0.5$  и будем изменять в эксперименте несущую частоту  $f_{0e}$  в пределах  $10.0 \leq f_{0e} \leq 11.0$  кГц. Так как высокочастотная часть спектра сигнала  $F(t)$  будет состоять из трех спектральных линий  $f_{0e}$  и  $f_{0e} \pm f_{1e}$ , то изменяя  $f_{0e}$ , мы будем изменять число вращения внешнего квазипериодического сигнала  $\Theta = f_{1e}/f_{0e}$ .

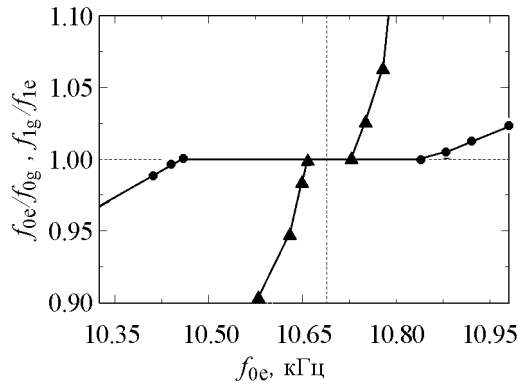


Рис. 19. Зависимость нормированных частот модуляции и несущей генератора от несущей частоты сигнала внешнего возмущения

Результаты представлены на рис. 19. На графиках изображены зависимости нормированных частот  $f_{0e}/f_{0g}$  (обозначено черными кружочками) и  $f_{1g}/f_{1e}$  (треугольниками) от частоты несущей  $f_{0e}$ .

Как видно из графиков, вначале осуществляется захват несущей частоты генератора ( $f_{0g}$ ) несущей частотой внешнего сигнала ( $f_{0e}$ ). Появляется область в интервале частот  $10.5 < f_{0e} < 10.85$ , в которой  $f_{0g} = f_{0e}$ . Затем имеет место эффект захвата частоты модуляции, которому отвечает заметно меньший интервал частот ( $10.65 < f_{0e} < 10.77$ ). Именно в этой

области обе частоты генератора  $f_{0g}$  и  $f_{1g}$  оказываются захваченными внешним сигналом  $F(t)$ . Реализуется эффект захвата числа вращения.

### Выводы

Представленные результаты анализа синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний позволяют обоснованно сделать следующие выводы. Квазипериодические автоколебания с двумя независимыми частотами являются результатом взаимодействия двух нелинейных активных осцилляторов, каждый из которых



характеризуется собственной независимой базовой частотой автоколебаний. Случаи резонансов, отвечающие «языкам Арнольда», соответствуют эффектам взаимной синхронизации, когда осуществляется взаимозахват базовых частот. Несмотря на тот факт, что формально резонансам отвечают режимы устойчивых периодических колебаний с некоторой частотой синхронизации, с физической точки зрения в системе продолжают существовать две базовые моды колебаний. При попытке синхронизовать резонансный предельный цикл системы внешним гармоническим сигналом, режимы резонансов разрушаются и в системе реализуются трехчастотные колебания. Эффект синхронизации в этом случае будет наблюдаться для каждой из существующих мод независимо. Вначале реализуется эффект захвата одной из двух независимых частот, затем второй. Конкретные условия синхронизации будут зависеть от числа вращения (от первоначальной расстройки базовых частот взаимодействующих осцилляторов) и от степени их взаимосвязи.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность профессору Т.Е. Вадивасовой за интерес к работе и плодотворные дискуссии и Г.И. Стрелковой за большой труд по подготовке рукописи к печати.

*Данная работа поддержана Программой Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 годы».*

## **Библиографический список**

1. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167.
2. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$  // *Commun. Math. Phys.* 1978. Vol. 64. P. 35.
3. *Franceschini V.* Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations // *Physica D.* 1983. Vol. 3. P. 285.
4. *Kaneko K.* Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. World Scientific, Singapore, 1986.
5. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Методы качественной теории дифференциальных уравнений // Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 3.
6. *Гонченко С.В., Стенькин О.В., Шильников Л.П.* О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // *Нелинейная динамика.* 2006. Т. 2, № 1. С. 3.
7. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasi-periodic motions // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 056202.
8. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. 046216.
9. *Анищенко В.С., Николаев С.М., Куртс Ж.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // *Нелинейная динамика.* 2008. Т. 4, № 1. С. 39.

10. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Экспериментальное исследование синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 93.

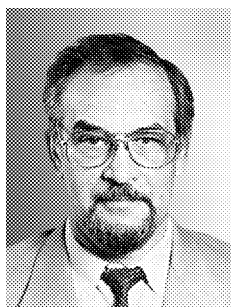
*Саратовский государственный университет*

*Поступила в редакцию 26.02.2008*

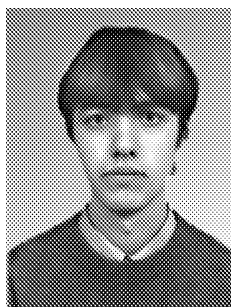
## SYNCHRONIZATION OF TWO-FREQUENCY QUASI-PERIODIC OSCILLATIONS

*V.S. Anishchenko, S.M. Nikolaev*

In present paper we study the effect of synchronization of two-frequency quasi-periodic oscillations. We analyze both external and mutual synchronization. The peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus are established. It is shown that in general case, one and then another one of the basic frequencies is locked. The results of computer simulation are confirmed experimentally.



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).  
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru



*Николаев Сергей Михайлович* – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, хаотические и квазипериодические колебания.  
E-mail: sergeyn@chaos.ssu.runnet.ru