

## **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИСКРЕТНЫХ БРИЗЕРОВ**

*О.И. Канаков, С. Флах, В.Д. Шалфеев*

Дан обзор основ теории дискретных бризеров – пространственно локализованных колебательных решений в нелинейных решеточных системах. Приведены математические условия и физические предпосылки существования таких решений, описаны методы их исследования на примере одномерных решеток. Рассмотрены случаи бесконечного и конечного времени жизни локализованного решения. Включены некоторые новые результаты по проблемам генерации дискретных бризеров при разрушении бегущей волны и управления формированием вращательных бризерных решений с помощью внешнего воздействия.

### **Введение**

Теория структурообразования в диссипативных системах в настоящее время относится к основным и наиболее развитым отраслям нелинейной динамики. Математическим образом диссипативной структуры является аттрактор – притягивающее множество в фазовом пространстве. Своим существованием такие структуры обязаны диссипации, приводящей к сокращению фазового объёма и «стягиванию» к аттрактору всех траекторий из его бассейна притяжения.

Консервативные системы отличаются от диссипативных свойством сохранения фазового объёма, что приводит к отсутствию аттракторов в фазовом пространстве, а значит, к принципиальной невозможности структурообразования в том смысле, в котором оно понимается в случае диссипативных систем. Невозможность наблюдения структур с бесконечным временем жизни в классической равновесной статистической системе следует также из принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы, согласно которому средняя по статистическому ансамблю (или, для эргодических систем, по времени) кинетическая энергия каждой степени свободы и средняя потенциальная энергия каждой колебательной степени свободы составляет величину, одинаковую для всех степеней свободы системы.

В то же время эти соображения не отрицают существование структур, имеющих конечное время жизни, либо имеющих бесконечное время жизни, но при этом нулевую вероятностную меру соответствующего семейства решений в фазовом пространстве.

К таким разрешенным в консервативных системах структурам относятся *дискретные бризеры* – локализованные и не распространяющиеся в пространстве колебательные возбуждения в консервативных решеточных системах [1–3]. В зависимости от постановки задачи говорят о дискретных бризерах либо с бесконечным временем жизни (в этом случае решение всегда периодически во времени [4], а соответствующее семейство траекторий имеет нулевую меру), либо с конечным временем жизни (такие решения имеют ненулевую вероятностную меру и могут быть реализованы в физических системах или статистическом численном эксперименте).

Существуют экспериментальные свидетельства возникновения таких локализованных возбуждений в различных физических системах, включая решетки спинов в антиферромагнетиках [5], решетки связанных нелинейных оптических волноводов [6], ансамбли микромеханических осцилляторов [7]. Применение подобных систем в качестве элементной базы перспективных радиочастотных фильтров, магнетометров и других устройств [8] обуславливает не только фундаментальный, но и прикладной интерес к бризерным структурам.

В системах с периодическим потенциалом, где каждая координата имеет смысл фазы, помимо колебательных дискретных бризеров возможны также локализованные вращательные решения – *ротобризеры* [9]. Такие решения могут существовать не только в консервативных системах с периодическим потенциалом, но и в диссипативных системах при наличии внешнего момента – в этом случае им отвечают аттракторы вращательного типа. В частности, ротобризерные решения были детально изучены в решетках связанных джозефсоновских контактов – как теоретически [10], так и экспериментально [11]. Подобные решения представляют интерес при изучении динамики любых систем, описываемых уравнениями маятникового типа, например, ансамблей электрогенераторов, включенных в общую энергосеть [12], и сетей фазовой синхронизации [13].

Данная статья содержит обзор основных имеющихся в литературе результатов теории дискретных бризеров в нелинейных цепочках, а также некоторые новые результаты. Раздел 1 посвящен дискретным бризерам как периодическим во времени решениям. В разделе 2 рассматривается процесс формирования дискретных бризеров с конечным временем жизни при разрушении бегущей волны вследствие модуляционной неустойчивости. Раздел 3 охватывает вопросы формирования дискретных бризеров и ротобризеров в модели с периодическим потенциалом, включая консервативный и диссипативный случаи. В Заключении подводятся итоги и упоминаются некоторые вопросы теории дискретных бризеров, выходящие за рамки данной статьи.

## **1. Дискретные бризеры с бесконечным временем жизни: существование и основные свойства**

Решения, локализованные в пространстве и периодические во времени, называемые бризерами, известны в некоторых пространственно-непрерывных моделях. Типичным примером является нелинейное уравнение синус Гордона

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u, \quad (1)$$

которое имеет семейство решений [4, 14]

$$u(x, t) = \pm 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{\alpha \sin \frac{t}{\sqrt{1 + \alpha^2}}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha x}{\sqrt{1 + \alpha^2}}} \right), \quad (2)$$

где  $\alpha$  – действительный параметр.

Бризеры в непрерывных моделях структурно неустойчивы в том смысле, что малое изменение уравнений движения приводит к делокализации решения [15]. Таким образом, бризеры в непрерывных системах можно отнести к «редким» математическим объектам, что снижает интерес к ним с точки зрения физики.

Возможность долгоживущих локализованных колебательных решений в пространственно-дискретных системах была первоначально показана на примере двух связанных осцилляторов для классического и квантового случаев [16]. Такие решения были обнаружены в численных экспериментах [17, 18] и, по аналогии с бризерами в непрерывных системах, были названы дискретными бризерами [18]. Известны также другие наименования: *внутренне-локализованные моды* (intrinsic localized modes) – в физике твердого тела и *дискретные солитоны* – в нелинейной оптике.

Существование дискретных бризеров как периодических во времени решений, локализованных в дискретном пространстве, впервые было строго доказано в работе [4] для бесконечных цепочек локально диффузионно связанных нелинейных осцилляторов, описываемых гамильтонианом

$$H = \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2} + U(x_n) + \frac{1}{2} \kappa (x_{n+1} - x_n)^2 \right), \quad (3)$$

где  $U(x) \in C^2$  – нелинейный потенциал,  $U'(0) = 0$ ,  $U''(0) = \omega_0^2 > 0$ ;  $\kappa$  – параметр связи. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_n = -U'(x_n) + \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}). \quad (4)$$

В работе [4] был предложен конструктивный алгоритм построения дискретных бризеров в таких системах на основе метода непрерывного продолжения решения. В качестве продолжаемого рассматривается периодическое решение в бесконечной цепочке несвязанных осцилляторов ( $\kappa = 0$ ), где один из осцилляторов совершает колебательное движение, а остальные находятся в покое. Было доказано, что такое решение может быть непрерывно продолжено в банаховом пространстве обратимых во времени периодических решений на некоторую область ненулевых значений параметра связи  $\kappa \neq 0$  при выполнении условий ангармоничности (то есть ненулевой производной периода продолжаемой орбиты по энергии решения) и нерезонансности (то есть ни частота продолжаемой орбиты, ни какая-либо из ее гармоник не может быть кратна частоте малых колебаний парциального осциллятора  $\omega_0$ ). Эти условия носят достаточно общий характер. Системы, допускающие существование дискретных бризеров, вообще говоря, неинтегрируемы. Таким образом, дискретные бризеры, в отличие от бризеров в непрерывных системах, не являются «редкими», поэтому можно говорить о потенциальной важности этого класса решений в физике.

Была также показана устойчивость таких решений в линейном приближении<sup>1</sup> для некоторых систем в широком диапазоне параметров [19].

Заметим, что множество дискретных бризеров как точных периодических решений в фазовом пространстве решеточной системы имеет меру нуль, что означает нулевую вероятность реализации такого точного периодического решения в физической системе. Поэтому говорят также о дискретных бризерах в «физическом смысле» как о решениях, характеризующихся пространственной локализацией энергии, имеющей, в отличие от точных периодических решений, конечное время жизни.

На основе конструктивного алгоритма [4] и метода точечных отображений Пуанкаре для отыскания периодических орбит в работе [20] был построен численный метод отыскания дискретных бризеров с заданной точностью, а также приведены многочисленные примеры применения этого метода.

С физической точки зрения, условием локализации энергии в дискретном бризере является невозможность ее излучения на бесконечность в виде распространяющихся линейных волн. Поскольку амплитуда колебаний, по определению дискретного бризера, стремится к нулю с удалением от его центра, асимптотика «хвостов» дискретного бризера может быть описана с помощью дисперсионного соотношения для линеаризованных уравнений движения. Асимптотика определяется той из гармоник, которая характеризуется самым медленным спаданием амплитуды в пространстве. Если частота дискретного бризера вместе со всеми гармониками лежит за пределами линейного спектра решетки, то излучения энергии не происходит, и решение остается экспоненциально локализованным в пространстве.

Таким образом, физические предпосылки существования дискретных бризеров – это ограниченность линейного спектра (достигаемая за счет пространственной дискретности) и нелинейность парциального элемента. При выполнении этих условий частота решения вместе со всеми гармониками может лежать за пределами линейного спектра, что и обеспечивает пространственную локализацию.

Эти же соображения отрицают существование непериодических во времени локализованных решений с бесконечным временем жизни. В самом деле, непериодическое (например, многочастотное квазипериодическое) решение в нелинейной системе имеет всюду плотный спектр гармоник, что делает неизбежным резонанс с линейным спектром системы и излучение энергии на бесконечность.

Основные свойства сильно локализованного дискретного бризера можно оценить с помощью одночастичного приближения [21]. В рамках этого приближения все частицы, кроме одной, полагаются покоящимися в положении  $x = 0$ . Колебания частицы тогда описываются уравнением с одной степенью свободы

$$\ddot{x} = -U'(x) - 2\kappa x, \quad (5)$$

из которого следует зависимость частоты колебаний  $\Omega$  от энергии частицы  $\varepsilon$ . Если частота  $\Omega$  и ее гармоники  $n\Omega$  лежат вне линейного спектра и достаточно далеко от его границ, то можно ожидать, что цепочечная система имеет пространственно локализованное решение с частотой  $\Omega$  и полной энергией  $E \approx \varepsilon$ . Показатель локализации решения может быть выражен из дисперсионного соотношения. Условия

<sup>1</sup> что означает лишь отсутствие экспоненциального нарастания малых отклонений от решения и не означает, вообще говоря, ни орбитальной устойчивости, ни устойчивости по Ляпунову.

одночастичного приближения выполняются тем лучше и, значит, тем более точный результат дает приближение, чем сильнее локализовано решение.

Линеаризуя уравнения (4) и подставляя решение в виде гармонической волны

$$x_n(t) = Ae^{i(\omega t - kn)}, \quad (6)$$

получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\kappa \sin^2 \frac{k}{2}. \quad (7)$$

Спектр гармонических волн в линеаризованной системе занимает полосу частот от  $\omega_1 = \omega_0$  до  $\omega_u = \sqrt{\omega_0^2 + 4\kappa}$ , называемую полосой пропускания или (в терминах физики твердого тела) фононной зоной.

Решения линеаризованной системы с частотами за пределами этой полосы имеют комплексное волновое число  $k$ , то есть не распространяются, а спадают в пространстве экспоненциально. Полагая в (7)  $k = i\delta$ , получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 4\kappa \operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{2}, \quad (8a)$$

а для  $k = \pi + i\delta$  имеем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\kappa \operatorname{ch}^2 \frac{\delta}{2}. \quad (8б)$$

Соотношения (8a, 8б) позволяют найти показатель пространственной локализации  $\delta$  для частот ниже и выше линейного спектра, соответственно. Заметим, что показатель локализации увеличивается (то есть длина локализации уменьшается) при удалении от краев спектра. При этом для частот ниже  $\omega_1$  все частицы совершают колебания в фазе, а для частот выше  $\omega_u$  соседние частицы колеблются в противофазе.

Рассмотрим в качестве примера дискретный аналог модели Клейна–Гордона, где потенциал  $U(x)$  в (3) и (4) задается в виде четного полинома четвертой степени

$$U(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4, \quad (9)$$

здесь  $\omega_0 = 1$ .

Рассчитанная зависимость  $\Omega(\epsilon)$  частоты колебаний от энергии дискретного бризера в рамках одночастичной модели (5) с потенциалом (9) при  $\kappa = 0.1$ ,  $\beta = 0.25$  показана на рис. 1 вместе с границами линейного спектра. Из этого расчета следует характерное значение энергии  $\epsilon_{db} \approx 0.72$ , определяемое из соотношения  $\Omega(\epsilon_{db}) = \omega_u$ . Для энергий выше  $\epsilon_{db}$  следует ожидать существования хорошо локализованных дискретных бризеров с частотами выше  $\omega_u$ . С увеличением энергии частота дискретного бризера должна увеличиваться, а локализация – усиливаться.

Отметим, что, согласно теоретическим результатам [22], в такой одномерной цепочке существуют дискретные бризеры с любыми ненулевыми энергиями, то есть отсутствует порог по энергии дискретного бризера. При стремлении энергии к нулю длина локализации дискретного бризера увеличивается, а его частота стремится к  $\omega_u$  сверху [23]. Пересечение кривой  $\Omega(\epsilon)$  с линейным спектром на рис. 1 означает, что в области  $\epsilon < \epsilon_{db}$  перестает работать одночастичное приближение, так как дискретный бризер слабо локализован.

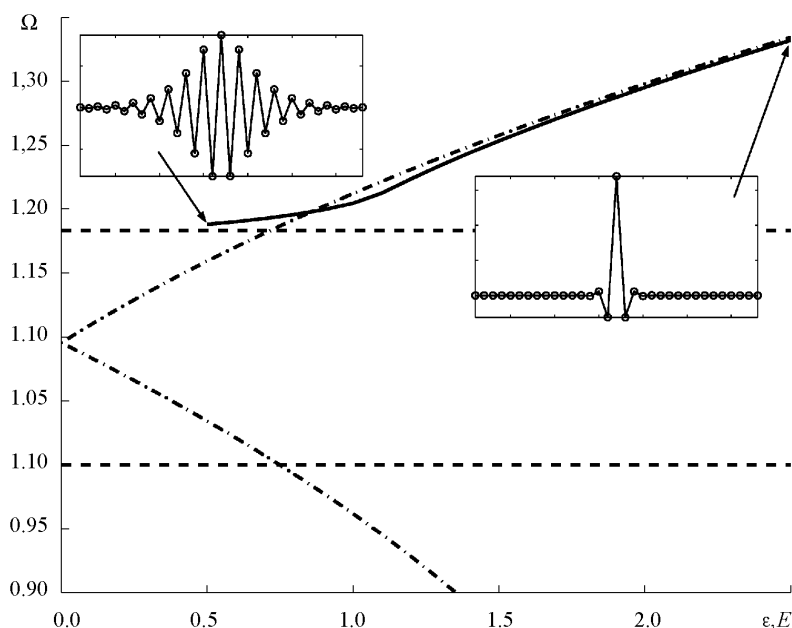


Рис. 1. Зависимость частоты дискретных бризеров от энергии. Штрихпунктирные кривые: одночастичное приближение для моделей Клейна–Гордона (вверху) и Такено–Пейрара (внизу). Сплошная кривая: численный расчет для цепочки Клейна–Гордона из  $N = 33$  элементов. Врезки: вид дискретного бризера для  $E = 0.5$  и  $2.5$ . Штриховые линии: границы линейного спектра

Для проверки выводов одночастичного приближения воспользуемся численным методом [20] отыскания периодических бризерных решений с заданной точностью. В цепочке из  $N = 33$  элементов при  $\kappa = 0.1$ ,  $\beta = 0.25$  были рассчитаны бризерные решения, локализованные в центре цепочки, для энергий в диапазоне  $0.5 < E < 2.5$ . Ошибка (расстояние между последовательными пересечениями секущей Пуанкаре) не превышает  $10^{-8}$ . На рис. 1 построена зависимость частоты решения от энергии, а также приведены профили пространственного распределения координат частиц в момент, когда скорости обращаются в нуль, для двух крайних значений энергии. Как и ожидалось, одночастичное приближение хорошо работает для энергий, существенно превышающих  $\epsilon_{db}$ . С уменьшением энергии бризер де-локализуется. При этом частота его остается выше линейного спектра, а соседние частицы совершают колебания в противофазе.

Характерное значение энергии  $\epsilon_{db}$  разделяет «слабо» и «сильно» локализованные дискретные бризеры. Как будет показано в следующем разделе, это значение имеет смысл при рассмотрении задач о формировании дискретных бризеров в физических процессах, например, вследствие модуляционной неустойчивости гармонических волн.

## 2. Дискретные бризеры с конечным временем жизни и модуляционная неустойчивость

Одним из возможных механизмов генерации дискретных бризеров с большим, но конечным временем жизни в физических процессах является разрушение гармонической волны вследствие модуляционной неустойчивости [24–28].

Переход к комплексным амплитудам в уравнении (4) в приближении их медленного изменения приводит к нелинейному дискретному уравнению Шредингера [25, 26, 28]. Линеаризация этого уравнения в окрестности решения вида гармонической бегущей волны дает область волновых чисел  $k$ , для которых волна неустойчива [25, 26]:  $0 < k < \pi/2$  при  $\beta < 0$  в потенциале (9) и  $\pi/2 < k < \pi$  при  $\beta > 0$ .

В работах [25, 26] было проведено численное моделирование для случая  $\beta < 0$  на временных масштабах порядка  $1.5 \cdot 10^4$  периодов собственного колебания низшей частоты. Результаты [25, 26] показали, что модуляционная неустойчивость может служить эффективным механизмом локализации энергии и формирования долгоживущих дискретных бризеров, когда начальные условия заданы в форме слабозашумленной гармонической волны. На начальном этапе эволюции системы из таких начальных условий волна разбивается на отдельные волновые пакеты вследствие модуляционной неустойчивости. Образующиеся волновые пакеты имеют различную энергию и за счет этого слегка различную групповую скорость распространения. На следующем этапе, процессы в котором существенно нелинейны, многочисленные столкновения волновых пакетов приводят к обмену энергией между пакетами. В результате этого обмена энергия в некоторых пакетах может стать достаточной для возбуждения дискретного бризера. Аналогичный механизм реализуется и в других моделях.

Рассмотрим подробнее процесс формирования дискретных бризеров из бегущей волны в конечной цепочке, описываемой уравнениями (4), (9), с периодическими граничными условиями

$$x_0 = x_N, \quad x_{N+1} = x_1 \quad (10)$$

для случая  $\beta = 0.25 > 0$ ,  $\kappa = 0.1$ ,  $N = 400$ . С помощью численного моделирования исследуем зависимость процесса генерации дискретных бризеров от энергии начальной волны, а также характер эволюции системы на больших временах после формирования дискретных бризеров.

Зададим начальные условия в виде гармонической волны со слабым мультипликативным шумом

$$\begin{aligned} x_n(0) &= A(1 + \xi_n) \cos kn, \\ \dot{x}_n(0) &= \omega A(1 + \xi_n) \sin kn, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\omega^2 = 1 + 4\kappa \sin^2(k/2) + 3\beta A^2$ , случайные величины  $\xi_n$  независимы и распределены равномерно на интервале  $(0; 0.001)$ . Используемое выражение для  $\omega$  учитывает нелинейную поправку первого порядка к частоте в зависимости от амплитуды волны [26]. Выберем значение  $k = 3\pi/4$ , при котором волна модуляционно неустойчива (для  $\beta > 0$ ). Символом  $\bar{\epsilon}$  обозначим среднюю плотность энергии – полную энергию системы, деленную на число частиц.

В качестве основной наблюдаемой величины будем рассматривать дискретную плотность энергии  $\epsilon_n$ , определяемую соотношением

$$\epsilon_n = \frac{\dot{x}_n^2}{2} + U(x_n) + \frac{1}{4}\kappa [(x_n - x_{n-1})^2 + (x_n - x_{n+1})^2]. \quad (12)$$

Энергия каждой связи при таком определении делится пополам между связанными частицами.

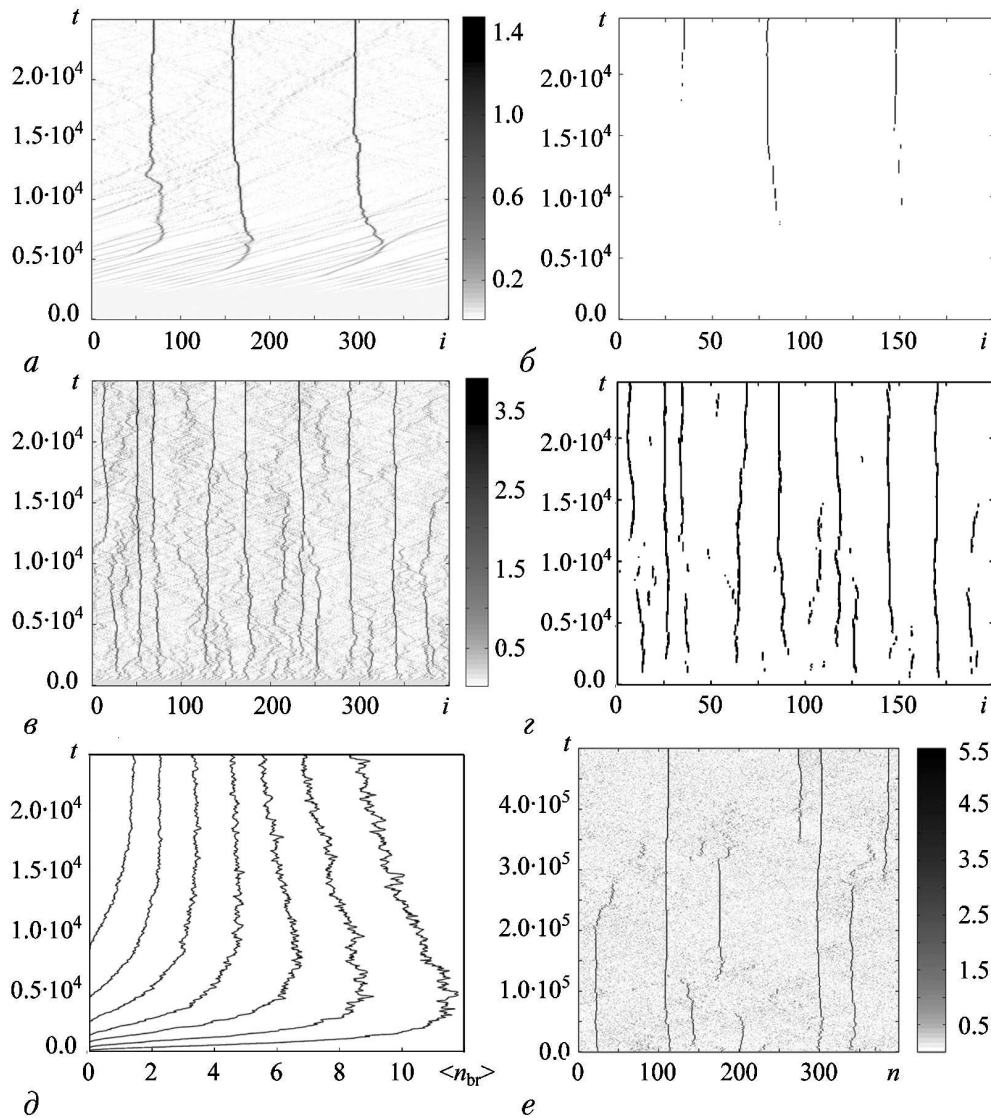


Рис. 2. Эволюция плотности энергии (а, в) и выделенные дискретные бризеры (б, г) в модели Клейна–Гордона. Зависимость усредненного по ансамблю из 99 реализаций количества дискретных бризеров от времени для различных значений амплитуды начальной волны (д). Эволюция плотности энергии на большом интервале времени (е)

Для интегрирования уравнений движения был использован метод Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом по времени  $\Delta t = 0.01$ . Ошибка численного счета в консервативных системах контролировалась по дрейфу полной энергии в системе. Относительное изменение энергии за время моделирования во всех расчетах не превышает  $10^{-6}$ .

Было проведено моделирование динамики системы для 99 различных реализаций случайного шума  $\xi_n$  при амплитуде начальной волны  $A$ , принимающей значения от 0.1 до 0.5 с шагом 0.05 на временном отрезке длительностью  $T = 2.5 \cdot 10^4$ .

На рис. 2, а, в градациями серого отображена типичная эволюция плотности энергии в системе для одной из реализаций  $\xi_n$  в начальных условиях при  $A = 0.2$



( $\bar{\epsilon} = 0.027$ ) (а) и  $A = 0.5$  ( $\bar{\epsilon} = 0.18$ ) (б). По оси абсцисс откладывается дискретная координата, по оси ординат – время. На рисунках наглядно прослеживается сценарий локализации энергии и формирования дискретных бризеров [26], описанный в начале раздела.

Развитие неустойчивости приводит к существенному изменению групповых скоростей отдельных пакетов, вплоть до однократного или многократного изменения направления движения. Такие замедленные пакеты с высокой эффективностью поглощают энергию сталкивающихся с ними более быстрых пакетов [25, 26], что приводит к систематическому нарастанию их энергии. При превышении энергией пакета некоторого порога, близкого к характерному значению  $\epsilon_{db} \approx 0.72$  (см. раздел 1.), возбуждение становится неподвижным, и формируется долгоживущий дискретный бризер, продолжающий взаимодействовать с распространяющимися пакетами.

Для количественного исследования процесса генерации дискретных бризеров необходимо ввести критерий дискретного бризера в численном эксперименте. Этот критерий должен учитывать такие свойства дискретного бризера, как неподвижность, высокую плотность энергии (по сравнению с движущимися возбуждениями) и большое время жизни (по сравнению, например, с периодом малых собственных колебаний). Исходя из этих соображений, сформулируем следующий критерий.

На элементе с индексом  $n$  в момент  $t$  регистрируется дискретный бризер, если плотность энергии  $\epsilon_n(t)$ , усредненная по  $M$  временным отсчетам, сделанным через время  $\tau$ , превышает порог  $\epsilon_{db}$ :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \epsilon_n(t + m\tau) > \epsilon_{db}, \quad (13)$$

где выбраны значения  $M = 10$ ,  $\tau = 50.0$ . Полное время усреднения тогда составляет  $M \cdot \tau = 500.0$ , то есть около 80 периодов собственного колебания низшей частоты  $T_0 = 2\pi$ .

Результаты применения этого критерия к случаям, изображенным на рис. 2, а, б, показаны на рис. 2, б, г, соответственно. Зарегистрированные дискретные бризеры отмечены черным цветом. Как видно из этих рисунков, выбранный критерий соответствует физическим представлениям о дискретном бризере.

В каждой реализации таким способом подсчитывается количество дискретных бризеров в зависимости от времени  $n_{br}^v(t)$ , где  $v$  – номер реализации. Затем результат усредняется по всем реализациям, в результате чего получается среднее по ансамблю количество бризеров в зависимости от времени

$$\langle n_{br}(t) \rangle = \frac{1}{R} \sum_{v=1}^R n_{br}^v(t), \quad (14)$$

где  $R = 99$  в данном эксперименте.

Измеренные зависимости  $\langle n_{br}(t) \rangle$  для  $A = 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5$  ( $\bar{\epsilon} = 0.015, 0.027, 0.043, 0.062, 0.085, 0.11, 0.14, 0.18$ ) изображены на рис. 2, д (слева направо). Для наглядности (для удобства сравнения с рис. 2, а–г) ось времени направлена вверх. При  $A = 0.1$  ( $\bar{\epsilon} = 0.0067$ ) дискретные бризеры на рассматриваемом промежутке времени зарегистрированы не были.

Как можно заключить из графиков, характерное время формирования первого дискретного бризера  $t_{br}$  быстро растет с уменьшением средней плотности энергии. За время порядка нескольких  $t_{br}$  количество дискретных бризеров достигает максимума, после чего начинается постепенное уменьшение их количества. Максимальное количество дискретных бризеров возрастающим образом зависит от энергии начальной волны.

Представляет интерес вопрос о дальнейшей эволюции системы на больших временах. Для выяснения этого вопроса в работе [29] было проведено моделирование для 40 различных реализаций  $\xi_n$  при  $A = 0.5$  ( $\bar{\epsilon} = 0.18$ ) на временном отрезке длительностью  $T = 5 \cdot 10^5$  (что соответствует примерно  $10^5$  периодам собственного колебания низшей частоты).

Результат для одной из реализаций приведен на рис. 2, *e* [29]. Как видно из рисунка, имеет место распад большей части бризеров, сформировавшихся на начальной стадии. Отметим, что интервал времени на рис. 2, *e* в 20 раз больше, чем на рис. 2, *в*, построенном для того же значения средней плотности энергии, а верхняя граница тональной шкалы существенно выше. Это свидетельствует о дальнейшем нарастании энергии выживших бризеров.

В 29 из 40 реализаций наблюдалось формирование новых дискретных бризеров на больших временах после полного разрушения гармонической волны, то есть за рамками сценария [26]. В 11 из этих 29 реализаций такие бризеры имели времена жизни больше  $5 \cdot 10^4$  (такой случай приведен на рис. 2, *e*). Это явление не объясняется напрямую модуляционной неустойчивостью. Однако можно предположить, что оно является следствием спонтанной локализации энергии в системе, которая связана с модуляционной неустойчивостью [29].

Для всех реализаций начальных условий наблюдались дискретные бризеры с временем жизни порядка времени моделирования. Этот факт, с одной стороны, не дает возможности достоверно определить максимальное время жизни дискретного бризера и, с другой стороны, свидетельствует о существенном влиянии, которое оказывают дискретные бризеры на процесс установления теплового равновесия в системе.

### 3. Дискретные бризеры и ротобризеры в модели Такено–Пейрара

В системах, описываемых гамильтонианом вида

$$H = \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2} + U(x_n) + V(x_{n+1} - x_n) \right) \quad (15a)$$

и уравнениями движения

$$\ddot{x}_n = -U'(x_n) + V'(x_{n+1} - x_n) - V'(x_n - x_{n-1}), \quad (15б)$$

где потенциал парциального осциллятора  $U(x)$  и потенциал взаимодействия  $V(x)$  – периодические функции:  $U(x + 2\pi) = U(x)$ ,  $V(x + 2\pi) = V(x)$  (период без ограничения общности положим равным  $2\pi$ ), переменные состояния  $x_n$  имеют смысл

фаз, и наряду с колебательными возможны также вращательные движения. Соответственно, помимо колебательных локализованных возбуждений – дискретных бризеров, здесь возможны также локализованные вращательные решения – *ротобризеры* [9, 20].

В ротобризерном решении одна из фаз неограниченно нарастает со временем (элемент совершает вращение), а остальные колеблются с амплитудами, спадающими при удалении от вращающегося элемента. Такие решения наблюдались в численном эксперименте [9] в системе вида (15) с потенциалами

$$U(x) = 1 - \cos x, \quad V(x) = \kappa(1 - \cos x), \quad (16)$$

называемой по именам авторов [9] моделью Такено–Пейрара. Уравнения движения (15б) принимают вид

$$\ddot{x}_n = -\sin x + \kappa(\sin(x_{n+1} - x_n) - \sin(x_n - x_{n-1})). \quad (17)$$

Ротобризеры в [9] были получены при моделировании системы (17) в равновесии с термостатом, а также путем задания специальных начальных условий (на одном из элементов задается начальная скорость достаточно большой величины). Существование периодических во времени ротобризерных решений в моделях вида (15) было строго доказано в работе [20]. По аналогии с дискретными бризерами, говорят о ротобризерах как с бесконечным, так и с конечным временем жизни.

Покажем, что модуляционная неустойчивость гармонической волны может приводить к генерации как дискретных бризеров, так и ротобризеров в модели (17).

Характерные значения энергии, отвечающие обоим типам локализованных возбуждений, могут быть получены с помощью одночастичного приближения (см. разд. 1.). Зависимость частоты одночастичного бризера от энергии изображена на рис. 1 (нижняя штрихпунктирная кривая). Дисперсионное соотношение линеаризованной системы (17) совпадает с (7). Частота одночастичного бризера выходит из полосы линейного спектра для энергий, превышающих величину  $\varepsilon_{\text{dB}} \approx 0.75$ . В отличие от дискретной модели Клейна–Гордона, рассмотренной в предыдущем разделе, в данной модели допустимые частоты дискретных бризеров лежат *ниже* линейного спектра. При превышении величины  $\varepsilon_{\text{rot}} \approx 2.4$  в одночастичной модели возникает вращательное движение. Заметим еще, что для дискретных бризеров в одночастичном приближении имеются запрещенные области энергий, для которых хотя бы одна гармоника основной частоты попадает в полосу линейного спектра.

Поскольку член третьей степени в дискретном нелинейном уравнении Шредингера, аппроксимирующем (17), имеет отрицательный знак, в этой системе модуляционно неустойчивы волны с волновыми числами  $0 < k < \pi/2$  [25].

Было проведено численное моделирование системы (17) из  $N = 400$  элементов,  $\kappa = 0.1$ . Граничные условия – периодические (10). Начальные условия имеют вид (11), где  $k = \pi/4$ , случайные величины  $\xi_n$  независимы и распределены равномерно на интервале  $(0; 0.001)$ . Были проведены расчеты для 10 различных реализаций начальных условий для каждого значения амплитуды исходной волны  $A$ .

На рис. 3, а приведены измеренные в соответствии с (14) зависимости среднего по ансамблю количества локализованных возбуждений от времени  $\langle n_{\text{br}}(t) \rangle$  для

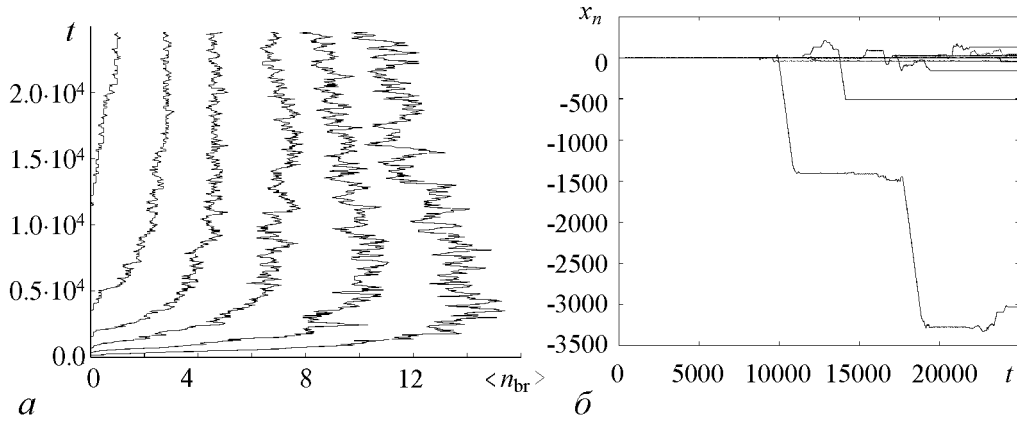


Рис. 3. Зависимость усредненного по ансамблю из 10 реализаций количества локализованных возбуждений от времени в модели Такено–Пейрара для различных значений амплитуды начальной волны (а). Эволюция координат всех частиц для одной из реализаций (б)

значений амплитуды  $A = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$  ( $\bar{\epsilon} = 0.021, 0.047, 0.081, 0.12, 0.17, 0.23$ ), слева направо. Качественный характер кривых аналогичен результату для дискретной модели Клейна–Гордона (см. рис. 2, д). Это означает, что механизм локализации энергии, описанный в разделе 2, продолжает действовать и в данной системе.

Заметим, что измерение локальных плотностей энергии не позволяет отличить вращательные возбуждения от колебательных. На рис. 3, б построены зависимости координат всех частиц от времени  $x_n(t)$  для одной из реализаций шума  $\xi_n$  в начальных условиях при  $A = 0.7$  ( $\bar{\epsilon} = 0.23$ ). Локализованные вращательные возбуждения – ротобризеры проявляются на рисунке в виде больших набегов фаз на некоторых элементах. При этом направление вращения каждого из таких возбуждений носит случайный характер, а время жизни (по сравнению с временем жизни колебательного возбуждения) невелико.

Рассмотрим обобщение модели (17), включающее внешний момент и диссипацию

$$\ddot{x}_n + \lambda \dot{x}_n = -\sin x + \kappa(\sin(x_{n+1} - x_n) - \sin(x_n - x_{n-1})) + \gamma_n. \quad (18)$$

Такая модель представляет интерес, например, с точки зрения моделирования динамики электрогенераторов, включенных в общую энергосеть [12].

Следует ожидать, что при  $\lambda = 0$ ,  $|\gamma_n| \ll 1$  и в отсутствие вращательных движений процесс разрушения бегущей волны и локализации энергии происходит аналогично рассмотренному выше случаю (17). Различие проявляется при возникновении вращательных движений. В силу наличия внешнего момента, во-первых, имеется выделенное направление вращения; во-вторых, вращательное движение инфинитно и сопровождается неограниченным нарастанием энергии.

Это рассуждение подтверждается численным моделированием. На рис. 4, а изображена эволюция плотности энергии в системе (18) для  $\lambda = 0$ ,  $\gamma_n = \gamma = 0.01$ ,  $A = 0.7$  ( $\bar{\epsilon} = 0.23$ ). Черный цвет соответствует инфинитному вращению элемента.

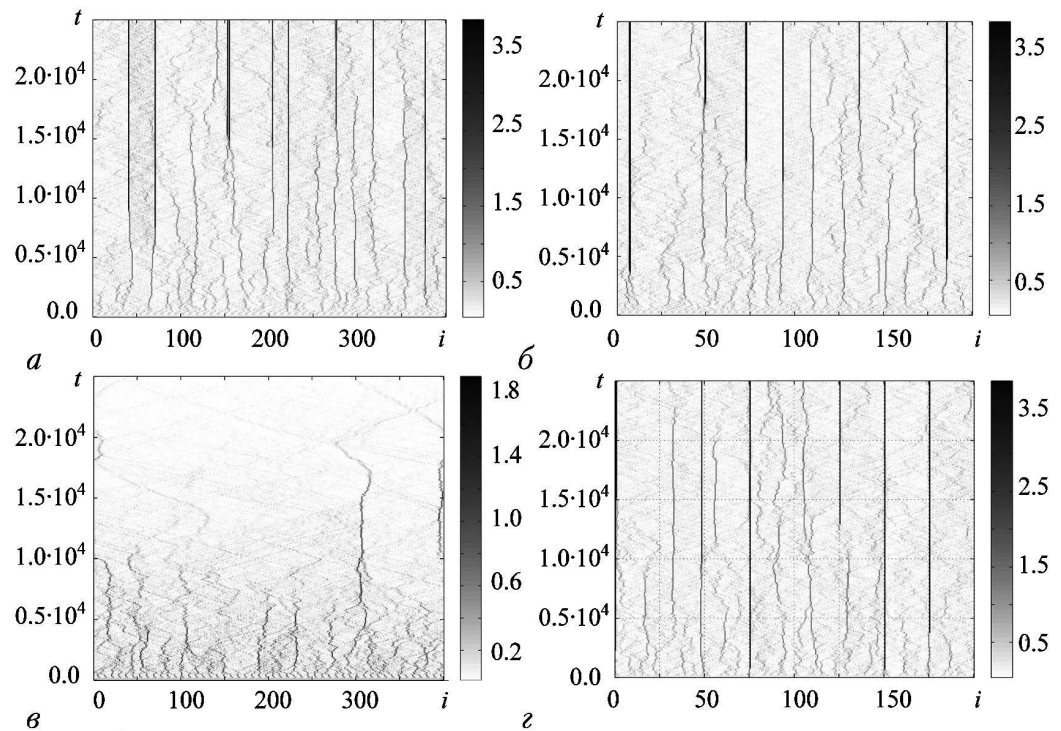


Рис. 4. Эволюция плотности энергии в модели Такено–Пейрара с внешним моментом без диссипации (а) и с диссипацией (б, в). Управление формированием роторизеров с помощью пространственно-неоднородного внешнего момента (з)

Вертикальные черные линии, таким образом, соответствуют роторизерам. Благодаря наличию внешнего момента, роторизеры не разрушаются и неограниченно набирают энергию.

При наличии диссипации ( $\lambda > 0$ ) возможность возбуждения роторизера в системе зависит от соотношения двух противоположных факторов: нарастания плотности энергии в некоторых элементах вследствие локализации энергии – с одной стороны, и спадания полной энергии системы вследствие диссипации – с другой стороны. Роторизер в диссипативной системе представляет собой вращательный предельный цикл. Если вращательное движение возникает, то нарастание его энергии ограничивается диссипацией, и в установившемся режиме имеет место баланс диссипации и подкачки энергии за счет внешнего момента.

Отметим, что за счет коллективной динамики, приводящей к локализации энергии, вращения в цепочечной системе могут возникать при значениях средней плотности энергии на порядки ниже величины порога выхода на вращательный режим в одиночном элементе.

Приведенные соображения иллюстрируются рисунками 4, б, в, где изображена эволюция плотности энергии в системе (18) при  $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$  (б) и  $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$  (в), значения остальных параметров те же, что и для рис. 4, а. При  $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$  локализация энергии, преобладающая над диссипацией, приводит к повышению локальной плотности энергии до величины, достаточной для перехода на режим вращения, и возникают роторизеры (см. рис. 4, б). При  $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$  локализованные колебатель-

ные возбуждения возникают, однако, вследствие диссипации, их энергия оказывается недостаточной для перехода на режим вращения (см. рис. 4, в), и система эволюционирует к устойчивому состоянию равновесия.

Представляет также интерес вопрос о возможности управления процессом генерации роторизеров с помощью пространственно неоднородного внешнего воздействия. Было проведено моделирование системы (18) при  $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$ ,  $A = 0.7$  ( $\bar{\epsilon} = 0.23$ ), с неоднородным распределением внешнего момента:  $\gamma_n = 0.21$  для  $n = 1.51, 101, \dots, 351$ , на остальных элементах  $\gamma_n = 0.01$  (рис. 4, з). Как видно из рисунка, роторизеры формируются преимущественно на элементах с повышенным значением внешнего момента, что подтверждает возможность управления их формированием.

### Заключение

В статье были рассмотрены основные свойства и условия существования дискретных бризеров с бесконечным и конечным временем жизни в нелинейных цепочечных системах. Было показано, что модуляционная неустойчивость гармонической волны является достаточно универсальным механизмом формирования локализованных возбуждений с большим, но конечным временем жизни – как колебательных, так и вращательных, причем последних – как в консервативных, так и в диссипативных системах. Многие вопросы теории дискретных бризеров остались за пределами рассмотрения, среди которых отметим другие механизмы формирования локализованных возбуждений – например, в процессах теплопереноса [29–31]; взаимодействие дискретных бризеров и роторизеров с распространяющимися волнами [32, 33]; свойства дискретных бризеров в решетках размерности выше единицы [22, 34]; переход от классической задачи о дискретных бризерах к соответствующей квантовой [19, 35, 36].

Отметим также перспективное направление развития, которое теория дискретных бризеров получила в последнее время. Оказывается, идея построения локализованных решений может быть реализована не только в прямом пространстве решетки, но и во взаимном пространстве нормальных мод. При определенных условиях одномодовое периодическое решение линейной системы может быть продолжено на некоторую область ненулевых значений нелинейности. Такие продолженные решения характеризуются экспоненциальной локализацией в пространстве нормальных мод и, в силу аналогии с дискретными бризерами, были названы  $q$ -бризерами [37, 38]. Наряду с периодическими во времени решениями возможны также долгоживущие непериодические решения, локализованные в пространстве мод (в этом состоит известный результат Ферми–Паста–Улама). Свойствами  $q$ -бризеров могут быть качественно и количественно объяснены с единых позиций основные составляющие проблемы Ферми–Паста–Улама: возвращаемость траекторий, локализация в пространстве мод и пороговая зависимость этих эффектов от энергии системы [37, 38]. Концепция  $q$ -бризеров может найти применение в различных задачах, связанных с нелинейным взаимодействием мод, например, в теории теплопроводности.

*Данная работа была выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 07-02-01404, 06-02-16499), а также Фонда некоммерческих программ «Династия».*

## Библиографический список

1. Flach S., Willis C.R. Discrete breathers // Phys. Reports. 1998. Vol. 295. P. 181.
2. Flach S., Gorbach A.V. Computational studies of discrete breathers – from basics to competing length scales // Int. J. Bif. Chaos. 2006. Vol. 16. P. 1645.
3. Flach S., Gorbach A. Discrete breathers: advances in theory and applications // принято к печати в Physics Reports, 2008.
4. MacKay R.S., Aubry S. Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // Nonlinearity. 1994. Vol. 7. P. 1623.
5. Sato M., Sievers A.J. Direct observation of the discrete character of intrinsic localized modes in an antiferromagnet // Nature. 2004. Vol. 432. P. 486.
6. Fleischer J.W., Carmon T., Segev M., Efremidis N.K., Christodoulides D.N. Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, № 2. P. 023902.
7. Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplewski D.A., Craighead H.G. Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, № 4. P. 044102.
8. Zalalutdinov M.K., Baldwin J.W., Marcus M.H., Reichenbach R.B., Parpia J.M., Houston B.H. Two-dimensional array of coupled nanomechanical resonators // Applied Physics Letters. 2006. Vol. 88. P. 143504.
9. Takeno S., Peyrard M. Nonlinear modes in coupled rotator models // Physica D. 1996. Vol. 92. P. 140.
10. Miroshnichenko A., Flach S., Fistul M., Zolotaryuk Y., Page J.B. Breathers in Josephson junction ladders: resonances and electromagnetic waves spectroscopy // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 066601.
11. Binder P., Abraimov D., Ustinov A.V. Diversity of discrete breathers observed in a Josephson ladder // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 2. P. 2858.
12. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высшая школа, 1978.
13. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
14. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. С. 359.
15. Denzler J. Nonpersistence of breather families for the perturbed sine Gordon equation // Commun. Math. Phys. 1993. Vol. 158. P. 397.
16. Овчинников А.А. Локализованные долгоживущие колебательные состояния в молекулярных кристаллах // ЖЭТФ. 1969. Т. 57, вып. 1(7). С. 263.
17. Takeno S., Kisoda K., Sievers A.J. Intrinsic localized vibrational modes in anharmonic crystals // Prog. Theor. Phys. Suppl. // 1988. Vol. 94. P. 242.
18. Campbell D.K., Peyrard M. Chaos and order in nonintegrable model field theories // CHAOS – Soviet-American Perspectives on Nonlinear Science / Ed. D.K. Campbell. New York: American Institute of Physics, 1990. P. 305.
19. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization // Physica D. 1997. Vol. 103. P. 201.

20. *Marin J.L., Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Numerical calculation from the anticontinuous limit // *Nonlinearity*. 1996. Vol. 9. P. 1501.
21. *Flach S., Willis C.R., Olbrich E.* Integrability and localized excitations in nonlinear discrete systems // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 836.
22. *Flach S., Kladko K., MacKay R.S.* Energy thresholds of discrete breathers in one-, two- and three-dimensional lattices // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 1207.
23. *Косевич А.М., Ковалев А.С.* Самолокализация колебаний в одномерной ангармонической цепочке // *ЖЭТФ*. 1974. Т. 67. Вып. 5(11). С. 1793.
24. *Kivshar Yu.S., Peyrard M.* Modulational instabilities in discrete lattices // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46. P. 3198.
25. *Daumont I., Dauxois T., Peyrard M.* Modulational instability: first step towards energy localization in nonlinear lattices // *Nonlinearity*. 1997. Vol. 10. P. 617.
26. *Peyrard M.* The pathway to energy localization in nonlinear lattices // *Physica D*. 1998. Vol. 119. P. 184.
27. *Cretegnny T., Dauxois T., Ruffo S., Torcini A.* Localization and equipartition of energy in the beta-FPU chain: Chaotic breathers // *Physica D*. 1998. Vol. 121. P. 109.
28. *Johansson M., Morgante A.M., Aubry S., Kopidakis G.* Standing wave instabilities, breather formation and thermalization in a Hamiltonian anharmonic lattice // *Eur. Phys. J. B*. 2002. Vol. 29. P. 279.
29. *Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Shalfeev V.D., Flach S.* Discrete Breathers in Transient Processes and Thermal Equilibrium // *Physica D*. 2004. Vol. 198. P. 120.
30. *Tsironis G.P., Aubry S.* Slow relaxation phenomena induced by breathers in nonlinear lattices // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 5225.
31. *Bikaki A., Voulgarakis N.K., Aubry S., Tsironis G.P.* Energy relaxation in discrete nonlinear lattices // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 59. P. 1234.
32. *Flach S., Miroshnichenko A.E., Fistul M.V.* Wave scattering by discrete breathers // *CHAOS*. 2003. Vol. 13. P. 596.
33. *Miroshnichenko A.E., Schuster M., Flach S., Fistul M.V., Ustinov A.V.* Resonant plasmon scattering by discrete breathers in Josephson junction ladders // *Phys. Rev. B*. 2005. Vol. 71. P. 174306.
34. *Flach S., Kladko K., Willis C.R.* Localized excitations in two-dimensional lattices // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50. P. 2293.
35. *MacKay R.S.* Discrete breathers: classical and quantum // *Physica A*. 2000. Vol. 288. P. 174.
36. *Flach S., Fleurov V., Ovchinnikov A.A.* Tunneling of localized excitations: Giant enhancement due to fluctuations // *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 63. P. 094304.
37. *Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I.*  $q$ -Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 064102.
38. *Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Mishagin K.G.* Periodic orbits, localization in normal mode space and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *American Journal of Physics*. 2008. Vol. 76, № 4/5. P. 453.



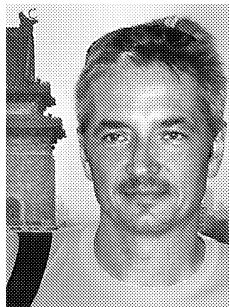
## INTRODUCTION TO DISCRETE BREATHERS THEORY

*O.I. Kanakov, S. Flach, V.D. Shalfeev*

We make a basic review of the theory of discrete breathers – spatially localized solutions in nonlinear lattices. We describe the mathematical conditions and physical prerequisites of their existence and methods of their study by example of one-dimensional lattices. We consider localized solutions with infinite and finite lifetimes. We include some new results within the problems of discrete breather generation resulting from harmonic wave destruction and controlling the formation of rotational breather solutions by external forcing.



*КанакOV Олег Игоревич* – родился в 1981 году, окончил Нижегородский государственный университет в 2004 году. Старший преподаватель кафедры теории колебаний Нижегородского государственного университета, кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: структуры и локализация энергии в нелинейных решеточных системах, моделирование динамики биологических сред. Награжден именными стипендиями некоммерческого фонда «Династия» и Президента Российской Федерации для аспирантов (2006). Соавтор 10 журнальных публикаций и 2 учебно-методических пособий.  
E-mail: okanakov@rf.unn.ru



*Флаx Сергей* – родился в 1963 году, окончил Дрезденский технический университет в 1986 году. Руководитель отдела по работе с приглашенными специалистами Института сложных систем Общества Макса Планка (Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme), доктор наук (Habilitation: 1998, Faculty for Natural Sciences, TU Dresden). Лауреат премии Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна (1988), премии Стефаноса Пневматикоса (2002). Область научных интересов: образование структур, распространение волн, локализация и явления переноса в классических и квантовых решеточных системах, нелинейных, неоднородных и нестационарных средах. Член экспертного совета Энциклопедии нелинейных наук (The Encyclopedia of Nonlinear Science). Соавтор 7 обзоров и монографий, более 100 журнальных статей.  
E-mail: flach@pks.mpg.de



*Шалфеев Владимир Дмитриевич* – родился в 1941 году, окончил Горьковский университет в 1963 году. Заведующий кафедрой теории колебаний Нижегородского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук РФ. Область научных интересов: динамика нелинейных систем, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Соавтор монографий «Системы фазовой синхронизации», «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации», «Динамический хаос в фазовых системах», «Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках».  
E-mail: shalfeev@rf.unn.ru