



БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛОВ ПЕРИОДА ДВА ДВУМЕРНОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

И.Н. Панкратова

В семействе двумерных логистических отображений обнаружены отображения с циклами периода 2, в которых происходят бифуркации рождения двух новых циклов периода 2. Для иллюстрации нового, по сравнению с одномерным логистическим отображением, свойства построены одномерные сечения бифуркационных диаграмм двухпараметрического отображения последования для двумерного логистического отображения при одном фиксированном параметре.

Введение

В качестве объекта изучения свойств, присущих многопараметрической нелинейной динамике, предлагаем отображение $f: R^n \rightarrow R^n$ следующего вида [1]:

$$fx = \left(1 - \sum_1^n x_i\right)Ax, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)'$ – вектор из вещественного пространства R^n , A – матрица параметров размерности $n \times n$.

Отображение f является одним из вариантов обобщения известного логистического отображения $\psi_\lambda: R \rightarrow R$ [2, 3],

$$\psi_\lambda x = \lambda(1 - x)x. \quad (2)$$

Здесь x – вещественная переменная; λ – параметр; запись ψ_λ означает, что отображение ψ зависит от параметра λ .

Основное внимание при изучении отображения f уделяется определению новых свойств и закономерностей его динамики по сравнению с одномерным однопараметрическим отображением ψ_λ . Одним из таких свойств является бифуркация рождения циклов четного периода.

Как известно (см. [2, 3]), у отображения ψ_λ циклы четных периодов возникают путем бифуркации удвоения периодов, а циклы нечетных периодов могут возникать

путем бифуркации рождения. В частности, из цикла периода 2 отображения ψ_λ (при $\lambda = 3$) на отрезке $I = [0, 1]$ путем бифуркации удвоения периода возникает цикл периода 4.

Обратимся к двумерному отображению f , динамика которого зависит от двух параметров. Оказывается, что в этом случае ситуация несколько иная: в циклах периода 2 отображения f возможны бифуркации рождения двух новых циклов периода 2, один из которых притягивающий, а другой – отталкивающий. Более того, если рассматривать не одно отображение, а семейство двумерных отображений f с двухпараметрической динамикой, то существуют бесконечно много значений параметров (на плоскости параметров они образуют непрерывную кривую за исключением одной точки), при которых в циклах периода 2 происходят бифуркации рождения новых циклов.

Для обнаружения этих циклов в данной работе рассмотрим двухпараметрические одномерные отображения последования отображения f на сечениях Пуанкаре и применим известную теорему о бифуркациях рождения циклов в однопараметрическом семействе одномерных отображений (см., например, [2, с. 178, теорема 8.1]), проверяя выполнение условий этой теоремы для нашего случая.

Такой подход оказался правомерным благодаря тому, что на кривой параметров, при которых происходят бифуркации рождения циклов периода 2, один из параметров можно выразить как функцию от другого параметра, в результате чего двухпараметрическое семейство отображений последования сводится к однопараметрическому. Еще одну особенность кривой параметров хотелось бы отметить: на плоскости параметров она задает бифуркационное множество (параметров), которое является образом кривой складок на многообразии катастрофы в пространстве переменной x и параметров [4, с. 107, 112] – поверхности неподвижных точек двухпараметрического одномерного отображения последования отображения f .

Остановимся кратко на содержании данной работы.

В разделе 1 вводится объект исследования – двумерное логистическое отображение f с двухпараметрической динамикой; дается постановка задачи и метод ее решения – метод отображения Пуанкаре, благодаря которому изучение бифуркаций циклов периода 2 отображения f сводится к исследованию бифуркаций в неподвижных точках двухпараметрического отображения последования отображения f .

В разделе 2 показано, что на одномерных сечениях Пуанкаре, которые для системы f^m не строятся, а появляются «естественным» образом, действуют двухпараметрические одномерные отображения последования отображения f , которые имеют аналитический вид.

В разделе 3 определяются неподвижные точки отображений последования отображения f , в которых происходят бифуркации рождения новых точек, и бифуркационные значения параметров.

В качестве иллюстрации приведены одномерные бифуркационные диаграммы отображения последования отображения f при одном фиксированном и другом меняющемся параметрах. Диаграммы показывают, что при бифуркационных значениях параметров в неподвижных точках отображения последования (являющихся аттракторами) путем бифуркации рождения появляются новые неподвижные точки, одну из которых в качестве аттрактора мы наблюдаем при увеличении или при уменьшении значения изменяемого параметра.

Отметим сразу, чтобы внести ясность, что помимо циклов периода 2, в точках которых происходят бифуркации рождения новых циклов периода 2, существуют целые подобласти параметров, в которых из циклов периода 2 отображения f путем бифуркации удвоения периода появляются циклы периода 4.

В разделе 4 дано описание возникающих типов бифуркаций циклов периода 2 в семействе двумерных отображений f с двухпараметрической динамикой.

Изучение отображения f связано с возможностью применения результатов его исследования в тех областях знаний, где система f^m используется в качестве математических моделей каких-либо реальных процессов или явлений.

В качестве примера приведем биологическую интерпретацию системы f^m . Пусть x – вектор относительных численностей (плотностей) возрастных групп популяции и A – матрица коэффициентов взаимосвязей групп между собой. Учитывая естественные ограничения на вектор x , выделим в пространстве R^n множество

$$K^n = \{x \in R^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \sum_1^n x_i \leq 1\}.$$

Тогда система f^m с фазовым пространством K^n задает модель динамики плотности n -групповой биологической популяции в условиях стационарной экосистемы с ограниченными ресурсами [1,5]. Эта система представляет собой также нелинейный аналог модели Лесли [6] (если матрицу A рассматривать, как обобщение матрицы Лесли L с коэффициентами рождаемости $a_{1,i} = b_i \geq 0, i = \overline{1, n}$, и выживаемости $a_{i,i-1} = a_i \geq 0, i = \overline{2, n}$, и $a_{i,j} = 0$ для всех других индексов матрицы L). В отличие от других нелинейных моделей Лесли и их вариантов, для которых зачастую возможно существование только равновесных и циклических решений (см., например, [7–9]), предложенная нами в качестве популяционной модели система f^m позволяет получать все виды динамики, в том числе и хаотические режимы, наиболее характерные для динамики биологических популяций.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное отображение f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$. В координатной форме это отображение записывается следующим образом:

$$\begin{cases} (fx)_1 = a_1(1 - x_1 - x_2)x_2, \\ (fx)_2 = a_2(1 - x_1 - x_2)x_1. \end{cases}$$

Для динамической системы f^m , порожденной отображением f , фазовое пространство

$$K^2 = \{x \in R^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

является компактным¹ множеством.

¹В конечномерном пространстве компактность множества эквивалентна его замкнутости и ограниченности. В случае компактного фазового пространства ω -предельные множества системы, к которым стремятся фазовые траектории при $t \rightarrow +\infty$, инвариантны и непусты (в отсутствие компактности некоторые (или все) ω -предельные множества системы могут оказаться пустыми, то есть могут располагаться вне фазового пространства). В частности, компактность фазового пространства гарантирует «наблюдаемость» аттракторов системы в фазовом пространстве.

Для инвариантности в положительном направлении множества K^2 , то есть для выполнения включения $fK^2 \subseteq K^2$, необходимо, чтобы $0 < a_1, a_2 \leq 4$ [1].

Действительно, для любого x из K^2 нужно, чтобы вектор fx также принадлежал K^2 . Поэтому для fx должны выполняться неравенства: $(fx)_1 \geq 0$, $(fx)_2 \geq 0$ и $(fx)_1 + (fx)_2 \leq 1$. Оценим $(fx)_1 + (fx)_2$. Имеем $(fx)_1 + (fx)_2 = a_1(1 - x_1 - x_2)x_2 + a_2(1 - x_1 - x_2)x_1 \leq \max\{a_1, a_2\}(1 - (x_1 + x_2))(x_1 + x_2) \leq \max\{a_1, a_2\} \cdot 1/4 \leq 1$, откуда следует ограничение.

Обозначим через $\lambda = \sqrt{a_1 a_2} > 0$ максимальное собственное значение матрицы A [10, с. 334], тогда $(-\lambda)$ – другое собственное значение (то есть собственные значения матрицы A по модулю совпадают). В этом случае говорят, что неотрицательная матрица A (с неотрицательными элементами) имеет циклический вид [10, с. 335]. Значению λ соответствует собственный вектор $e > 0$ (с положительными координатами) матрицы A , то есть $Ae = \lambda e$.

Цель работы – обнаружить циклы периода 2 отображения f , в которых происходят бифуркации рождения новых циклов.

Нам удобнее рассмотреть вместо циклов периода 2 отображения f неподвижные точки второй итерации f^2 отображения f (поскольку именно эти точки образуют циклы периода 2 отображения f). Отображение f^2 является для отображения f не чем иным, как отображением последования и, кроме того, его можно записать в аналитическом виде [5]

$$f^2 = \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}. \quad (3)$$

Поясним, как в (3) следует понимать равенство.

Пусть x – произвольная точка в K^2 ($x \neq 0$ и $x_1 + x_2 \neq 1$, иначе $fx = 0$).

Обозначим через $e_1 = ((e_1)_1, (e_1)_2)'$ – единичный вектор вдоль вектора x , то есть $\|e_1\| = (e_1)_1 + (e_1)_2 = 1$. Тогда x можно записать в виде

$$x = ye_1, \quad (4)$$

где $0 < y < 1$.

Равенство $f^2 = \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ понимается как равенство векторов

$$f^2 x = ((\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})y)e_1.$$

Суперпозиция $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ по определению понимается как равенство

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})y = \psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1}y),$$

$$\psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1}y) = \lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1}y)\psi_{\lambda_1}y,$$

где λ_1, λ_2 – параметры. Функция $(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})y$ является полиномом 4-й степени по переменной y и зависит от двух параметров.

Таким образом, нам предстоит выяснить, что собой представляют сечения Пуанкаре, где они расположены в фазовом пространстве K^2 , и показать, что действующие на них отображения последования имеют вид (3).

2. Сечения Пуанкаре и отображения последования отображения f

Сечения Пуанкаре, как было отмечено выше, для динамической системы f^m не строятся, а возникают в K^2 «естественным» образом. Посмотрим, как это происходит.

На отрезке луча единичной длины вдоль собственного вектора e , соответствующего собственному значению λ матрицы A , отображение f линейно изоморфно одномерному отображению ψ_λ , то есть $f = \psi_\lambda$.

Действительно, возьмем вектор $x \in K^2$ ($x \neq 0$ и $x_1 + x_2 \neq 1$) и запишем его в виде (4).

Если $e_1 \equiv e$, то есть $x = ye$, то $fx = (1 - y)yAe = \lambda(1 - y)ye = (\psi_\lambda y)e$, откуда $f = \psi_\lambda$.

Пусть далее $x = ye_1$ и $e_1 \neq e$. Найдем вектор fx . Имеем

$$fx = (1 - x_1 - x_2)Ax = (1 - y)yAe_1 = (1 - y)y(a_1(e_1)_2, a_2(e_1)_1)'$$

Обозначим через λ_1 длину (норму) вектора Ae_1 , то есть

$$\lambda_1 = \|Ae_1\| = (Ae_1)_1 + (Ae_1)_2 = a_1(e_1)_2 + a_2(e_1)_1.$$

Пусть $e_2 \geq 0$ – единичный вектор вдоль вектора Ae_1 (вдоль вектора fx), то есть $e_2 = Ae_1/\|Ae_1\|$. Тогда

$$fx = \lambda_1(1 - y)y \frac{Ae_1}{\|Ae_1\|} = \lambda_1(1 - y)ye_2 = (\psi_{\lambda_1} y)e_2.$$

Далее найдем вектор f^2x . Имеем

$$\begin{aligned} f^2x &= f(fx) = (1 - (fx)_1 - (fx)_2)Afx = \\ &= (1 - \psi_{\lambda_1} y)\psi_{\lambda_1} yAe_2 = (1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y)(a_1(e_2)_2, a_2(e_2)_1)'. \end{aligned}$$

Обозначим через λ_2 длину вектора Ae_2 , то есть

$$\lambda_2 = \|Ae_2\| = (Ae_2)_1 + (Ae_2)_2 = a_1(e_2)_2 + a_2(e_2)_1.$$

Пусть $e_3 = Ae_2/\|Ae_2\| \geq 0$ – единичный вектор вдоль вектора Ae_2 (вдоль вектора f^2x). В результате получим

$$f^2x = \lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y) \frac{Ae_2}{\|Ae_2\|} = \lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y)e_3 = (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} y)e_3.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} f^2x &= f(fx) = (1 - (fx)_1 - (fx)_2)Afx = (1 - \psi_{\lambda_1} y)(1 - y)yA^2e_1 = \\ &= \lambda^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1} (1 - \psi_{\lambda_1} y)(1 - y)ye_1 = (\lambda^2/\lambda_1)(1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y)e_1 = \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2} (1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y)e_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda_1 \lambda_2} (\psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1} y))e_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda_1 \lambda_2} (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} y)e_1. \end{aligned}$$

Сравнивая оба представления для вектора f^2x , получим $e_3 \equiv e_1$, $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$ и $e_1 \geq 0$ – собственный вектор матрицы A^2 , соответствующий собственному значению λ^2 , то есть $A^2e_1 = \lambda^2e_1$.

Таким образом, векторы $x = ye_1$ и $f^2x = (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}y)e_1$ расположены на одном и том же луче вдоль вектора e_1 .

Значит, отрезок луча единичной длины вдоль вектора e_1 ($\neq e$) является сечением Пуанкаре для траектории $f^m x$ и на нем действует отображение последования

$$f^2 = \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}.$$

Напомним еще раз, что суперпозиция $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ по определению понимается как равенство

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})y = \psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1}y),$$

где числа λ_1, λ_2 , как нетрудно видеть, меняются в пределах $\min\{a_1, a_2\} \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq \max\{a_1, a_2\}$.

Траектория $f^m x$ произвольной точки x из K^2 располагается на множестве, состоящем из двух единичной длины отрезков лучей вдоль векторов x и fx , циклически переходящих друг в друга под действием отображения f . Это множество назовем *циклом отрезков лучей периода 2* (в n -мерном случае см., например, [1, 5]).

Что представляет собой пространство K^2 ? Оно состоит из одного отрезка луча вдоль вектора e и континуума циклов отрезков лучей периода 2, отрезки лучей каждого из которых расположены в K^2 по обе стороны от одного отрезка луча.

Пара (λ_1, λ_2) однозначным образом определяет цикл отрезков лучей периода 2: на одном отрезке луча $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (это множество можно считать циклом отрезков лучей периода 2 с совпадающими отрезками лучей); на цикле отрезков координатных лучей вдоль векторов $(0, 1)'$ и $(1, 0)'$ $\lambda_1 = a_1$ и $\lambda_2 = a_2$; на цикле отрезков лучей периода 2 вдоль векторов e_1, e_2 $\lambda_1 = \|Ae_1\|$ и $\lambda_2 = \|Ae_2\|$. При этом в силу равенства $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2$ при переходе с одного отрезка луча на циклы отрезков лучей периода 2 вплоть до цикла отрезков координатных лучей параметры λ_1, λ_2 меняются непрерывным образом от значения λ до значений a_1, a_2 .

Таким образом, отрезок луча единичной длины вдоль произвольного вектора из K^2 является сечением Пуанкаре, на котором действует отображение последования вида (3) ($f = \psi_\lambda$ на одном отрезке луча).

3. Бифуркации рождения неподвижных точек отображения последования

Перейдем теперь непосредственно к изучению бифуркаций в неподвижных точках отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ на интервале $(0, 1)$.

В качестве области определения параметров (λ_1, λ_2) выберем максимально возможную, полагая $0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 4$ и $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2$.

Распишем более подробно действие отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ на произвольную точку x отрезка I . Имеем

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}x &= \psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1}x) = \lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1}x)\psi_{\lambda_1}x = \\ &= \lambda_1\lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1}x)(1 - x)x = \lambda^2(1 - \lambda_1(x - x^2))(x - x^2), \end{aligned}$$

то есть отображение $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ можно считать зависящим также и от параметров λ_1, λ . Нам удобнее в дальнейшем рассматривать область параметров (λ_1, λ) , а не (λ_1, λ_2) . Область определения параметров будет иметь вид (см. также [5])

$$\Lambda = \{ (\lambda_1, \lambda) \mid 0 < \lambda_1 \leq 4, 0 < \lambda \leq 4, 4\lambda_1 \geq \lambda^2 \}.$$

В [2, с. 178] сформулированы условия (в виде теоремы 8.1), при которых происходят бифуркации рождения циклов в семействе гладких одномерных отображений, гладко зависящих от одного параметра. Хотя семейство отображений $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ зависит от двух параметров, используем условия этой теоремы для обнаружения бифуркаций рождения новых точек и в нашем случае.

Неподвижные точки x отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, в которых возможны бифуркации рождения новых неподвижных точек ($x \neq 0$ и $x \neq 1$, иначе $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x = 0$), должны удовлетворять уравнению

$$\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x = x,$$

а также уравнению

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})'_x = +1,$$

которое означает, что мультипликатор в неподвижной точке при бифуркационных значениях параметров (λ_1, λ) (производная по x функции $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x$) равен $+1$.

Запишем оба этих уравнения в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x = x, \\ (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})'_x = 1 \end{cases}$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} \lambda^2(1 - \psi_{\lambda_1} x)(1 - x)x = x, \\ \lambda^2(1 - 2\psi_{\lambda_1} x)(1 - 2x) = 1. \end{cases}$$

Решая систему (сокращая на $x \neq 0$ обе части первого уравнения и вычитая из него второе уравнение), получим уравнение, не содержащее λ^2 ,

$$(1 - \psi_{\lambda_1} x)(1 - x) - (1 - 2\psi_{\lambda_1} x)(1 - 2x) = 0.$$

После несложных преобразований окончательно получим квадратное уравнение

$$3\lambda_1 x^2 - 4\lambda_1 x + \lambda_1 + 1 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{d}, \quad d = 1 - \frac{3}{\lambda_1}.$$

Обозначим $x_1(\lambda_1) = 2/3 + 1/3\sqrt{d}$ и $x_2(\lambda_1) = 2/3 - 1/3\sqrt{d}$. Проанализируем полученное уравнение.

При $\lambda_1 < 3$ имеем $d < 0$ и, следовательно, действительных корней нет. Это означает, что неподвижные точки отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, в которых возможны бифуркации рождения новых неподвижных точек, появляются, начиная с $\lambda_1 \geq 3$.

При $\lambda_1 = 3$ имеем $x_1 = x_2 = 2/3$ и $\lambda = 3$ (которое определяется из первого уравнения системы или из второго).

При $\lambda_1 > 3$ имеем $d > 0$ и значит, для каждого значения λ_1 существуют два решения $x_1 \neq x_2$. При заданном значении $\lambda_1 \geq 3$ неподвижным точкам $x_{1,2}$ соответствуют следующие значения параметра λ (которые можно найти как из первого, так и из второго уравнений системы):

$$\lambda^{(1,2)} = 1/\sqrt{(1 - \psi_{\lambda_1} x_{1,2})(1 - x_{1,2})}.$$

Здесь $\lambda^{(i)}$ соответствует решению x_i , $i = 1, 2$. (Знаменатель данного выражения отличен от нуля всюду на интервале $(0, 1)$ за исключением точки $x = 1/2$ при $\lambda = 4$.)

Подставляя вместо $x_{1,2}$ их значения, получим выражения для $\lambda^{(1,2)}$, как функций от λ_1 .

На рис. 1 приведены графики функций $x_{1,2}(\lambda_1)$ и $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$.

Таким образом, в неподвижных точках отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, где возможны бифуркации рождения новых точек, семейство отображений $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ можно рассматривать как однопараметрическое, зависящее от параметра λ_1 .

Остается проверить еще два условия теоремы 8.1 из [2, с. 178], при которых происходят бифуркации рождения новых неподвижных точек в неподвижных точках $x_{1,2}$ при $3 \leq \lambda_1 \leq 4$ и $\lambda^{(1,2)}$ как функций от λ_1 .

Эти условия состоят в оценке знаков следующих выражений:

$$1) (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x)''_{x^2}, \quad 2) \frac{d}{d\lambda_1} (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x).$$

В «1» оценивается знак второй производной по x , а в «2» – знак производной по λ_1 функции $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$.

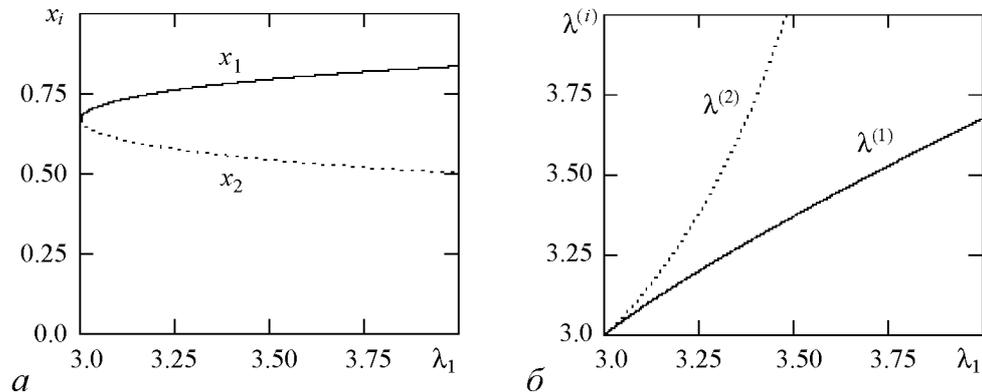


Рис. 1. Графики функций: $a - x_i(\lambda_1)$, $b - \lambda^{(i)}(\lambda_1)$

На самом деле, оказывается достаточно оценить знак произведения этих выражений:

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x)''_{x^2} \cdot \frac{d}{d\lambda_1} (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x)$$

в неподвижных точках $x = x_{1,2}$ при $\lambda_1 \geq 3$ и $\lambda = \lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$.

Нетрудно вычислить значения этих выражений

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x)''_{x^2} = 2\lambda^2(6\psi_{\lambda_1} x - \lambda_1 - 1),$$

$$\frac{d}{d\lambda_1} (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x) = \psi_{\lambda} x (2\lambda'_{\lambda_1} (1 - \psi_{\lambda_1} x) - \psi_{\lambda} x),$$

где λ'_{λ_1} – производная функции λ по λ_1 .

Таким образом, необходимо оценить знаки двух выражений

$$(\lambda^{(i)})^2 (6\psi_{\lambda_1} x_i - \lambda_1 - 1) \psi_{\lambda^{(i)}} x_i (2(\lambda^{(i)})'_{\lambda_1} (1 - \psi_{\lambda_1} x_i) - \psi_{\lambda^{(i)}} x_i), \quad i = 1, 2.$$

Для оценки знаков этих выражений были построены их графики (как функций от λ_1), которые показали, что одно из произведений положительно (в точке x_1 при $\lambda = \lambda^{(1)}$), а другое отрицательно (в точке x_2 при $\lambda = \lambda^{(2)}$) при всех значениях параметра $\lambda_1 > 3$. При $\lambda_1 = \lambda = 3$ в точке $x = 2/3$ оба произведения равны нулю. В этом случае теорема 8.1 из [2] утверждает, что при $\lambda_1 > 3$ в достаточно малой положительной окрестности ε_1 неподвижной точки x_1 две новых неподвижных точки (одна из которых притягивающая, а другая – отталкивающая) появляются при уменьшении параметра λ_1 (и при его увеличении новых точек не возникает) и в достаточно малой положительной окрестности ε_2 неподвижной точки x_2 новые точки возникают при увеличении параметра λ_1 (и при уменьшении параметра λ_1 новых точек не возникает). (При построении графиков была использована аппроксимационная формула первого порядка для вычисления производной λ'_{λ_1} : $\lambda'_{\lambda_1} \approx [\lambda(\lambda_1 + h_\lambda) - \lambda(\lambda_1)]/h_\lambda$, где h_λ – шаг по λ_1 .)

Чтобы понять суть происходящих бифуркаций, обратимся к виду поверхности неподвижных точек.

В работе [5] установлено, что поверхность неподвижных точек отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ является многообразием катастрофы в пространстве $(x\lambda_1\lambda)$ [4, с. 107], поскольку точки этой поверхности удовлетворяют уравнению

$$\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x = x,$$

которое после несложных преобразований приводится к кубическому уравнению

$$x^3 + P(\lambda_1)x + Q(\lambda_1, \lambda) = 0.$$

Здесь $P(\lambda_1) = 1/\lambda_1 - 1/3$, $Q(\lambda_1, \lambda) = 2/27 + 1/\lambda_1 \cdot (1/\lambda^2 - 1/3)$.

Дискриминант полученного кубического уравнения имеет вид

$$D(\lambda_1, \lambda) = -108(Q^2/4 + P^3/27),$$

а уравнение $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ задает так называемое *бифуркационное множество (параметров)*, которое является образом *кривой складок* (в точках которой на многообразии катастрофы касательная плоскость вертикальна) при проектировании поверхности неподвижных точек на область параметров Λ по правилу $(x\lambda_1\lambda) \rightarrow (\lambda_1\lambda)$.

Линия $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ представляет собой полукубическую параболу с вершиной в точке $(\lambda_1, \lambda) = (3; 3)$ и расположена в области параметров $\lambda_1, \lambda \geq 3$.

Сравнивая графики функций $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$ с линией уровня $D(\lambda_1, \lambda) = 0$, видим, что функции $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$ и $D = 0$ задают одну и ту же кривую в плоскости (λ_1, λ) , то есть задают бифуркационное множество параметров.

Таким образом, (единственным!) множеством неподвижных точек отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, в которых происходят бифуркации рождения новых неподвижных точек, является кривая складок на многообразии катастрофы (попутно мы определили явный вид бифуркационного множества).

Из непрерывной зависимости функций $x_{1,2}(\lambda_1)$ и $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 \geq 3$) следует, что бифуркации рождения новых неподвижных точек происходят во всех точках на кривой складок (за исключением начала кривой складок) при всех значениях параметров (λ_1, λ) из бифуркационного множества (за исключением точки сборки) и в других неподвижных точках отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ новые неподвижные точки путем бифуркации рождения не появляются.

Теперь становится понятным, в каких неподвижных точках отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ происходят бифуркации рождения новых точек и где они расположены на многообразии катастрофы.

Графики функций $x_{1,2}(\lambda_1)$ и $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$ показывают, что в области параметров $(\lambda_1, \lambda) \geq (3, 3)$ нижний лист многообразия катастрофы подворачивается, образуя кривую складок, на линии $\lambda^{(2)}$ (здесь два совпадающих корня кубического уравнения x меньше третьего), затем выше расположен средний лист, который, подворачиваясь на кривой складок, соответствующей линии $\lambda^{(1)}$ (здесь два совпадающих корня кубического уравнения x больше третьего), переходит в верхний лист.

При этом неустойчивые неподвижные точки отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ расположены на среднем листе, а устойчивые – на верхнем и нижнем листах многообразия катастрофы [4, с. 113].

Таким образом, новые неподвижные точки путем бифуркации рождения возникают *при уменьшении параметра* λ_1 на кривой складок, соответствующей линии $\lambda^{(1)}$, в окрестности $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1)$ точки x_1 , при этом устойчивая (притягивающая) неподвижная точка располагается на верхнем листе многообразия катастрофы и неустойчивая (отталкивающая) – на среднем. На кривой складок, соответствующей линии $\lambda^{(2)}$, новые неподвижные точки путем бифуркации рождения возникают при увеличении параметра λ_1 в окрестности $(x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2)$ точки x_2 , при этом устойчивая неподвижная точка располагается на нижнем листе многообразия катастрофы и неустойчивая – на среднем.

Обнаруженный тип бифуркаций имеет наглядное подтверждение, если обратиться к одномерным бифуркационным диаграммам для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ при фиксированном параметре λ и меняющемся вдоль оси x параметре λ_1 , $\lambda^2/4 \leq \lambda_1 \leq 4$. По оси y откладываются значения переменной $x \in I$, расположенные на аттракторе, которые получаются при итерациях отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$.

На рис. 2 приведены одномерные бифуркационные диаграммы для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$. Одномерная бифуркационная диаграмма строится для фиксированной начальной точки $x \in (0, 1)$.

На рис. 2, а при значениях параметров $(\lambda_1, \lambda^{(2)}(\lambda_1)) \approx (3.149, 3.2)$ из бифуркационного множества наблюдается разрыв в положении неподвижной точки

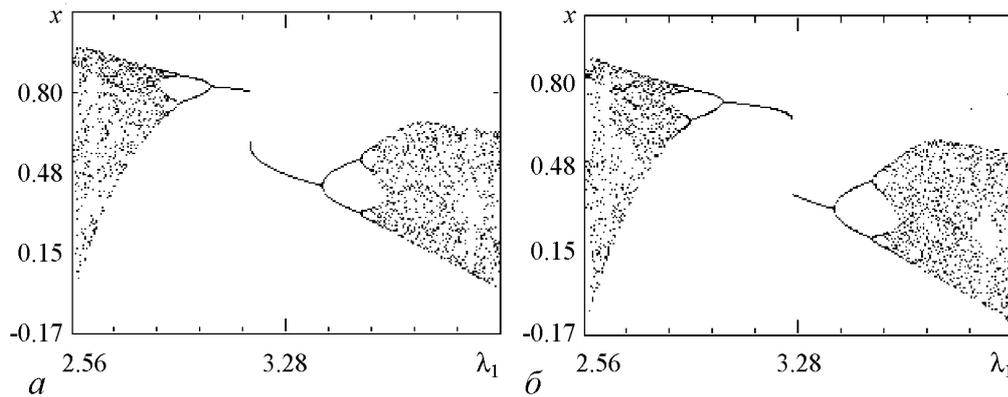


Рис. 2. Одномерные бифуркационные диаграммы для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ при $\lambda = 3.2$, $2.56 \leq \lambda_1 \leq 4$ для начальных точек x : $a - 0.55$; $b - 0.85$

$x_2(3.149) \approx 0.594$, расположенной на кривой складок. В этой точке происходит бифуркация рождения двух новых неподвижных точек, одну из которых (притягивающую) мы наблюдаем в качестве аттрактора при $\lambda_1 > 3.149$. Эта новая точка расположена на нижнем листе многообразия катастрофы. При дальнейшем увеличении параметра λ_1 наблюдаются бифуркации удвоения периода притягивающих циклов и (возможный) переход в хаос. При $\lambda_1 < 3.149$ также наблюдается неподвижная точка в качестве аттрактора, но она уже расположена на верхнем листе многообразия катастрофы, поскольку точки нижнего листа отсутствуют при $\lambda_1 < 3.149$. Однако эта неподвижная точка согласно полученному в данной статье результату не появляется путем бифуркации рождения новых неподвижных точек из точки на кривой складок при $(\lambda_1, \lambda^{(2)}(\lambda_1)) \approx (3.149, 3.2)$.

Аналогичная одномерная бифуркационная картина наблюдается на рис. 2, б, но разрыв в положении неподвижной точки приходится уже на значения параметров $(\lambda_1, \lambda^{(1)}(\lambda_1)) \approx (3.252, 3.2)$ из бифуркационного множества. В неподвижной точке $x_1(3.252) \approx 0.759$, расположенной на кривой складок, происходит бифуркация рождения двух новых неподвижных точек, одну из которых (притягивающую) мы наблюдаем в качестве аттрактора при $\lambda_1 < 3.252$ и расположена она на верхнем листе многообразия катастрофы. Данная одномерная бифуркационная картина с точностью до изоморфизма повторяет одномерную бифуркационную картину, представленную на рис. 2, а, но при уменьшении параметра λ_1 , и ее описание аналогично. Наблюдаемая в качестве аттрактора неподвижная точка при $\lambda_1 > 3.252$, расположенная на нижнем листе многообразия катастрофы, также не появляется путем бифуркации рождения новых неподвижных точек из точки на кривой складок при $(\lambda_1, \lambda^{(1)}(\lambda_1)) \approx (3.252, 3.2)$.

Еще две одномерные бифуркационные диаграммы для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ при $\lambda = 3.5$, $3.063 \leq \lambda_1 \leq 4$ представлены на рис. 3.

На рис. 3, а при значении параметров $(\lambda_1, \lambda^{(2)}(\lambda_1)) \approx (3.305, 3.5)$ из бифуркационного множества наблюдается смена типа аттрактора: неподвижная точка $x_2(3.305) \approx 0.565$, расположенная на кривой складок, при $\lambda_1 < 3.305$ сменяется другим типом динамики – (возможным) нерегулярным поведением. В самой же точке x_2 происходит бифуркация рождения двух новых неподвижных точек, одна из кото-

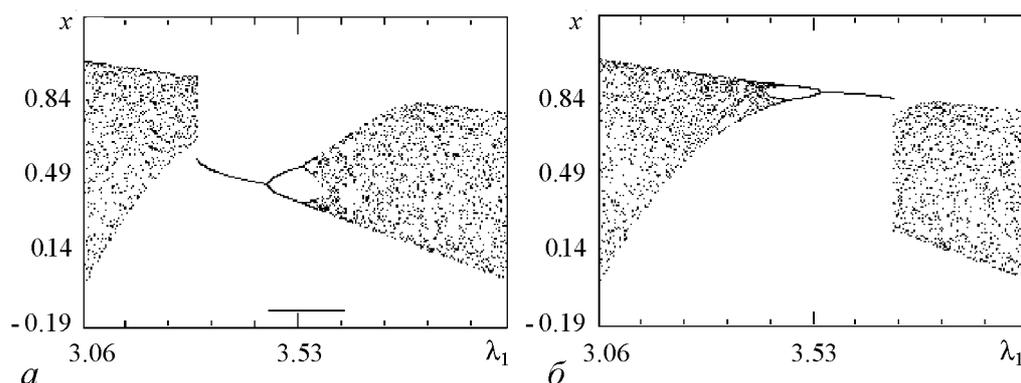


Рис. 3. Одномерные бифуркационные диаграммы для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ при $\lambda = 3.5$, $3.06 \leq \lambda_1 \leq 4$ для начальных точек x : $a - 0.5$; $b - 0.8$

рых (притягивающая) наблюдается в качестве аттрактора при $\lambda_1 > 3.305$ на нижнем листе многообразия катастрофы. При дальнейшем увеличении параметра λ_1 снова наблюдаются бифуркации удвоения периода притягивающих циклов и (возможный) переход в хаос.

Аналогичную смену типа аттрактора, но при уменьшении параметра λ_1 , наблюдаем на рис. 3, б при значении параметров $(\lambda_1, \lambda^{(1)}(\lambda_1)) \approx (3.706, 3.5)$ из бифуркационного множества: неподвижная точка $x_1(3.706) \approx 0.812$, расположенная на кривой складок, сменяется другим типом динамики (возможно, хаотическим), при этом в самой точке x_1 происходит бифуркация рождения двух новых неподвижных точек, одна из которых (притягивающая) наблюдается в качестве аттрактора при $\lambda_1 < 3.706$ на верхнем листе многообразия катастрофы.

4. Бифуркации циклов периода 2 отображения f

Используем полученный для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ результат по бифуркациям рождения новых точек для описания возникающих типов бифуркаций циклов периода 2 в семействе отображений f с двухпараметрической динамикой.

Очевидно, что для заданного отображения f параметр λ фиксирован: $\lambda = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ и $\min\{a_1, a_2\} \leq \lambda_1 \leq \max\{a_1, a_2\}$.

Определим значение λ , при котором ветви кубической параболы, задающей бифуркационное множество параметров, пересекаются с границей области Λ (см. рис. 1, б). Подставляя значение $\lambda_1 = 4$ в формулу $\lambda = \lambda^{(1)}(\lambda_1)$, получим $\lambda = \lambda_V$, где $\lambda_V = 3\sqrt{3/2} \approx 3.674$. При этом же значении $\lambda = \lambda_V$ вторая ветвь $\lambda = \lambda^{(2)}(\lambda_1)$ кубической параболы пересекает границу области Λ при значении $\lambda_1 \approx 3.375$. Более того, прямая $\lambda = \text{const}$, $3 \leq \lambda \leq \lambda_V$, пересекает ветви кубической параболы в двух точках при значениях параметра λ_1 , например, λ'_1, λ''_1 так, что выполнено равенство $\lambda'_1 \lambda''_1 = \lambda^2$.

Тогда двухпараметрическое семейство отображений f можно разделить на две части. Первой части принадлежат отображения f со значениями λ из промежутков $(0, 3] \cup [\lambda_V, 4]$, у которых из циклов периода 2 возможно появление только циклов периода 4 путем бифуркации удвоения периода. Второй части принадлежат отобра-

жения f со значениями λ из промежутка $(3, \lambda_V)$, у которых существуют как циклы периода 2, в которых путем бифуркации удвоения периода появляются циклы периода 4, так и циклы периода 2, в которых путем бифуркации рождения появляются два новых цикла периода 2 (один из них притягивающий, а другой – отталкивающий).

Заключение

Двумерное логистическое отображение с неотрицательной матрицей (параметров) циклического вида – это единственный случай, когда динамика отображения является двухпараметрической (отображения последования для него представимы в виде суперпозиции двух одномерных логистических отображений с двумя параметрами). Отображения с неотрицательными матрицами другого вида имеют однопараметрическую динамику (отображения последования линейно изоморфны однопараметрическим одномерным логистическим отображениям).

Поэтому можно сказать, что в семействе двумерных логистических отображений с произвольной неотрицательной матрицей параметров (размерности 2×2) отображения с двухпараметрической динамикой образуют множество меры нуль (в четырехмерной области параметров параметры отображений с двухпараметрической динамикой «заметают» двумерную (плоскую) область нулевого «объема»). Однако именно эти отображения демонстрируют качественно отличающиеся от одномерного однопараметрического случая свойства. Одним из таких свойств является изученная в данной статье бифуркация рождения новых циклов в циклах периода 2.

Обнаружено, что в семействе двумерных логистических отображений с двухпараметрической динамикой существует множество отображений (ненулевой меры), имеющих как циклы периода 2, в которых путем бифуркации удвоения периода появляются циклы периода 4, так и циклы периода 2, в которых путем бифуркации рождения появляются два новых цикла периода 2.

Работа выполнена в рамках ПФИ Ф0369 «Фундаментальные вопросы физики, математики, механики и информатики».

Библиографический список

1. Панкратова И.Н. О предельных множествах многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995.
2. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова Думка, 1989.
3. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343.
4. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
5. Панкратова И.Н. Представление многогрупповой популяционной модели в виде одногрупповой модели со многими параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 5–6. С. 135.

6. *Leslie P.H.* The use of matrices in certain population mathematics // *Biometrika*. 1945. Vol. 33. P. 183.
7. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических популяций. М.: Наука, 1978.
8. *Caswell H.* Matrix population models: construction, analysis and interpretation. Sunderland, Massachusettes, USA: Sunauer Associates Inc. 1989.
9. *Логофет Д.О.* Еще раз о нелинейной модели Лесли: асимптотическое поведение траекторий в примитивном и импримитивном случаях // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1077.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

*Институт математики
министерства образования и науки
РК Алматы, Казахстан*

*Поступила в редакцию 29.11.2007
После доработки 24.04.2008*

HOPF BIFURCATIONS OF CYCLES OF PERIOD TWO OF TWO-DIMENSIONAL LOGISTIC MAP

I.N. Pankratova

Maps having cycles of period two in which Hopf bifurcations of new cycles occur are localized in the family of two-dimensional logistic maps. For the purposes of illustration of the bifurcation property one-dimensional sections of bifurcation diagrams with one fixed parameter for two-parameters' first-return maps of two-dimensional logistic maps are given.



Панкратова Ирина Николаевна – родилась в 1958 году, окончила математический факультет Казахского государственного университета им. С.М.Кирова в 1980 году. Работает в институте математики МОН РК в должности ведущего научного сотрудника, кандидат физико-математических наук (1994). Имеет более 60 научных публикаций. Область научных интересов: многомерная многопараметрическая нелинейная динамика и ее применения в биологии и других областях науки.

E-mail: irina.pankratova@math.kz