



СИСТЕМЫ БИЛЬЯРДНОГО ТИПА И УСКОРЕНИЕ ФЕРМИ

А.Ю. Лоскутов, А.Б. Рябов

В работе описаны системы бильярдного типа с возмущаемыми границами. Рассмотрены обобщенный рассеивающий бильярд – газ Лоренца с открытым горизонтом, и фокусирующий бильярд типа «стадион». Аналитически и численно показано, что, когда бильярд обладает свойством развитого хаоса, следствием колебаний его границ является ускорение Ферми. Однако возмущение бильярдной системы, близкой к интегрируемой, приводит к новому интересному явлению – разделению частиц по скоростям. Это заключается в том, что, если начальная скорость частиц превышает некоторую критическую величину, характерную для данной геометрии бильярда, то частицы ускоряются. Если же начальная скорость ниже критической, то бильярдные частицы замедляются. Описаны зависимости эффекта разделения от характерных параметров бильярда и частоты колебаний границ.

Введение

Математически плоский бильярд представляет собой обычный бильярд, только с произвольной конфигурацией стола и без луз. Хотя, строго говоря, бильярды относятся к сильно упрощенным моделям классической статистической механики, имеется естественная аналогия между некоторыми физическими задачами и системами бильярдного типа [1, 2].

В общем случае бильярдная система может быть описана следующим образом. Бильярдным столом Q является область M с кусочно-гладкой границей ∂Q . Бильярдная динамическая система в M порождается свободным движением материальной точки (бильярдного шара) с условием упругого отражения от ∂Q . Это означает, что точка всегда движется по прямым в M с постоянной скоростью до соударения с границей. Если граница в точке соударения гладкая, то шар отражается от нее так, что тангенциальная компонента скорости не изменяется, в то время как нормальная составляющая изменяет знак. Если шар попадает в угол, то его дальнейшее движение определено неоднозначно или же не определено совсем.

Как правило, граница каждого бильярда состоит из m компонентов ∂Q_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Точки сшивки компонентов ∂Q_i называются особыми. Остальные точки q – регулярными. Если для каждого компонента ∂Q_i рассмотреть единичные нормали $\mathbf{n}(q)$ в каждой точке $q \in \partial Q_i$, направленные внутрь области Q , то они будут определять кривизну $k(q)$ кривой ∂Q_i во всех регулярных точках q . Компонент

∂Q_i является *рассеивающим*, если $k(q) > 0$. Для $k(q) = 0$ и $k(q) < 0$ получим соответственно *нейтральный* и *фокусирующий* компоненты границы бильярда. Таким образом, каждый из компонентов границы может быть рассеивающим, фокусирующим или нейтральным.

Если граница состоит только из рассеивающих и нейтральных компонентов, такой бильярд называется *рассеивающим* (или бильярдом Синая). Одной из разновидностей рассеивающего бильярда является так называемый газ Лоренца. На его основе удается получить ряд строгих и очень глубоких результатов.

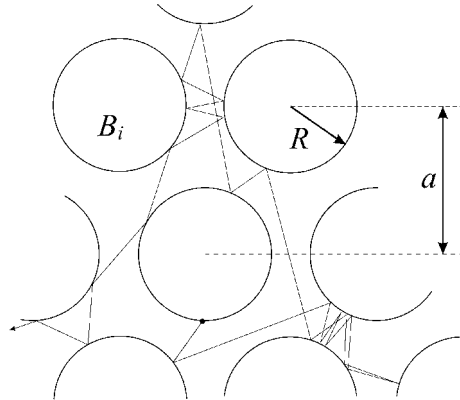


Рис. 1. Двумерный газ Лоренца с периодическим расположением рассеивателей на треугольной решетке

Рассмотрим неограниченную область D в евклидовом пространстве. Допустим, что в этой области находятся определенным образом расположенные непересекающиеся диски B_i (рассеиватели) радиуса R (рис. 1). При условии, что рассеиватели неподвижны, такая система, очевидно, будет бильярдной. Она называется *газом Лоренца*: частица движется между рассеивателями, упруго отражаясь от них. Впервые газ Лоренца был введен в связи с проблемой описания движения электронов в металлах (см. [3]).

При периодическом расположении рассеивателей с периодом a одним из основных параметров газа Лоренца является соотношение между a и R . Если $R \leq a/2$, то говорят, что бильярд имеет бесконечный горизонт. При $R \geq a/\sqrt{3}$ движение частицы ограничено одной ячейкой, так что система имеет ограниченный горизонт. Если же $a/2 < R < a/\sqrt{3}$, то свободный пробег частицы ограничен, но она может свободно перемещаться по пространству. В этом случае газ Лоренца имеет открытый горизонт.

При периодическом расположении рассеивателей с периодом a одним из

основных параметров газа Лоренца является соотношение между a и R . Если $R \leq a/2$, то говорят, что бильярд имеет бесконечный горизонт. При $R \geq a/\sqrt{3}$ движение частицы ограничено одной ячейкой, так что система имеет ограниченный горизонт. Если же $a/2 < R < a/\sqrt{3}$, то свободный пробег частицы ограничен, но она может свободно перемещаться по пространству. В этом случае газ Лоренца имеет открытый горизонт.

Для бесконечного горизонта из-за увеличения вероятности длинных перелетов изменяются статистические свойства бильярда. В частности, замедляется скорость убывания корреляций и не сходится среднее значение длины свободного пробега [4–8]. В то же время, для газа Лоренца с ограниченным и открытым горизонтом наблюдается экспоненциальный спад корреляций. Кроме того, было доказано, что в двумерном плоском случае движение частицы является эргодическим, обладает свойством перемешивания и, более того, сводится к броуновскому. Также в такой системе существует и положителен коэффициент диффузии [5]. Это явилось первым строгим подтверждением рождения хаоса в динамических системах.

Бильярд, граница которого состоит только из фокусирующих или нейтральных и фокусирующих компонентов, называется *фокусирующим*. Самым популярным примером такого бильярда является «стадион», граница которого состоит из двух фокусирующих компонентов и двух параллельных отрезков, соединяющих концы этих компонентов (рис. 2). Несмотря на наличие фокусирующих компонентов, для такого бильярда тоже характерно свойство перемешивания. Это связано с тем, что параллельные лучи после прохождения точки фокусировки начинают расходиться.

Достаточно общие условия существования хаотичности в двумерных бильярдах на плоскости описаны в работе [9] (см. также данную там литературу).

Естественным обобщением бильярдных систем являются бильярды, границы которых могут изменяться с течением времени, то есть осциллировать. К моделям такого типа сводятся некоторые важные проблемы математической физики. Например, анализ движения частиц внутри возмущенных ядер привел к необходимости изучения квадрупольных или «динамических» резонансов. В таких задачах рассматривалось столкновение частиц с движущимися границами (полями) и, как следствие, обмен энергиями. В физике плазмы ускорение в магнитных ловушках моделируется бильярдами с изменяющейся во времени границей. Наконец, если рассматривать газ Лоренца как физическую систему, то рассеиватели должны слегка «дрожать» с небольшой амплитудой вблизи своего равновесного состояния.

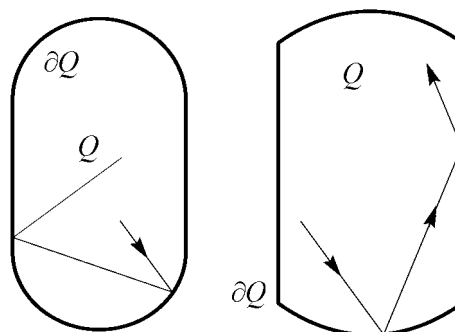


Рис. 2. Бильярд с границей в форме стадиона

В бильярдах с осциллирующими границами величина скорости шара меняется от столкновения к столкновению. При единичных актах столкновения шар приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движутся ли шар и граница навстречу друг другу (имеет место *встречное* столкновение), или же шар нагоняет границу (происходит *сопутствующее* столкновение). Возникает важный вопрос, каких столкновений больше, то есть как будет в среднем меняться модуль скорости шара со временем?

Оказывается, здесь первостепенную роль играют динамические свойства бильярда: если он обладает развитым хаосом, то возмущение границы может привести к неограниченному росту скорости частицы. С другой стороны, бильярд с достаточно гладкой границей (например, в форме эллипса или окружности) не хаотичен, и ее колебания не приводят к ускорению бильярдной частицы. Однако самый интересный и неожиданный эффект наблюдается в промежуточном случае, когда бильярдная система близка к интегрируемой, так что в фазовом пространстве существуют хаотические слои, окруженные инвариантными кривыми (что возможно в случае «стадиона»). Тогда в зависимости от начальных условий бильярдная частица будет либо ускоряться, либо замедляться.

Данная работа посвящена исследованию динамики частиц в рассеивающих бильярдах типа газа Лоренца и фокусирующих бильярдах типа «стадион», граница которых изменяется со временем по некоторому закону.

1. Ускорение Ферми и бильярды с осциллирующими границами

Первоначально проблема ускорения частиц до чрезвычайно высоких энергий была рассмотрена Энрико Ферми [10]. Им был предложен механизм, основанный на статистике столкновений космических лучей (заряженных частиц) с беспорядочно движущимися макрообъектами (магнитными облаками). Идея состояла в том, что

при таких столкновениях частицы должны в среднем ускоряться. Именно, если скорости облаков, с которыми сталкивается частица, распределены случайно, то можно сказать, что число облаков, движущихся в одном направлении, равно числу облаков, движущихся в обратном направлении. Поэтому частица будет чаще сталкиваться с теми из них, которые движутся ей навстречу. Отсюда следует, что частица чаще будет приобретать энергию, чем отдавать ее. Так возникает эффективное ускорение, называемое *ускорением Ферми*.

Природа описанного механизма может быть исследована при помощи анализа достаточно простых систем. Так, в 1960 году С. Улам [11] предложил модель, которая позже была названа моделью Ферми–Улама: упругий шарик движется между двумя тяжелыми параллельными пластинами, каждая из которых совершает колебания по определенному закону, или одна неподвижна, а вторая осциллирует. Эта и некоторые другие модели [12–19] были призваны в той или иной степени объяснить происхождение ускорения Ферми.

В общем случае в основе решения проблемы ускорения Ферми лежит анализ динамических систем бильярдного класса, описывающих движение материальной точки внутри некоторой области с границей, осциллирующей по тому или иному закону. В работах [20–22] было проведено исследование бильярдов в форме эллипса и окружности и показано, что, как и в модели Ферми–Улама, рост скорости ограничен. В работе [23] рассмотрен бильярд в области, образованной прямоугольником, углы которого заменены четвертями окружностей радиуса R , а одна из сторон периодически осциллирует. Столкновение с границей не является абсолютно упругим: частица теряет часть своей скорости, пропорциональную некоторой постоянной δ ($\delta \ll 1$). Эта модель близка к модели Ферми–Улама, но наличие скругленных углов вносит элемент случайности в динамику частицы. Исследовался процесс релаксации системы к равновесному состоянию. Аналогичные исследования были проведены ранее в работах [24, 25] на модели Ферми–Улама. Как было найдено, в модели Ферми–Улама величина $\Pi(t) = E(t) - E(\infty)$, представляющая собой отклонение средней энергии системы от ее равновесного значения, убывает экспоненциально, то есть $\Pi(t) \sim \exp(-t/\tau)$, что, вообще говоря, естественно для большинства физических систем. Однако анализ показал [23], что релаксация системы к равновесию происходит медленнее, а $\Pi(t) \sim \exp(-(t/\tau)^\beta)$, где $\beta < 1$, причем значение β уменьшается с ростом R .

Результаты работ [26, 27] прояснили причину уменьшения скорости релаксации системы. С увеличением радиусов дуг растет степень хаотичности, что приводит к ускорению частиц. Поэтому релаксация системы к равновесному состоянию, связанная с наличием диссипации энергии частиц, будет происходить медленнее. Такой подход дает возможность определить величину β и, соответственно, скорость релаксации к равновесию систем, в которых хаотическая динамика является доминирующей.

В работах [26, 27] аналитически и численно было показано, что возмущение границ газа Лоренца приводит к ускорению Ферми. При этом газ Лоренца был исследован в двух различных вариантах: со стохастически и регулярно осциллирующими рассеивателями. Поскольку число столкновений и время не пропорциональны друг другу (за одно и то же время «быстрая» частица испытывает больше соударений, чем «медленная»), была найдена средняя скорость в зависимости от времени t и числа столкновений n (рис. 3). Для численного анализа было построено 5000 реали-

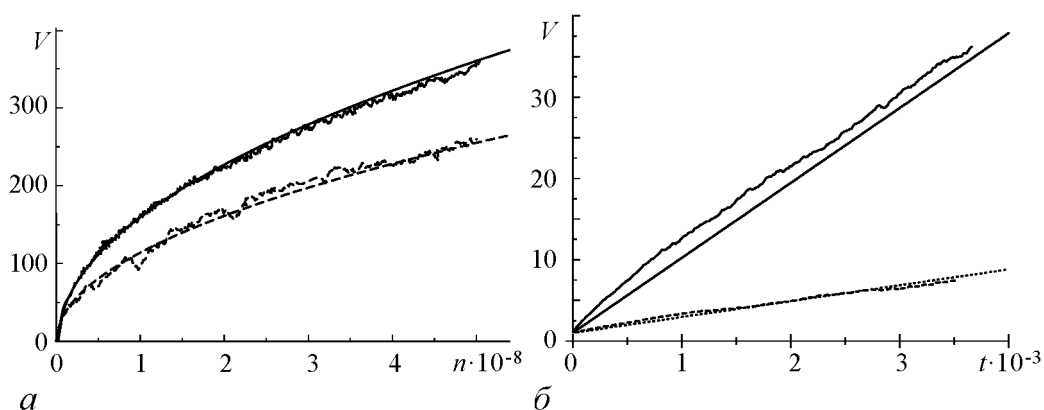


Рис. 3. Зависимости средней скорости частиц V в газе Лоренца от числа столкновений (а) и от времени (б). На обоих графиках сплошные линии отвечают регулярному случаю возмущения границы, а пунктир – стохастическому. Аналитические результаты соответствуют плавным кривым, численные – ломаным

заций динамики бильярдной частицы, которые отличались друг от друга начальными значениями величины вектора скорости \mathbf{V} и его направления, которые выбирались случайным образом.

Результаты этих исследований привели к обнаружению двух основных механизмов ускорения, которые были выявлены при выводе распределения частиц по скоростям в зависимости от числа столкновений в случае стохастических колебаний границ. Во-первых, это механизм, возникающий вследствие выполнения соотношения $\langle \Delta V \rangle > 0$ и приводящий к сносу всех частиц в направлении положительных скоростей. Во-вторых, это дисперсионный (или флуктуационный) механизм, проявляющийся по двум причинам: $\langle \Delta V^2 \rangle > 0$ и поэтому вероятностный пакет «расплывается» со временем; модуль скорости не может быть отрицательным и, таким образом, расплывание пакета не симметрично, а направлено в сторону бóльших скоростей. При этом флуктуации и среднее увеличение скорости частицы выше в случае регулярных колебаний границ рассеивателей, что приводит к большему росту скорости. Таким образом, можно также говорить о механизме, обусловленном корреляциями между последовательными изменениями скорости.

Более того, рассуждения, используемые при выводе зависимости скорости частицы от числа соударений и времени, легко перенести на любой другой бильярд, для которого известно вероятностное распределение угла между нормалью к поверхности в точке соударения и скоростью частицы. Поэтому развитая в данных работах техника оказалась очень полезной при изучении проблемы ускорения Ферми в других рассеивающих бильярдах.

На основании проведенных исследований авторами работ [26,27] было выдвинуто предположение, что для возникновения ускорения Ферми в бильярде с осциллирующими границами достаточно, чтобы при фиксированной границе такой бильярд обладал хаотической динамикой. Эта гипотеза поддерживалась рядом исследователей [28–31] и недавно получила частичное обоснование посредством использования термодинамического подхода [32].

В общем случае, однако, ситуация оказывается значительно сложнее: в некоторых бильярдах, например, в форме стадиона, когда кривизна фокусирующих компонентов мала (см. правый бильярд на рис. 2), при определенных начальных скоростях ускорение не наблюдается [33]. При других же значениях начальной скорости в бильярде той же конфигурации возникает эффективное ускорение. Этот интересный и неожиданный эффект позволяет предложить метод разделения частиц разреженного газа по скоростям: для этого достаточно слабого периодического внешнего воздействия на стенки сосуда. В определенном смысле этот эффект можно назвать бильярдным демоном Максвелла, когда посредством слабого влияния на систему можно сортировать быстрые и медленные частицы.

2. Бильярд типа «стадион»

Механизмы возникновения хаоса в рассеивающих и фокусирующих бильярдах различны. В первом случае два близких пучка частиц, попав на рассеивающий компонент границы, начинают сразу расходиться. Во втором случае после отражения от фокусирующего компонента два близких пучка сходятся до точки пересечения. Хаос в таком бильярде возникает, если время, в течение которого пучки сходятся, меньше времени расхождения.

Сначала рассмотрим бильярд с невозмущенными границами и сравним результаты точного и приближенного анализа в предположении, что кривизна фокусирующих компонентов мала (рис. 4, *a*)

$$l \gg a \gg b . \quad (1)$$

Это позволит более полно понять динамику бильярдной частицы. Пусть фокусирующие компоненты представлены дугами окружности радиуса R и угловой меры 2Φ , симметричными относительно вертикальной оси бильярда (см. рис. 4, *a*). Из геометрических соображений вытекают следующие соотношения:

$$R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}; \quad \Phi = \arcsin \frac{a}{2R} . \quad (2)$$

Условие стохастичности для такого бильярда выполнено, если дуга, дополняющая фокусирующий компонент до полной окружности, принадлежит области Q (см. [4]). При $b \ll a$ это дает

$$\frac{l}{2R} \approx \frac{4bl}{a^2} > 1 . \quad (3)$$

Введем динамические переменные, как показано на рис. 4. Положительным направлением для углов φ_n и α_n^* примем направление против часовой стрелки, а для угла α_n – по часовой. Если граница бильярда неподвижна, то угол падения α_n^* равен углу отражения α_n . Пусть V_n – скорость частицы, а t_n – время n -го столкновения с границей.

Построим *точное отображение*, описывающее динамику частицы в таком бильярде. Для этого необходимо рассмотреть два случая: после очередного столкновения с фокусирующим компонентом границы частица сталкивается с ним же (парные

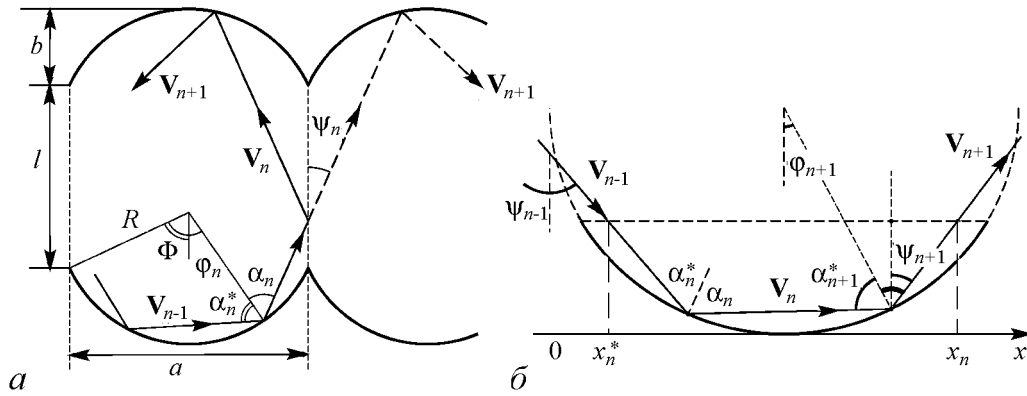


Рис. 4. К построению отображения для бильярда типа «стадион»

столкновения, рис. 4, б), либо следующее столкновение происходит с другим фокусирующим компонентом. В случае парных столкновений простые геометрические рассуждения [33] приводят к отображению вида

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1}^* &= \alpha_n, \\
 \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^*, \\
 \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi}, \\
 t_{n+1} &= t_n + \frac{2R \cos \alpha_n}{V_n}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Если $|\varphi_{n+1}| < \Phi$, то частица продолжает каскад столкновений с одной границей. В противном случае $(n + 1)$ -е столкновение произойдет с другим фокусирующим компонентом.

В случае перехода от одного фокусирующего компонента к другому отображение запишется как

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1}^* &= \arcsin \left[\sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n \right], \\
 \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^*, \\
 \varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^*, \\
 t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены величины $\psi_n = \alpha_n - \varphi_n$, $x_n = R/(\cos \psi_n) [\sin \alpha_n + \sin(\Phi - \psi_n)]$, $x_{n+1}^* = x_n + l \tan \psi_n \pmod{a}$. При выводе данных отображений не использовались никакие упрощающие соотношения. Выражения (4) соответствуют серии последовательных столкновений частицы с одним фокусирующим компонентом, а (4) – переходу от одной границы к другой.

На рис. 5, а представлен фазовый портрет бильярда типа «стадион», задаваемый отображениями (4)–(5). В качестве координаты ξ_n выбиралась величина $\xi_n = 1/2 + (R \sin \varphi_n)/a$, равная нормированной на ширину бильярда проекции точки

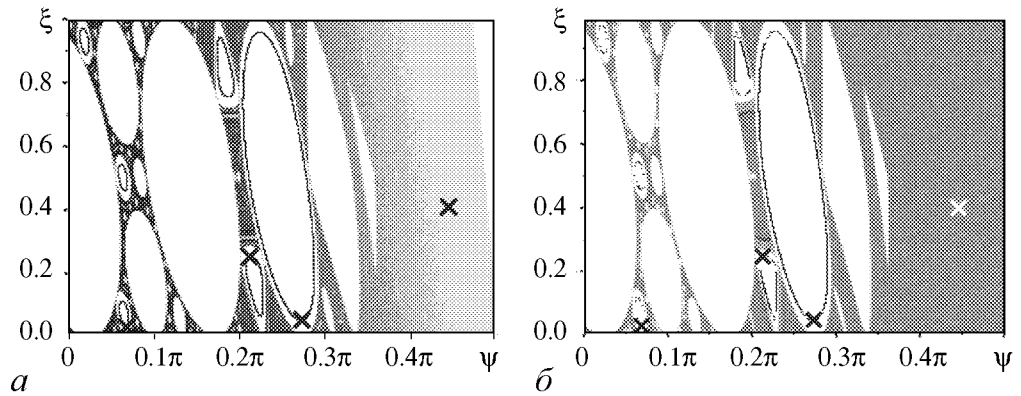


Рис. 5. Фазовый портрет бильярда типа «стадион» с границей в виде дуги окружности (а) и с параболической границей (б) при $a = 0.5$, $b = 0.01$ и $l = 1.0$

столкновения частицы с фокусирующим компонентом на ось Ox . Поскольку бильярд обладает осевой симметрией, то и исследуемые отображения должны обладать симметрией относительно замены $\xi \rightarrow 1 - \xi$, $\psi \rightarrow -\psi$. Следовательно, достаточно получить результаты в области неотрицательных ψ . При численном анализе интервал изменения величин ξ и ψ разбивался на 300×300 ячеек. Интенсивность черного цвета на рисунке пропорциональна числу точек, попавших в данную ячейку. Для построения графика использовались четыре траектории. Одна из них начиналась в стохастической области и включала $5 \cdot 10^8$ итераций. Три другие начинались в регулярной области и содержали по 10^7 итераций. Начальные условия отмечены на графике крестиками. Из рисунка следует, что в системе существуют устойчивые неподвижные точки, окруженные инвариантными кривыми и соответствующие различным резонансам. Динамика частиц в окрестностях этих точек является регулярной, отвечающей движению вдоль таких инвариантных кривых. Области, соответствующие различным резонансам, разделяются сепаратрисами, окруженными стохастическим слоем. Ширина этого слоя определяется величиной нелинейности в системе. Частица, начав свое движение в таком слое, посещает все доступные ей области случайным образом. С ростом нелинейности (то есть параметра b) неподвижные точки могут потерять свою устойчивость, в результате чего образуется область глобальной стохастичности, в которой частице доступно уже все фазовое пространство и она может диффундировать в любом направлении. Таким образом, можно выделить три слоя, в которых динамика системы будет качественно различна.

Для нахождения стационарных точек и анализа их устойчивости используем определенные упрощения в отображении (4)–(5). Аппроксимируем фокусирующий компонент границы бильярда частью параболы, $\chi(x) = 4bx(x - a)/a^2$. В качестве координат выберем угол ψ между вектором скорости и вертикалью, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$, а также величину x – проекцию на ось Ox точки столкновения частицы с границей, $x \in [0, a)$ (рис. 6). Тогда, принимая во внимание приближение (1), найдем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + l \tan \psi_{n+1} \pmod{a}, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n - 2\beta(x_{n+1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\beta(x) = \arctan(\chi'(x))$ – угол наклона касательной в точке столкновения. В этом случае, очевидно, $\beta \approx 4b(2x - a)/a^2$.

Для дальнейших упрощений сделаем замену: $\xi = x/a$, $\xi \in [0, 1]$. В этих переменных отображение примет вид

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \xi_n + \frac{l}{a} \tan \psi_n \pmod{1}, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n - \frac{8b}{a}(2\xi_{n+1} - 1).\end{aligned}\quad (7)$$

Одно из семейств неподвижных точек бильярда, очевидно, можно записать в виде $\{\xi = 1/2, \psi_m = \arctan(ma/l)\}$, $m \in \mathbb{Z}$. Эти точки соответствуют столкновениям частицы с центром дуги. При этом, если $m = 0$, то частица движется строго вертикально, если $m = 1$, то при каждом соударении частица смещается на одну ячейку и т.д. (см. штрихпунктирные линии на рис. 6). Исследуем устойчивость таких точек. Для этого линеаризуем отображение, сделав замену $\xi_n = \Delta\xi_n + 1/2$, $\psi_n = \Delta\psi_n + \arctan(ma/l)$. Тогда, раскладывая в ряд по $\Delta\psi$, найдем

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{n+1} &= \Delta\xi_n + \frac{l}{a \cos^2 \psi_m} \Delta\psi_n + O(\Delta\psi_n^2), \\ \Delta\psi_{n+1} &= \Delta\psi_n - \frac{16b}{a} \Delta\xi_{n+1},\end{aligned}$$

где $\psi_m = \arctan(ma/l)$. При этом матрица преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{a \cos^2 \psi_m} \\ -\frac{16b}{a} & 1 - \frac{16bl}{a^2 \cos^2 \psi_m} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $\det A = 1$. Следовательно, полученное отображение сохраняет площадь. Критерий устойчивости стационарных точек можно записать как $|\text{Tr}A| \leq 2$. Отсюда $\cos^2 \psi_m \geq 4bl/a^2$ или $m^2 \leq l/(4b) - l^2/a^2$.

Разрушение всех резонансов и переход к хаосу произойдет, если $4bl/a^2 > 1$. Можно показать [33], что движение частицы вокруг устойчивой точки описывается отображением поворота с числом вращения

$$\rho = \arccos \left(1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2 \psi_m} \right).$$

Движение частицы внутри бильярда с определенной скоростью V порождает поток, в котором можно ввести время t . Время между последовательными столкновениями приблизительно равно $\tau \approx (l/\cos \psi_m)(1/V)$. Поэтому период вращения

$$T_\rho = \frac{2\pi}{\rho} \tau = \frac{2\pi}{\arccos \left(1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2 \psi_m} \right)} \frac{l}{V \cos \psi_m}.$$

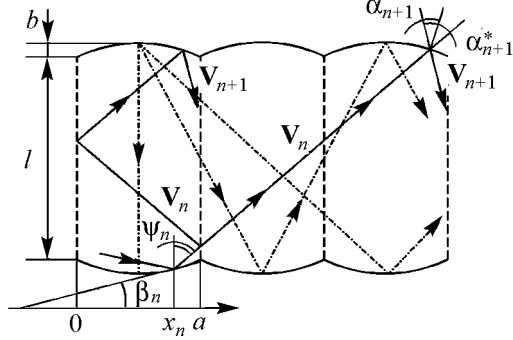


Рис. 6. Развертка бильярда типа «стадион»

На рис. 5, б представлен фазовый портрет бильярда с фокусирующими компонентами в форме параболы, задаваемого *приближенным отображением* (7). Из его сравнения с рис. 5, а, построенным на основе точного отображения (4)–(5), видно, что во втором случае траектория равномерно распределена по всей стохастической области. Однако в первом случае бóльшая плотность соответствует области $\psi \geq 0$, а область $\psi \leq \pi/2$ практически пуста. Разницу результатов объясняет рис. 7, где показано приближение малой глубины фокусирующего компонента, сделанное при выводе отображения (7). В результате для точного отображения при

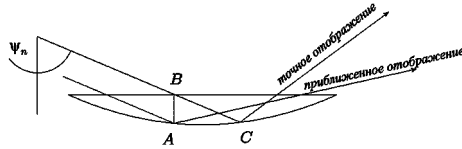


Рис. 7. Разница траекторий бильярдной частицы в точном и приближенном отображении

большом ψ соударение будет происходить с большей вероятностью с правой (на рисунке) частью дуги, так что угол ψ будет уменьшаться. Таким образом, частицы как бы выталкиваются из областей больших ψ , так что движение происходит, в основном, в окрестности регулярных областей.

2.1. Возмущение границы. Если граница бильярда возмущается, то частица может переходить из стохастической области в регулярную и обратно. Когда скорость частиц много больше скорости движения границ, можно показать [33], что частицы, попадая в окрестность неподвижных точек, будут двигаться по спирали, сначала приближаясь к центру, а потом удаляясь от него. При этом частота вращения остается такой же, как и в невозмущенной системе. Кроме того, легко понять, что при определенной скорости частиц может наступить резонанс между вращением частицы вокруг неподвижной точки и возмущением границ. В результате вся область в окрестности неподвижной точки становится доступной. Резонансную скорость можно выразить следующим образом:

$$V_r(m) = \frac{l\omega}{\cos \psi_m \arccos(1 - 8bl/(a \cos \psi_m)^2)}. \quad (8)$$

Пусть фокусирующие компоненты возмущаются таким образом, что скорость их движения в каждой точке одинакова по модулю и направлена по нормали к поверхности. Предположим, что модуль скорости границы зависит от времени по некоторому периодическому закону $U(t) = U_0 f(\omega(t + t_0))$, где ω – частота колебаний. Будем считать, что $U_0/\omega \ll l$, то есть смещение границы мало. В этом случае отображение, описывающее движение бильярдного шара, можно записать как

$$\begin{aligned} V_n &= \sqrt{V_{n-1}^2 + 4V_{n-1} \cos \alpha_n^* U_n + 4U_n^2}, \\ \alpha_n &= \arcsin \left(\frac{V_{n-1}}{V_n} \sin \alpha_n^* \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1}^* &= \alpha_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi}, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{2R \cos \alpha_n}{V_n}, \end{aligned} \right\} \text{если } |\varphi_{n+1}| \leq \Phi \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned}
\psi_n &= \alpha_n - \varphi_n, \\
x_n &= \frac{R}{\cos \psi_n} [\sin \alpha_n + \sin (\Phi - \psi_n)], \\
x_{n+1}^* &= x_n + l \tan \psi_n \pmod{a}, \\
\alpha_{n+1}^* &= \arcsin \left[\sin (\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n \right], \\
\varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^*, \\
t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n},
\end{aligned} \right\} \text{если } |\varphi_n + \pi - 2\alpha_n| > \Phi.$$

(11)

Отметим, что при его выводе не использовалось соотношение (1). Единственное приближение, которое было сделано, – малость смещения границ бильярда. Выражения (10) соответствуют серии последовательных столкновений частицы с одним фокусирующим компонентом, а (11) – переходу от одной границы к другой.

2.2. Численный анализ. Численное исследование бильярда типа «стадион» с возмущаемой границей, описываемого отображениями (9)–(11), проводилось при тех же значениях геометрических параметров, что и в предыдущем пункте. При этом амплитуда осцилляций границы $U_0 = 0.01$, а частота $\omega = 1.0$.

Как указывалось ранее, для разных скоростей частиц фазовые портреты такой системы должны различаться. На рис. 8 представлена зависимость резонансной скорости, задаваемой выражением (8), от угла ψ_m . Из него следует, что в области от 0 до $\psi_{m \text{ макс}}$ значение скорости меняется в узких пределах.

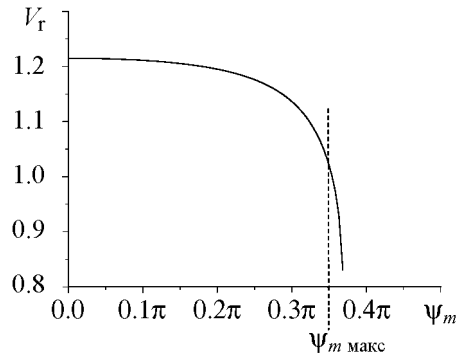


Рис. 8. Резонансная скорость в зависимости от ψ_m .

Численные исследования отображения (10)–(11) были проведены в двух случаях: для полностью хаотического и близкого к интегрируемому бильярдов. В первом случае бильярд – классический стадион, то есть $\Phi = \pi/2$, и граница бильярда состоит из двух полуокружностей и двух параллельных прямых, касательных к ним (левый бильярд на рис. 2). Близкий к интегрируемому случай означает, что фокусирующие компоненты – почти прямые (правый бильярд на рис. 2), так что выполняется соотношение (1).

Для хаотического бильярда были выбраны следующие параметры: $a = 0.5$, $b = 0.25$, $l = 1.0$, $U_0 = 0.01$, $\omega = 1.0$ и $V_0 = 0.1$. Скорость частицы вычислялась как среднее значение ансамбля из 5000 траекторий с различными начальными условиями (сплошная кривая 1 на рис. 9). Начальные условия выбирались случайным образом на фокусирующем компоненте, так чтобы вектор скорости частицы был направлен внутрь бильярдной области. Как следует из численного анализа, как и в случае газа Лоренца скорость частицы $V(n)$ пропорциональна \sqrt{n} .

В близком к интегрируемому бильярду параметр b достаточно мал и кривизна фокусирующего компонента вносит малую нелинейность в систему. В такой конфигурации фазовое пространство имеет области с регулярной и хаотической динамикой. Этот случай представляется значительно более интересным. Невозмущенный бильярд имеет устойчивые точки, окруженные инвариантными кривыми. В их окрестности движение частицы квазипериодично и хорошо аппроксимируется отображением поворота. В то же время вне этих регионов динамика хаотична. В этом случае траектории заполняют хаотическую область целиком. Таким образом, если граница бильярда не возмущена, то в зависимости от начальных условий движение бильярдной частицы может быть либо хаотическим либо регулярным.

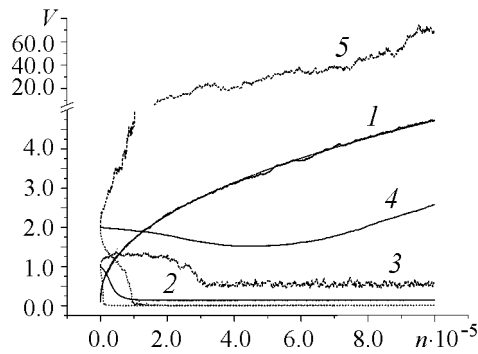


Рис. 9. Зависимость средней скорости частицы от числа соударений n с границей в бильярде типа «стадион» с осциллирующими стенками [27, 33]. Две кривые 1 (численно полученная и ее «корневая» аппроксимация $V \sim \sqrt{n}$) соответствуют бильярду с развитыми хаотическими свойствами ($b=0.25$). Кривые 2–5 отвечают близкому к интегрируемому бильярду ($b = 0.01$): $V_0 = 1.0$ (кривые 2, 3) и $V_0 = 2.0$ (кривые 4 и 5)

Если начальная скорость $V_0 < V_r$, тогда скорость частиц *уменьшается* до конечной величины $V_{\text{fin}} < V_r$, и распределение по скоростям стремится к стационарному в интервале $(0, V_{\text{fin}})$. Если же $V_0 > V_r$, то частицы в среднем *ускоряются*. В этом случае распределение частиц не стационарно, и скорость неограниченно возрастает.

На рис. 9 (кривые 2–5) показана зависимость скорости частицы от числа столкновений. Параметры бильярда были выбраны те же, что и для классического «стадиона» (кривая 1), за исключением величины $b = 0.01$.

На основании 5000 реализаций для каждой начальной скорости были построены три кривые: средняя, минимальная и максимальная скорости, достигнутые на n -й итерации. Таким образом, можно определить интервал изменения скорости. Как следует из рисунка, если $V_0 < V_r$ тогда средняя скорость частиц (сплошная кривая 2) постепенно уменьшается и стремится к константе. Максимальная скорость частиц (пунктирная кривая 3) также уменьшается до величины V_{fin} и флуктуирует

Теперь обратимся к возмущаемому бильярду. В такой системе частица может двигаться из стохастической области в регулярную и обратно. В достаточно малой окрестности фиксированной точки движение частицы имеет определенный период вращения, $T_p = 2\pi\lambda/(\rho V)$, где ρ – число вращения, λ – средняя длина свободного пробега и V – скорость частицы. В то же время, период осцилляций границы $T = 2\pi/\omega$. Таким образом, в системе при некоторой скорости V_r будет наблюдаться резонанс между частотой вращения вокруг неподвижной точки и частотой колебаний границы. Как следует из численного анализа, по разные стороны от резонанса бильярдные частицы имеют качественно различное поведение. Если начальная скорость $V_0 < V_r$, тогда скорость

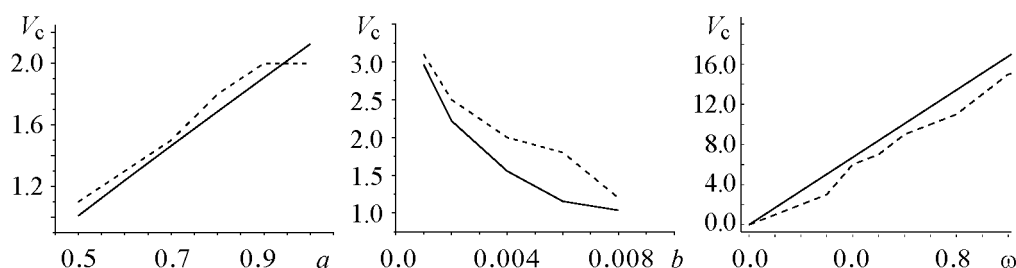


Рис. 10. Зависимость критической скорости V_c частицы от параметров a и b (см. рис. 4) и от частоты ω колебаний границы в близком к интегрируемому бильярде типа «стадион» с осциллирующими границами. Штриховые ломаные – численный расчет, сплошные линии – аппроксимация (12)

около этого значения. В конечном счете скорости частиц оказываются в интервале $0 < V < V_{\text{fin}}$. В случае $V > V_r$ минимальная скорость частиц также уменьшается. Это означает, что в ансамбле существуют частицы, попавшие в область малых скоростей. В численном анализе доля таких частиц составляла примерно 3/4. В то же время существуют частицы с большой скоростью (штриховая кривая 5, которая соответствует максимальной скорости ансамбля). В результате средняя скорость частиц (сплошная кривая 4) растет.

Следовательно, в данной бильярдной системе существует некоторое критическое значение скорости частицы, ниже которой частицы будут замедляться, а выше – ускоряться. Эту критическую скорость можно выразить как

$$V_c = \frac{\omega l}{\cos \psi_m \arccos(1 - 8bl / (a \cos \psi_m)^2)}, \quad (12)$$

На рис. 10 показана зависимость скорости (12) от характерных параметров бильярда: его ширины a , глубины фокусирующего компонента b (см. рис. 4) и частоты колебаний границы. Штриховыми линиями обозначены численно найденные зависимости, сплошными – аппроксимация на основе соотношения (12). Видно, что с ростом b критическая скорость стремится к нулю, то есть в соответствующем бильярде замедление частиц наблюдаться не может. То же имеет место и при уменьшении параметра a . Это связано с тем, что при таком изменении параметров в системе растет нелинейность и, как следствие, степень хаотичности в динамике бильярда. Величина критической скорости сильно зависит и от частоты осцилляций. Однако при очень большой частоте в бильярде наблюдается только хаотическая динамика и эффект разделения частиц также исчезает.

Таким образом, в данной бильярдной системе наблюдается сепарация частиц в ансамбле по скоростям: часть из них будет испытывать ускорение, а часть – замедляться. Иными словами, при слабом возмущении бильярда типа «стадион» естественным образом может реализоваться своеобразная динамическая модель демона Максвелла, когда быстрые и медленные частицы разделяются.

Заключение

Бильярды являются достаточно удобными моделями целого ряда физических систем. Например, многим динамическим задачам могут быть поставлены в соответствие уравнения траектории частицы в бильярдах заданной формы. Более того, большинство подходов к проблеме перемешивания в системах из многих частиц сводится к задачам бильярдного типа. Естественным обобщением бильярдных систем являются бильярды, границы которых не являются неподвижными, а изменяются по какому-либо закону. Это достаточно новая область, открывающая новые перспективы в исследовании многих давно известных, но малоизученных проблем.

В настоящей работе рассмотрена проблема ускорения Ферми в бильярде типа газа Лоренца и бильярде «стадион», границы которых возмущаются со временем. В отличие от газа Лоренца в стадионе динамика роста скорости зависит от его формы. Если форма такова, что поведение частицы полностью хаотично, то, как и в газе Лоренца, средняя скорость ансамбля частиц растет как корень квадратный из числа столкновений. В то же время, в близком к интегрируемому случаю наблюдается новое явление: существует критическое значение V_c такое, что, если начальная скорость $V_0 < V_c$, то скорость ансамбля частиц убывает вплоть до некоторой близкой к нулю (но не нулевой) величины, а распределение частиц стремится к стационарному. При этом скорость всех частиц падает до достаточно малого значения (существенно меньшего начальной скорости) и устанавливается равновесное распределение частиц по скоростям. Но если $V_0 > V_c$, то скорость частиц неограниченно возрастает.

Отметим однако, что данный результат, строго говоря, был получен не для точного отображения, описывающего динамику бильярдной частицы. Приближение, которое было сделано, – это пренебрежение смещением границ бильярда (так называемое статическое приближение). Хотя такая аппроксимация представляется вполне естественной и почти всегда используется при анализе бильярдов с возмущаемыми границами (см., например, [28–30]), было бы интересно сравнить полученные соотношения с результатами для систем, где смещением границ не пренебрегается [34].

Библиографический список

1. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
2. *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, vol. 3 / Ed. R.H. Cohen. Elsevier, Amsterdam, 1975.
3. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
4. *Бунимович Л.А.* // В кн. Динамические системы – 2. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». ВИНТИ, 1985. С. 173.
5. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 78. P. 479.
6. *Baldwin P.R.* // *J. Phys. A.* 1991. Vol. 24. P. L941.
7. *Chernov N.* // *J. Stat. Phys.* 1997. Vol. 88. P. 1.
8. *Garrido P.L.* // *J. Stat. Phys.* 1997. Vol. 88. P. 807.
9. *Bunimovich L.A.* // *Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 187.

10. *Fermi E.* // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1169.
11. *Ulam S.M.* // Proc. of the 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability. California Univ. Press. 1961. Vol. 3. P. 315.
12. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
13. *Brahic A.* // Astron. Astrophys. 1971. Vol. 12. P. 98.
14. *Заславский Г.М.* Стохастическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.
15. *Lichtenberg A.J., Lieberman M.A., Cohen R.H.* // Physica D. 1980. Vol. 1. P. 291.
16. *Пустьльников Л.Д.* // Докл. Акад. наук СССР. 1987. Т. 292. С. 549.
17. *Пустьльников Л.Д.* // Матем. сб. 1994. Т. 85. С. 113.
18. *Krüger T., Pustyl'nikov L.D., Troubetzkoy S.E.* // Nonlinearity. 1995. Vol. 8. P. 397.
19. *Пустьльников Л.Д.* // Успехи матем. наук. 1995. Т. 50. С. 143.
20. *Koiller J., Markarian R., Kamphorst S.Q., de Carvalho S.P.* // Nonlinearity. 1995. Vol. 8. P. 983.
21. *Koiller J., Markarian R., Oliffson S., Pintos S.* // J. Stat. Phys. 1996. Vol. 83. P. 127.
22. *Kamphorst S.Q., de Carvalho S.P.* // Nonlinearity. 1999. Vol. 12. P. 1363.
23. *Tsang K.J., Ngai K.L.* // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. R17.
24. *Tsang K.J., Lieberman M.A.* // Physica D. 1984. Vol. 11. P. 147.
25. *Tsang K.J., Lieberman M.A.* // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 103A. P. 175.
26. *Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. С. 1781.
27. *Loskutov A., Ryabov A.B., Akinshin L.G.* // J. Phys. A. 2000. Vol. 33. P. 7973.
28. *de Carvalho R.E., Souza F.C., Leonel E.D.* // J. Phys. A. 2006. Vol. 39. P. 3561.
29. *de Carvalho R.E., Souza F.C., Leonel E.D.* // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 066229.
30. *Karlis A.K., Papachristou P.K., Diakonou F.K., et al.* // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 194102.
31. *Leonel E.D.* // J. Phys. A. 2007. Vol. 40. P. F1077.
32. *Loskutov A., Chichigina O., Ryabov A.* // Int. J. Bif and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2863.
33. *Loskutov A., Ryabov A.* // J. Stat. Phys. 2002. Vol. 108. P. 995.
34. *Loskutov A., Ryabov A.B.* (Готовится к печати).

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 3.03.2008

BILLIARD TYPE SYSTEMS AND FERMI ACCELERATION

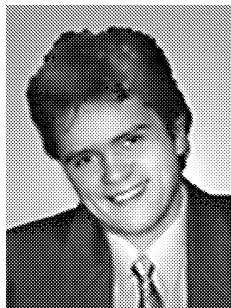
A.Yu. Loskutov, A.B. Ryabov

Systems of billiard types with perturbed boundaries are described. A generalized dispersing billiard – the Lorentz gas with the open horizon – and a focusing billiard in the form of stadium are considered. It is analytically and numerically shown that,

if the billiard possesses the property of the developed chaos, the consequence of the boundary perturbation is the Fermi acceleration. However, the perturbation of the nearly integrable billiard system leads to a new interesting phenomenon – the separation of the billiard particles in their velocities. This consists of the fact that if the initial particle velocities exceed some critical value (specific for the given billiard geometry) then the racing of the particle ensemble is observed. If the initial value is below the critical value, then the billiard particles are not accelerated. The dependence of the separation effect on the characteristic billiard parameters and the frequency of the boundary oscillations is described.



Лоскутов Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор физического факультета МГУ. Область профессиональных интересов – теория динамических систем и ее приложения. Имеет более 130 публикаций в научных журналах, 2 учебника, 4 монографии (2 из которых с соавторами). Лауреат премии им. И.И. Шувалова по математике и физике (1998). Член редакций журналов «Проблемы анализа риска», «Вестник МГУ, серия физика-астрономия», «Nonlinear Biomedical Physics». Приглашенный профессор многих ведущих университетов мира.



Рябов Алексей Борисович – окончил физический факультет Московского государственного университета (1996). Защитил диссертацию по теме «Ускорение Ферми в хаотических бильярдах с возмущаемыми границами» (2002). С 2001 года преподавал и занимался исследованиями в качестве сотрудника физического факультета. С 2005 года проживает в Германии и работает в группе математического моделирования экологических систем.
E-mail: a.ryabov@icbm.de