



СРЫВНОЙ ФЛАТТЕР КАК ОДИН ИЗ МЕХАНИЗМОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

П.С. Ланда

В настоящей статье рассматриваются автоколебания проводов, вызванные срывом вихрей с их поверхности (так называемый срывной флаттер).

Ключевые слова: Срывной флаттер, ветровой резонанс, дорожка Кармана, автоколебания.

Введение

Известно, что при определенных условиях провода линий электропередачи начинают совершать колебания большой амплитуды, имеющие довольно сложный характер. Эти колебания возникают как в безветренную погоду, так и при наличии ветра. Один из механизмов возбуждения автоколебаний в безветренную погоду связан с нагревом проводов протекающим по ним электрическим током. Этот механизм получил название термомеханического [1, 2]. Он связан с взаимодействием механических колебаний провода с колебаниями его температуры. Возбуждение колебаний проводов при наличии ветра можно объяснить целым рядом причин. По-видимому, наиболее существенной из них является случайное воздействие на провод нерегулярных порывов ветра, вызывающих непрерывное возбуждение собственных колебаний провода. В качестве одной из других возможных причин можно указать на явление так называемого срывного флаттера, возникающего из-за взаимодействия колебаний провода с обтекающими его вихрями. Известно, что срывной флаттер является причиной многих технических катастроф, наиболее известной из которых является разрушение Такомакского моста, произошедшее в 1940 году. Процесс этого разрушения детально описан в целом ряде книг, например, в [3, 4].

С глубокой древности известно, что при обтекании протяженных тел потоком воздуха или жидкости тела начинают издавать звуки. Эти звуки получили название «эоловы тона». По мере развития науки было выяснено, что эти звуки вызваны колебаниями обтекаемых тел, обусловленными образованием за обтекаемым телом

приблизительно периодической вихревой структуры. Эта структура была названа по имени одного из главных своих исследователей «дорожкой Кармана» [5]. Возникновение дорожки Кармана за обтекаемым телом при определенных условиях приводит к возбуждению интенсивных автоколебаний этого тела. Явление возбуждения таких автоколебаний мы будем называть срывным флаттером¹, несмотря на то, что в некоторых книгах (см., например, [6, 7]) различают срывной флаттер, когда колебания аэродинамических сил порождаются колебаниями тела, и вынужденные колебания – «ветровой резонанс», когда дорожка Кармана существует и при обтекании неподвижного тела. Мы объединяем оба явления одним названием, потому что полагаем, что механизм возбуждения обоих типов колебаний одинаковый. Заметим только, что при определении срывного флаттера, даваемого в [6], он может возбуждаться только жестко, что в принципе вполне возможно, но не отмечается ни в одной из известных работ.

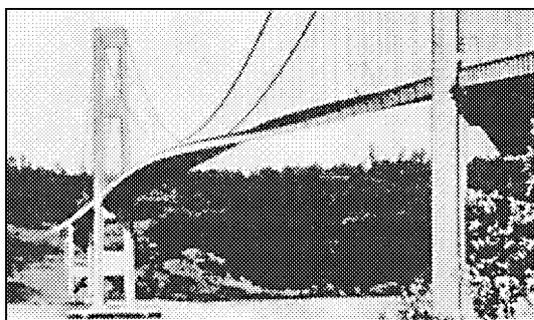


Рис. 1. Кадр из фильма о катастрофе Такомакского моста, демонстрирующий его состояние за полчаса до разрушения [3, 4]

Чаще всего срывной флаттер (в нашем, более общем, понимании) возникает в случае, когда одна из собственных частот колебаний тела приблизительно равна или кратна частоте срыва вихрей с этого же тела, когда оно неподвижно. Колебания типа срывного флаттера наблюдались неоднократно у многих подвесных мостов, стальных заводских труб, винтов вертолетов, перископов подводных лодок, лопаток компрессоров, турбин в турбореактивных двигателях, опущенных с кораблей трюсов в океане и т.п. [3, 4, 6, 8–10]. По-видимому, колебания этого типа являются одними из основных при раскачивании проводов при наличии ветра. Экспериментальные исследования срывного флаттера и снимки ряда катастроф, связанных с этим явлением (например, кадр из фильма о катастрофе Такомакского моста, демонстрирующий его состояние за полчаса до разрушения [3, 4] (рис. 1, заимствованный из [4]), показывают, что преобладающими при флаттере являются крутильные колебания тела, а изгибная составляющая является малой. Этим срывной флаттер существенно отличается от значительно более широко известного изгибно-крутильного флаттера, являвшегося основной причиной катастроф самолетов на заре их появления [11]. Однако, как показано в работе [12], учет даже очень малых изгибных колебаний может существенно изменить критическую скорость и характер срывного флаттера.

Следует заметить, что теоретических работ, связанных с явлением срывного флаттера, очень мало, а последовательная строгая теория просто отсутствует. По-видимому, это объясняется большой сложностью проблемы и тем, что при полете самолетов этот вид флаттера встречается редко [6]. В детальной монографии [6] написано: «Классический тип флаттера связан с потенциальным потоком и обычно, но не обязательно, включает взаимодействие двух или более степеней свободы.

¹Заметим, что термин «флаттер» происходит от английского слова «flutter», что означает «дрожание».

Неклассический тип флаттера, который до сих пор трудно анализировать на чисто теоретической основе, может иметь место при сорванном потоке, периодических срывах потока с прилеганием его вновь...»². По нашему мнению, основная трудность теории срывного флаттера лежит в строгом описании спутной струи позади обтекаемого тела, возникающей при срыве вихрей. В той или иной мере срывной флаттер рассматривается в книгах [3, 4, 6–10, 14–16].

В большинстве имеющихся работ явление срывного флаттера объясняют как возникновение вынужденных резонансных колебаний под действием периодической силы, вызванной срывом вихрей и имеющей заданную частоту, зависящую от скорости потока, размеров и формы обтекаемого тела. Частота этой силы определяется из условия постоянства так называемого числа Струхала [17]. В первую очередь, такое объяснение вступает в противоречие с известными экспериментальными данными относительно возникновения срывного флаттера достаточно длинных тросов, обтекаемых течениями, имеющими различную скорость в разных точках троса. Это противоречие связано с тем, что срывной флаттер не является вынужденными колебаниями, а представляет собой единый автоколебательный процесс. Поскольку сам процесс срыва вихрей по многим признакам является автоколебательным [1], а обтекаемое тело представляет собой колебательную нагрузку с одной или несколькими собственными частотами, то явление срывного флаттера, по-видимому, должно быть подобно процессу автоколебаний в системе, содержащей как активные, так и пассивные колебательные элементы. Классическим примером такой системы является генератор с дополнительным колебательным контуром [18–21].

К признакам, указывающим на автоколебательный характер процесса срыва вихрей с обтекаемого тела, можно отнести следующие.

- Пульсации скорости и давления в дорожке Кармана имеют довольно узкий спектр с ярко выраженным максимумом на частоте, соответствующей числу Струхала $St \approx 0.2$.

- Процесс срыва вихрей с обтекаемого тела может быть синхронизован, если возбудить колебания этого тела на некоторой заданной частоте, приблизительно равной или кратной частоте срыва вихрей с неподвижного тела [22–26], причем характер зависимости частоты срыва вихрей с колеблющегося тела от расстройки между частотой колебаний тела и частотой срыва вихрей с неподвижного тела полностью совпадает с характером хорошо известной зависимости частоты синхронных колебаний генератора от расстройки между частотой свободных колебаний и частотой внешней силы [1]. Следует отметить, что, как и в генераторах, синхронизация может происходить не только на основной частоте, но и на ее гармониках и субгармониках.

Отметим, что на автоколебательный характер срывного флаттера было указано в работах [27, 28], где излагались результаты теоретических и экспериментальных исследований некоторых примеров срывного флаттера. Однако приведенная там теория не является достаточно строгой.

²Следует, правда, отметить, что термин «потенциальный поток» здесь является неудачным, потому что в потенциальном безграничном потоке идеальной жидкости никакого флаттера быть не может из-за равенства нулю всех аэродинамических сил (парадокс Даламбера) [13].

1. Основные уравнения

В настоящей работе мы рассмотрим явление срывного флаттера на простейшей модели колебаний упругого кругового цилиндра длины l , помещенного перпендикулярно потоку и закрепленного на концах (рис. 2). Обтекание кругового цилиндра рассмотрено в книгах [8, 15] и статьях [24, 29]. В [15] предполагается, что цилиндр поддерживается пружиной и демпфером. Как уже отмечалось, за обтекаемым цилиндром образуется вихревая дорожка Кармана [30], которая в диапазоне чисел Рейнольдса $40 < Re < 150$ является регулярной, а при $150 < Re < 300$ – турбулентной. При $300 < Re < 2 \cdot 10^5$ дорожка Кармана снова становится близкой к регулярной, но с турбулентными всплесками. Затем в некоторой области при

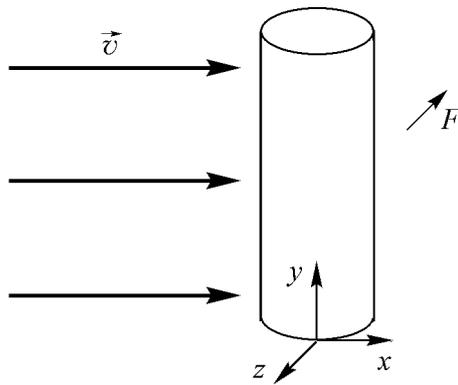


Рис. 2. Схематическое изображение колебаний упругого цилиндра длины l , происходящих вдоль оси z , при обтекании потоком в направлении оси x

$Re > 5 \cdot 10^6$ снова наблюдается доминирующая частота срыва вихрей [31]. Заметим, что такое чередование областей различного поведения при изменении параметра характерно для хаотических автоколебательных систем [1, 32]. В частности, область $300 < Re < 2 \cdot 10^5$, по-видимому, может рассматриваться как область перемежаемости. Сказанное лишний раз свидетельствует, что образование дорожки Кармана представляет собой автоколебательный процесс. Ниже мы будем рассматривать только область значений числа Рейнольдса, где срыв вихрей является близким к периодическому.

При срывном обтекании цилиндра в направлении оси x со скоростью V , одинаковой для всех сечений цилиндра³, на это сечение действуют периодическая (или близкая к периодической) подъемная сила $F_{kz}(t)$, направленная вдоль оси z , и сила лобового сопротивления $F_{rx}(t)$, направленная вдоль оси x навстречу потоку и представляющая собой сумму двух составляющих: не зависящей от времени (или медленно меняющейся со временем) и периодической (или близкой к периодической) с периодом, вдвое меньшим, чем период подъемной силы. В случае неподвижного цилиндра в широком диапазоне чисел Рейнольдса частота подъемной силы близка к частоте срыва вихрей с поверхности цилиндра ω_v , а частота силы лобового сопротивления близка к $2\omega_v$ [24, 29]. Разница периодов подъемной силы и силы лобового сопротивления возникает из-за того, что частота подъемной силы определяется расстоянием между вихрями только вдоль одной из сторон дорожки Кармана (2λ), тогда как частота силы лобового сопротивления определяется расстоянием между вихрями вдоль обеих сторон дорожки Кармана (λ) (рис. 3).

³Предположение о том, что все сечения цилиндра обтекаются с одинаковой скоростью, не принципиально. Задача может быть решена с использованием, например, метода Галеркина [33] и в случае, когда это предположение не выполняется.

Частота ω_v связана с числом Струхали и скоростью обтекания выражением

$$\omega_v = \frac{2\pi St}{D} V, \quad (1)$$

где D – диаметр цилиндра. Эксперименты показывают, что при $40 < Re < 150$ число Струхали растет, затем становится приблизительно постоянным и равным 0.2, а далее снова начинает расти. В области $2 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$ вихревая дорожка является сильно турбулентной, так что число Струхали определить невозможно. Далее, при $Re > 5 \cdot 10^6$, число Струхали $St \approx 0.3$. Все сказанное отражено на рис. 4, заимствованном из [8].

Уравнения, позволяющие строго описать подъемную силу и силу лобового сопротивления в случае срывного обтекания, насколько нам известно, в литературе отсутствуют. В основном приводятся только выражения для их амплитуд и частоты [4, 8, 15, 24, 29].

Амплитуды сил $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ во всех известных книгах по аэроупругости (см., например, [8, с. 307]) находятся из соображений размерности. Соответствующие формулы можно записать в виде

$$A_{kz} = c_k(Re) S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad A_{rx} = c_r(Re) S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad (2)$$

где $c_k(Re)$ и $c_r(Re)$ – коэффициенты, зависящие от степени обтекаемости тела (чем хуже обтекаемость, тем больше значения c_k и c_r) и от числа Рейнольдса; S_{yz} – площадь проекции тела на плоскость yz , перпендикулярную направлению потока. Заметим, что коэффициент $c_r(Re)$ всегда много меньше, чем $c_k(Re)$, то есть переменная составляющая силы лобового сопротивления мала по сравнению с подъемной силой.

Для колеблющегося цилиндра к силам $F_{kz}(t)$ и $F_{rx}(t)$ следует добавить силы, связанные с нестационарностью обтекания. Эти силы определяют присоединенную массу цилиндра и дополнительный коэффициент затухания. Поэтому их учет, по-видимому, не имеет принципиального значения. Кроме того, в случае колеблющегося цилиндра коэффициенты $c_k(Re)$ и $c_r(Re)$ зависят от амплитуды колебаний.

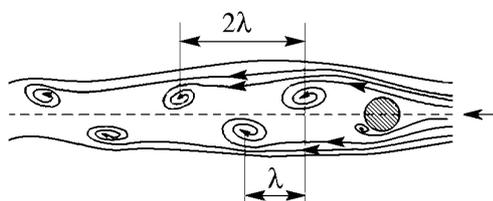


Рис. 3. Схематическое изображение дорожки Кармана при обтекании цилиндра

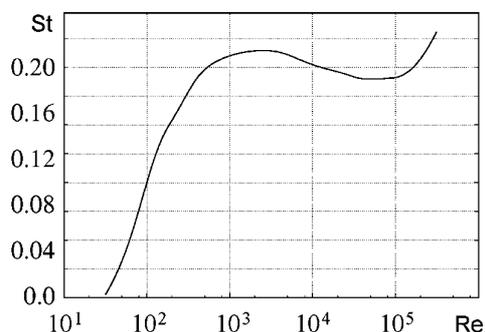


Рис. 4. Зависимость числа Струхали от числа Рейнольдса при поперечном обтекании неподвижного цилиндра с круглым сечением

Рассматривая колеблющийся цилиндр как струну, запишем уравнения его колебаний вдоль осей x и z в виде

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_x}{\partial t} - T \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= \frac{F_{rx}(t)}{A_{rx}}, \\ \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_z}{\partial t} - T \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= \frac{F_{kz}(t)}{A_{kz}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_x(y, t)$ и $u_z(y, t)$ – смещения цилиндра вдоль осей x и z , отнесенные к амплитудам A_{rx} и A_{kz} , соответственно; ρ_s – линейная плотность струны; T – натяжение струны; α – коэффициент затухания. Если цилиндр закреплен на концах, то граничные условия имеют вид

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad u_z(0, t) = 0, \quad u_z(l, t) = 0. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что силы $F_{rx}(t)$ и $F_{kz}(t)$ отличны от нуля только при $0 \leq y \leq l$ и частота силы сопротивления вдвое больше частоты подъемной силы, представим $F_{rx}(t)$ и $F_{kz}(t)$ в виде

$$\begin{aligned} F_{rx}(t) &= A_{rx} \sum_{j=1}^{\infty} f_{rx}^{(j)}(t) \sin\left(\frac{2(2j-1)\pi}{l} y\right), \\ F_{kz}(t) &= A_{kz} \sum_{j=1}^{\infty} f_{kz}^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{l} y\right), \\ (j &= 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$f_{rx}^{(j)}(t) = \frac{F_{rx}(t)}{2(2j-1)\pi A_{rx}}, \quad f_{kz}^{(j)}(t) = \frac{F_{kz}(t)}{(2j-1)\pi A_{kz}}.$$

Если частота срыва вихрей с колеблющегося цилиндра близка к n -й собственной частоте колебаний цилиндра, то в разложениях (5) можно оставить только по одному члену:

$$\begin{aligned} F_{kz}(t) &= A_{kz} f_{kz}^{(n)}(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{l} y\right), \\ F_{rx}(t) &= A_{rx} f_{rx}^{(2n)}(t) \sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{l} y\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Решая далее уравнения (3) методом разложения по собственным функциям колебаний закрепленной на концах струны без затухания, то есть полагая

$$\begin{aligned} u_x(y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} U_x^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(4j-1)\pi}{l} y\right), \\ u_z(y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} U_z^{(j)}(t) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{l} y\right) \end{aligned}$$

и сохраняя в найденных разложениях тоже только по одному члену, для функций $U_z^{(n)}(t)$ и $U_x^{(2n)}(t)$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_z}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_z}{dt} + \omega_n^2 U_z &= \frac{f_{kz}^{(n)}(t)}{\rho_s}, \\ \frac{d^2 U_x}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_x}{dt} + 4\omega_n^2 U_x &= \frac{f_{rx}^{(2n)}(t)}{\rho_s}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta = \alpha/(2\rho_s) \ll \omega_n$.

Из-за того, что частоты колебаний в направлениях x и z различны, суммарные колебания будут иметь довольно сложный характер. Более того, в диапазонах чисел Рейнольдса, где процесс срыва вихрей является случайным, они также будут случайными, что довольно часто наблюдается в реальных линиях электропередачи.

Как уже указывалось, процесс срыва вихрей по многим признакам имеет автоколебательный характер, обусловленный образованием за обтекаемым телом спутной струи. Поскольку какие-либо уравнения, позволяющие строго вывести выражения для сил $F_{kz}(y, t)$ и $F_{rx}(y, t)$ в литературе отсутствуют, для их вычисления мы будем использовать модельные уравнения автоколебаний. Используя модель автоколебаний в виде генератора ван дер Поля [1] и принимая во внимание экспериментальный факт, что колебания цилиндра могут синхронизовать срыв вихрей, запишем следующие уравнения для $f_{rx}(t)$ и $f_{kz}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{kz}}{dt^2} - \mu \left(1 - 4f_{kz}^2\right) \frac{df_{kz}}{dt} + \omega_v^2 f_{kz} &= m_1 U_z, \\ \frac{d^2 f_{rx}}{dt^2} - \mu \left(1 - 4f_{rx}^2\right) \frac{df_{rx}}{dt} + 4\omega_v^2 f_{rx} &= m_2 U_x, \end{aligned} \quad (8)$$

где μ – малый параметр, $m_{1,2}$ – некоторые коэффициенты. Отметим, что члены $m_1 U_z$ и $m_2 U_x$ отвечают за синхронизацию срыва вихрей колебаниями цилиндра.

В стационарном режиме из уравнений (7) следует, что в случае неподвижного цилиндра имеем

$$F_{kz} = A_{kz} f_{kz} \approx A_{kz} \cos(\omega_v t), \quad F_{rx} = A_{rx} f_{rx} \approx A_{rx} \cos(2\omega_v t + \varphi), \quad (9)$$

где φ – некоторый сдвиг фаз. Заметим, что формулы (9) находятся в полном соответствии с выражениями для подъемной силы и силы лобового сопротивления, приведенными в работе [29].

Система уравнений (6), (7) описывает две независимых автоколебательных системы, каждая из которых обладает двумя степенями свободы. На языке радиофизики каждая автоколебательная система представляет собой генератор с дополнительным колебательным контуром, связанным с основным контуром через емкость.

Задача об автоколебаниях в подобном генераторе рассмотрена А.А. Андроновым и А.А. Виттом методом малого параметра Пуанкаре [18], С.П. Стрелковым качественными методами [19] и несколько позднее К.Ф. Теодорчиком [20], использовавшим энергетический метод. Заметим, что только К.Ф. Теодорчик рассмотрел генератор с емкостной связью между контурами. Во всех указанных работах задача

решалась в одночастотном приближении, то есть рассматривался только синхронный режим.

Рассмотрим систему, описываемую первыми из уравнений (6) и (7). Для приближенного решения этой системы используем метод усреднения, разработанный Н.Н. Боголюбовым [34] и развитый Ю.А. Митропольским [35]. Используем этот метод в форме, изложенной в [21]. Для этого перепишем уравнения (6), (7), введя условный малый параметр ε и безразмерное время $\tau = \omega t$, где ω – частота автоколебаний,

$$\begin{aligned} \ddot{f}_{kz} + f_{kz} &= \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2}\right) f_{kz} + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} U_z + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\omega}} \left(1 - 4f_{kz}^2\right) \dot{f}_{kz} \right], \\ \ddot{U}_z + U_z &= \varepsilon \left[\frac{f_{kz}(t)}{\rho_s \omega_n^2 \tilde{\omega}^2} + \left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2}\right) U_z - \frac{2\tilde{\delta}}{\tilde{\omega}} \dot{U}_z \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\tilde{\mu} = \mu/\omega_n$, $\tilde{\delta} = \delta/\omega_n$, $\tilde{m}_1 = m_1/\omega_n^2$, $\xi = \omega_v/\omega_n$ – расстройка частот срыва вихрей и цилиндра, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_n$ – расстройка между частотой автоколебаний ω и собственной частотой колебаний цилиндра, точки означают дифференцирование по безразмерному времени τ .

Перейдем в уравнениях (10) к новым переменным $A_{1,2}(\tau)$, $\varphi_{1,2}(\tau)$, определяемым уравнениями

$$\begin{aligned} f_{kz}(\tau) &= A_1(\tau) \cos(\tau + \varphi_1(\tau)), & \dot{f}_{kz}(\tau) &= -A_1(\tau) \sin(\tau + \varphi_1(\tau)), \\ U_z(\tau) &= A_2(\tau) \cos(\tau + \varphi_2(\tau)), & \dot{U}_z(\tau) &= -A_2(\tau) \sin(\tau + \varphi_2(\tau)). \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (11) уравнения (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 \cos \Phi_1 - A_1 \dot{\varphi}_1 \sin \Phi_1 &= 0, \\ -\left(\dot{A}_1 \sin \Phi_1 + A_1 \dot{\varphi}_1 \cos \Phi_1\right) &= \\ &= \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2}\right) A_1 \cos \Phi_1 - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\omega}} \left(1 - 4A_1^2 \cos^2 \Phi_1\right) A_1 \sin \Phi_1 + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} A_2 \cos \Phi_2 \right], \\ \dot{A}_2 \cos \Phi_2 - A_2 \dot{\varphi}_2 \sin \Phi_2 &= 0, \\ -\left(\dot{A}_2 \sin \Phi_2 + A_2 \dot{\varphi}_2 \cos \Phi_2\right) &= \\ &= \varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2}\right) A_2 \cos \Phi_2 + \frac{2\tilde{\delta}}{\tilde{\omega}} A_2 \sin \Phi_2 + \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}^2} A_1 \cos \Phi_1 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Phi_1 = \tau + \varphi_1$, $\Phi_2 = \tau + \varphi_2$, $\tilde{m}_2 = 1/(\rho_s \omega_n^2)$.

Согласно методу усреднения, в первом приближении нужно разрешить уравнения (12) относительно \dot{A}_1 , \dot{A}_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ и усреднить полученные уравнения по быст-

рому времени τ . В результате получаем

$$\dot{A}_1 = \frac{\varepsilon}{2\tilde{\omega}} \left(\tilde{\mu}(1 - A_1^2)A_1 - \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}} A_2 \sin \varphi \right), \quad (13)$$

$$\dot{A}_2 = -\frac{\varepsilon}{2\tilde{\omega}} \left(2\tilde{\delta}A_2 - \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}} A_1 \sin \varphi \right),$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{\varepsilon}{2A_1} \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2} \right) A_1 + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} A_2 \cos \varphi \right], \quad (14)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{\varepsilon}{2A_2} \left[\left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) A_2 + \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}^2} A_1 \cos \varphi \right],$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра.

В синхронном режиме все производные в уравнениях (13), (14) можно положить равными нулю. Тогда получим следующую систему уравнений для определения амплитуд A_1 , A_2 , разности фаз φ и относительной частоты синхронных автоколебаний $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\mu}(1 - A_1^2) - \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}} \frac{A_2}{A_1} \sin \varphi = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{\delta} \frac{A_2}{A_1} - \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}} \sin \varphi = 0, \quad 1 - \frac{\xi^2}{\tilde{\omega}^2} + \frac{\tilde{m}_1}{\tilde{\omega}^2} \frac{A_2}{A_1} \cos \varphi = 0, \\ \left(1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) \frac{A_2}{A_1} + \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{\omega}^2} \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключая из уравнений (16) отношение амплитуд A_2/A_1 , получаем

$$\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 - \xi^2) + \frac{\tilde{m}_1\tilde{m}_2}{4\tilde{\delta}} \sin 2\varphi = 0, \quad (\tilde{\omega}^2 - 1) \operatorname{tg} \varphi + 2\tilde{\delta}\tilde{\omega} = 0. \quad (17)$$

Уравнения (17) удобно решать, записав их в виде

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \xi^2) \left((1 - \omega^2)^2 + 4\tilde{\delta}^2\omega^2 \right) + \tilde{m}_1\tilde{m}_2(1 - \omega^2) = 0, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\tilde{\delta}\omega}{1 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вычислим теперь зависимости амплитуд автоколебаний от расстройки, используя уравнения (15) и (16). Из этих уравнений следует, что

$$A_1 = \sqrt{1 - \frac{\tilde{m}_1\tilde{m}_2}{2\tilde{\mu}\tilde{\delta}\tilde{\omega}^2} \sin^2 \varphi}, \quad A_2 = \frac{\tilde{m}_2}{2\tilde{\delta}\tilde{\omega}} A_1 \sin \varphi. \quad (19)$$

Подставляя сюда значения $\tilde{\omega}(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, следующие из уравнений (17), находим зависимости A_1 и A_2 от ξ .

Примеры зависимостей $\omega/\omega_2 - 1$ и φ от $\xi - 1$ для $\delta/\omega_2 = 0.1$, $m_1m_2/\omega_2^4 = 0.05$ и $m_1m_2/\omega_2^4 = 0.15$ приведены на рис. 5. Из рис. 5, а видно, что при $\xi \leq \xi_{\text{cr}}$, то

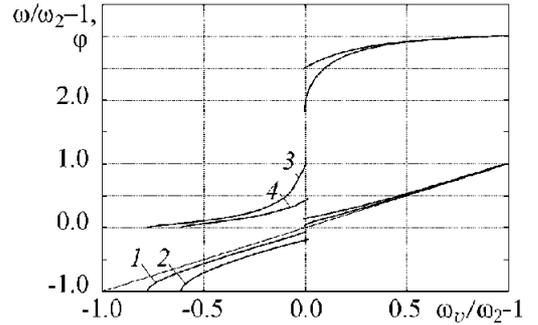
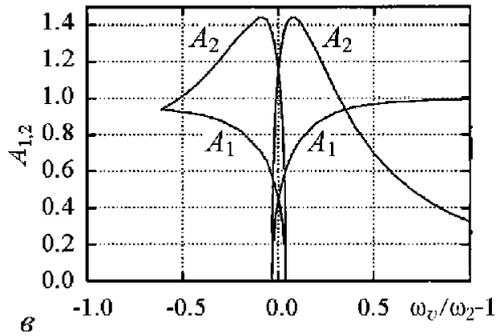
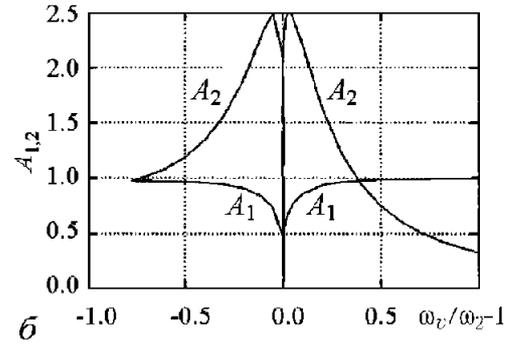
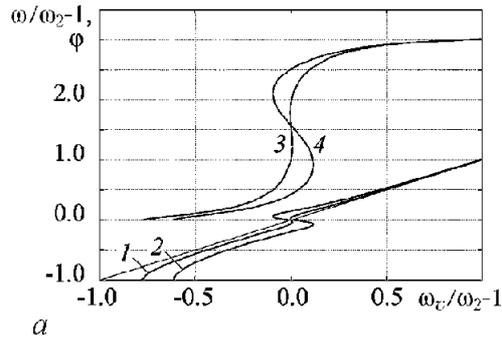


Рис. 5. Зависимости относительной частоты автоколебаний в синхронном режиме (1, 2) и разностей фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра (3, 4) (а) и амплитуд автоколебаний подъемной силы A_1 и цилиндра A_2 (б, в) от расстройки между частотами срыва вихрей с неподвижного цилиндра и собственных колебаний цилиндра для $\delta/\omega_2 = 0.1$ и различных значений $m_1 m_2/\omega_2^4$: 0.05 (1, 3) (б) и 0.15 (2, 4) (в)

Рис. 6. Устойчивые участки зависимостей относительной частоты автоколебаний в синхронном режиме (1, 2) и разностей фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра (3, 4) от расстройки между частотами срыва вихрей с неподвижного цилиндра и собственных колебаний цилиндра для $\delta/\omega_2 = 0.1$ и различных значений $m_1 m_2/\omega_2^4$: 0.05 (1, 3) и 0.15 (2, 4)

есть при относительно малых значениях частоты срыва вихрей с неподвижного цилиндра, синхронные автоколебания невозможны. Значение ξ_{cr} может быть найдено аналитически, исходя из первого уравнения (18). Оно равно $\xi_{cr} = \sqrt{m_1 m_2/\omega_n^4}$. При увеличении расстройки частота автоколебаний приближается к частоте колебаний генератора в отсутствие дополнительного контура, но не монотонно. В окрестности $\xi = 1$ происходит затягивание частоты, при котором частота автоколебаний зависит от начального значения частоты и от направления ее изменения. В этой области результаты качественно совпадают с изложенными в [20]. Вне области синхронизации, то есть при $\xi \leq \xi_{cr}$ одночастотный режим не существует, и автоколебания представляют собой биения. Вблизи границы области синхронизации частоту биений можно вычислить подобно тому, как это делается для генератора ван дер Поля (см., например, [21]).

Зависимости амплитуд колебаний в основном контуре A_1 и дополнительном A_2 , определяемые уравнениями (19), показаны на рис. 5, б и в. В области резонанса обе амплитуды имеют минимум, но по обе стороны минимума они изменяются по-разному: в основном контуре обе амплитуды монотонно нарастают, тогда как изменения амплитуд колебаний в дополнительном контуре имеют максимумы вблизи $\xi = 1$.

Приведенные на рис. 5 зависимости построены без учета устойчивости найденных решений. Уравнения (6), (7) позволяют провести исследование устойчивости. Устойчивые участки зависимостей, показанных на рис. 5, а, приведены на рис. 6. Мы видим, что за счет неустойчивости некоторые участки зависимостей, представленных на рис. 5, а, выпадают.

В заключение заметим, что найденный здесь эффект несуществования одночастотного режима автоколебаний не имеет места в случае индуктивно связанных контуров. По-видимому, именно этим можно объяснить тот факт, что этот эффект не нашел отражения в литературе. Следует отметить, что в работе К.Ф. Теодорчика этот эффект не был замечен.

Заключение

Итак, использование модельных уравнений для срыва вихрей с поверхности колеблющегося цилиндра позволяет рассчитать амплитуды и частоты автоколебаний, возникающих за счет срыва вихрей с поверхности упругого цилиндра, то есть решить задачу о срывном флаттере.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-08-0025а.

Библиографический список

1. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука-Физматлит, 1997.
2. Ланда П.С. Автоколебания провода, нагреваемого электрическим током с учетом тензорезистивного эффекта // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 1. С. 19.
3. Rocard Y. Dynamique Générale des Vibrations. Paris, Masson et C^{ie}, Editeurs, 1949.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Москва, Наука, 1979.
5. Karman Th. von Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter in einer Flüssigkeit erfährt. Göttingen Nachrichten. 1911. P. 178; 1912. С. 186.
6. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. Москва: ИЛ, 1958, стр. 14, 541.
7. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. Москва: Транспорт, 1987.
8. Фершинг Г. Основы аэроупругости. Москва: Машиностроение, 1984.
9. Гольденблат И.И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. М.: Госстройиздат, 1947.
10. Рокар И. Неустойчивость в механике. М.: ИЛ, 1959.
11. Гроссман Е.П. Флаттер. Тр. ЦАГИ, 1937, № 284.
12. Halfman R.L., Johnson H.C., Haley S.M. Evaluation of high-angle-of-attack aerodynamic-derivative data and stall-flutter prediction techniques. N.A.C.A.T.N. p. 2533, 1951.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
14. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.

15. *Фын Я.Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1959.
16. *Девнин С.И.* Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975.
17. *Strouhal V. von.* Über eine besondere Art der Tonerregung // Ann. Phys. 1878. Vol. 5, № 10. P. 216.
18. *Андронов А.А., Витт А.А.* К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы // ЖТФ. 1934. Т. 4, вып. 1. С. 122.
19. *Стрелков С.П., Скибарко А.П.* Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. К теории затягивания по Ван-дер-Полю // ЖТФ. 1934. Т. 4, вып. 1. С. 158.
20. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат, 1952.
21. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
22. *Richardson E.G.* Eolian Tones // Proc. Phys. Soc. Lond. 1923. Vol. 36. P. 53.
23. *Павлихина М.А., Смирнов Л.П.* Вихревой след при обтекании колеблющихся цилиндров. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8. С. 124.
24. *Bishop R.E.D., Hassan A.Y.* The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid // Proc. Royal Soc. (London). 1964. Vol. A277. P. 51.
25. *Блюмина Л.Х., Федяевский К.К.* Исследование влияния вынужденных колебаний цилиндра в воздушном потоке на механизм срыва вихрей // Известия АН СССР, МЖГ. 1969. № 1. С. 118.
26. *Федяевский К.К., Блюмина Л.Х.* Гидродинамика отрывного обтекания тел. М.: Машиностроение, 1977.
27. *Schnittger J.R.* The aerodynamic mechanism of vibrating compressor blades. Sc. D. Thesis, M.I.T., J. Aeronaut. Sci., 1953.
28. *Sisto F.* Stall flutter in cascades // J. of the Aeronaut. Sci. 1953. Vol. 20, № 9.
29. *Bishop R.E.D., Hassan A.Y.* The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid // Proc. Royal Soc. (London). 1964. Vol. A277. P. 32.
30. *Karman Th.* Über den Mechanismus des Flüssigkeitsund Luftwiderstands // Phys. Z., Bd. 13. 1912. SS. 49–59.
31. *Roshko A.* Experiments on the the flow past a circular Cylinder at very high Reynolds number // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 10. P. 345.
32. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
33. *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
34. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике. В сб. Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. Т. 14. С. 9.
35. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.

Поступила в редакцию 22.01.2009

STALL FLUTTER AS ONE OF MECHANISMS OF TRANSMISSION LINE SELF-OSCILLATIONS

P.S. Landa

Self-oscillations of wires caused by the vortex separation from the wire surface (so called stall flutter) are considered.

Keywords: Stall flutter, wind resonance, Karman wake, self-oscillations.

Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

E-mail: landa@phys.msu.su

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119899, Москва, ГСП В-234, Воробьевы горы, МГУ

