



## АНАЛИЗ АТТРАКТОРОВ СТОХАСТИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОЙ МОДЕЛИ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА»

*И.А. Башкирцева, Л.В. Карпенко, Л.Б. Ряшко*

В работе рассматривается модель популяционной динамики «хищник–жертва» с насыщением хищника. Исследуются точки покоя и предельные циклы системы, проводится анализ их детерминированной устойчивости. Для исследования вероятностных свойств разброса случайных состояний вокруг аттракторов используется аппарат функции стохастической чувствительности. Демонстрируются возможности функции чувствительности в описании особенностей стохастических аттракторов модели «хищник–жертва».

*Ключевые слова:* Популяционная динамика, равновесия, предельные циклы, стохастическая чувствительность.

### Введение

Исследование математических моделей, описывающих взаимодействие популяций, в настоящее время представляет собой классический раздел нелинейной динамики. Начиная с основополагающих работ А. Лотки и В. Вольтерры, качественная теория систем нелинейных дифференциальных уравнений является основным инструментом изучения динамики численности взаимосвязанных сообществ [1–4]. Исследования последних лет показали, что разнообразие, наблюдаемое в поведении нелинейных динамических систем, можно свести к анализу относительно простых режимов (равновесия, циклы) и их качественных преобразований – бифуркаций [5, 6]. Формальный анализ аттракторов соответствующей математической модели позволяет ответить на важные содержательные вопросы об особенностях динамики взаимодействующих популяций и спрогнозировать их поведение в будущем. Так, например, одним из наиболее стандартных переходов является бифуркация равновесие–цикл. Такой переход сопровождается потерей устойчивости простого аттрактора – равновесия и рождением нового, более сложного аттрактора – предельного цикла. Анализ устойчивости соответствующих режимов является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики.

Функционирование динамических систем, как правило, происходит в условиях трудно контролируемых случайных возмущений [7]. Включение в модель случайных возмущений приводит к тому, что решение системы также становится случайным процессом. Исследование нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [8] и продолжено в большом числе работ (см., например [9–13]).

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования показали, что случайные флуктуации могут вызывать неожиданные и интересные явления, наблюдаемые в электронных генераторах, лазерах, механических конструкциях, химических реакциях и биологических системах. Разнообразные индуцированные шумами переходы от простых равновесий через периодические режимы к более сложным хаотическим колебаниям являются центральной проблемой нелинейной стохастической динамики [9, 14–16]. Анализ взаимодействия шума и нелинейности является ключевым моментом для понимания причин и механизмов подобных переходов. Случайные возмущения в нелинейных системах могут вызвать такие разнообразные явления, как стохастический резонанс [17, 18], индуцированные шумами переходы [14], индуцированный шумом порядок [19, 20], индуцированный шумом хаос [21], порожденные шумом новые сложные структуры [22, 23], поддерживаемое шумами распространение фронтов [24]. Во многих работах индуцированные шумами явления трактуются и изучаются в русле нового направления – математической теории стохастических бифуркаций [25]. С точки зрения этой теории, стохастическая бифуркация есть качественное изменение формы стационарной плотности распределения стохастических аттракторов системы. Стохастический аттрактор – это решение стохастической системы, имеющее стационарную плотность распределения случайных состояний. При этом для всякого другого достаточно близкого решения соответствующая плотность распределения стабилизируется и сходится к этой стационарной. Конструкция стохастических аттракторов рассматривалась в [26–29].

Стохастические бифуркации исследовались для целого ряда систем, таких как бруссельатор [30–32], осциллятор Дуффинга [33], ван-дер-Поля [34], Дуффинга–ван-дер-Поля [35, 36], Хопфа [37]. Хорошо известно, что фазовый портрет системы может значительно измениться под воздействием случайных возмущений. Вызванные шумами соответствующие деформации особенно ощутимы вблизи точек бифуркаций. Даже малые шумы вследствие высокой чувствительности аттракторов в зонах бифуркаций могут порождать значительные изменения в динамике системы [38, 39]. Анализ стохастической чувствительности аттракторов является важным новым направлением в исследовании индуцированных шумами переходов.

Полное вероятностное описание возможных в системе стохастических режимов дается с помощью функции плотности распределения, удовлетворяющей уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова. Непосредственное использование этого уравнения уже для систем двух взаимодействующих популяций весьма затруднительно. Важный для практики случай воздействия малых возмущений приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В этой ситуации одним из наиболее распространенных приемов является прямое численное моделирование случайных траекторий с их последующей статистической обработкой.

В настоящее время развивается подход, позволяющий для искомым вероятностных характеристик стохастических аттракторов системы найти соответствующее приближение. Для систем с малыми случайными возмущениями в работе А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина [40] предложен метод, использующий конструкцию квазипотенциала. Для квазипотенциала вблизи аттрактора детерминированной системы может быть найдена [41] квадратичная аппроксимация, позволяющая в итоге получить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределе-

ния. При этом разброс случайных траекторий стохастической системы вокруг детерминированного аттрактора может быть описан с помощью функции стохастической чувствительности (ФСЧ). Данная функция была введена в работах [41, 42], где с ее помощью были исследованы особенности стохастических автоколебаний в моделях Брюсселятора и Лоренца.

В первой части данной работы излагаются необходимые теоретические сведения по анализу стохастических аттракторов общих нелинейных динамических систем. Для случаев стохастических равновесий и циклов вводится конструкция функции стохастической чувствительности, приводятся методы ее построения.

Во второй части работы детально рассмотрены возможности применения ФСЧ для анализа стохастических аттракторов модели «хищник–жертва», учитывающей явление насыщения хищника при росте численности жертвы. Эта модель известна благодаря появлению в ней структурно устойчивых автоколебаний – предельных циклов [43]. В работе проведен детальный сравнительный анализ детерминированной устойчивости и стохастической чувствительности аттракторов этой модели. Для стохастических равновесий и стохастических циклов исследованы особенности разброса случайных траекторий в фазовом пространстве и показано, как изменяются статистические характеристики этого разброса при вариации параметров системы.

## 1. Анализ стохастических равновесий и циклов

Рассмотрим детерминированную динамическую систему, заданную конечным числом нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где  $f(x)$  – достаточно гладкая  $n$ -мерная вектор-функция.

Предполагается, что система (1) имеет экспоненциально устойчивый аттрактор. Классическое исследование локальной устойчивости аттрактора к возмущению начальных данных предполагает переход к линейной системе первого приближения и анализ таких характеристик его устойчивости, как характеристические показатели или мультипликаторы.

Большинство реальных систем функционирует в условиях постоянного воздействия возмущений самой различной природы, так что характеристики детерминированной устойчивости могут оказаться слишком грубыми оценками, не дающими представления о устойчивости модели в реальных условиях. Для исследования динамической системы (1), находящейся под воздействием случайных помех, рассмотрим соответствующую стохастическую систему уравнений Ито

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – параметр интенсивности возмущений;  $\sigma(x)$  – достаточно гладкая  $n \times n$ -матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы;  $w(t)$  –  $n$ -мерный стандартный винеровский процесс.

Под воздействием невырожденных шумов случайные траектории системы (2) покидают детерминированный аттрактор и образуют вокруг него некоторый пучок. В случае, когда вероятностное распределение случайных состояний в этом пучке

с течением времени стабилизируется, можно говорить о наличии у возмущенной системы *стохастического аттрактора*. Полное вероятностное описание стохастического аттрактора системы, находящейся под воздействием шума интенсивности  $\varepsilon$ , дается соответствующей стационарной плотностью распределения  $p(x, \varepsilon)$ .

Для вероятностного описания разброса случайных траекторий в системах с малыми стохастическими возмущениями был предложен подход [40], использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова – *квазипотенциал*

$$v(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln p(x, \varepsilon).$$

В случае малых шумов с помощью квазипотенциала можно записать асимптотику стационарной плотности распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \exp \left( - \frac{v(x)}{\varepsilon^2} \right).$$

В задачах устойчивости, когда основное внимание уделяется поведению системы в малой окрестности, для квазипотенциала достаточно иметь лишь хорошее приближение вблизи аттрактора.

Мы будем анализировать характеристики детерминированной и стохастической устойчивости для двух видов аттракторов – равновесия и предельного цикла.

**1.1. Равновесие.** Пусть аттрактором системы (1) является точка покоя  $\bar{x}$ . В качестве характеристики детерминированной устойчивости точки покоя традиционно используется *характеристический показатель*  $\Lambda = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i$ , где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы  $F = \partial f / \partial x(\bar{x})$  системы первого приближения для (1). Точки покоя, имеющие наименьшие значения характеристического показателя, являются наиболее устойчивыми к начальным возмущениям.

Воздействие стохастических возмущений приводит к тому, что вокруг устойчивой точки покоя формируется облако случайных траекторий. Соответствующий стохастический аттрактор естественно называть *стохастическим равновесием*.

В данном случае для квазипотенциала вблизи равновесия  $\bar{x}$  детерминированной системы (1) используется квадратичная аппроксимация  $v(x) \approx 1/2(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))$ , где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение. Эта аппроксимация позволяет представить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \exp \left( - \frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с ковариационной матрицей  $\varepsilon^2 W$ , характеризующей разброс случайных траекторий стохастической системы (2) вокруг равновесия  $\bar{x}$ .

Пусть  $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq 0$  – собственные числа, а  $h_1, h_2, \dots, h_n$  – ортонормированный базис собственных векторов матрицы  $W$ . При невырожденных шумах значения  $\eta_i$  положительны. При этом величины  $\varepsilon^2 \eta_i$  задают разброс (дисперсию) случайных траекторий в направлении векторов  $h_i$ .

В случае экспоненциальной устойчивости точки покоя  $\bar{x}$ , когда спектр матрицы  $F$  лежит в левой полуплоскости, матрица  $W$  является единственным решением алгебраического уравнения

$$FW + WF^T = -S, \quad (3)$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^\top, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

Матрица  $W$ , связывая интенсивность воздействия  $\varepsilon^2$  с ковариацией  $\varepsilon^2 W$  разброса случайных траекторий вокруг  $\bar{x}$ , играет роль матричного *коэффициента стохастической чувствительности* равновесия  $\bar{x}$ . В качестве общей скалярной характеристики чувствительности точки покоя удобно использовать величину  $m = \max_i \eta_i$  – *показатель стохастической чувствительности*.

**1.2. Предельный цикл.** Теперь рассмотрим случай, когда аттрактором системы (1) выступает предельный цикл  $\Gamma = \{\xi(t) \mid 0 \leq t < T\}$ , задаваемый  $T$ -периодическим решением  $\xi(t)$  системы (1).

Динамика малых отклонений, как и в случае точки покоя, определяется системой первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad (4)$$

где  $F = \partial f / \partial x(\xi(t))$  –  $T$ -периодическая матрица.

Классическими характеристиками устойчивости цикла являются мультипликаторы  $\rho_i$  – собственные числа матрицы монодромии  $B = Z(T)$ , где  $Z(t)$  – фундаментальная матрица системы (4).

Один из мультипликаторов (пусть это будет  $\rho_1$ ) всегда равен единице. Характеристикой детерминированной устойчивости цикла является число  $\rho = \max_i \rho_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ), которое показывает, во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот при малом отклонении начальных данных.

Однако данная логика справедлива только лишь для возмущений, действующих на систему однократно, в некоторый начальный момент времени. Кроме того, мультипликаторы не позволяют различать и сравнивать по степени устойчивости разные участки цикла.

При воздействии стохастических шумов вокруг цикла формируется стационарно распределенный пучок случайных траекторий системы (2), лежащих в некоторой инвариантной для системы окрестности  $U$ . Соответствующий стохастический аттрактор будем называть *стохастическим циклом*.

Пусть  $\Pi_t$  – гиперплоскость, ортогональная циклу в точке  $\xi(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ). Через  $U_t$  обозначим окрестность точки  $\xi(t)$ , лежащую в  $\Pi_t$ :  $U_t = U \cap \Pi_t$ . Предполагается, что  $U_t \cap U_s = \emptyset$  при  $t \neq s$ . Вероятностное описание случайных траекторий в пучке удобно связать со следующей вектор-функцией  $X_t$ . Значения  $X_t$  есть точки пересечения случайных траекторий нелинейной системы (2) с  $U_t$ . Вероятностное распределение траекторий в пучке с течением времени стабилизируется, поэтому случайная переменная  $X_t$  в окрестности  $U_t$  имеет некоторое стационарное распределение с плотностью  $p_t(x, \varepsilon)$ .

Для малых шумов с помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазипотенциала вблизи цикла можно записать экспоненциальную гауссову асимптотику [42]

$$p_t(x, \varepsilon) = K \exp \left( -\frac{(x - \xi(t))^\top W^+(t)(x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением  $m_t = \xi(t)$  и ковариационной матрицей  $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$  («+» – знак псевдообращения).

Это распределение, сосредоточенное в гиперплоскости  $\Pi_t$ , является сингулярным:  $\text{rank} D(t, \varepsilon) \leq n - 1$ . Для невырожденных шумов ( $\det \sigma(x)|_\Gamma \neq 0$ ) имеем  $\text{rank} D(t, \varepsilon) = n - 1$ . Ковариационная матрица  $D(t, \varepsilon)$  характеризует разброс точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью  $\Pi_t$ .

Рассмотрим собственные значения  $\eta_1(t) \geq \eta_2(t) \geq \dots \geq \eta_n(t) \geq 0$  и собственные векторы  $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$  матрицы  $W(t)$ . В силу вырожденности  $W(t)$ , собственное значение  $\eta_n(t) \equiv 0$ . Остальные собственные значения и соответствующие им собственные векторы характеризуют разброс пучка в гиперплоскости  $\Pi_t$  по величине и направлению. Матрица  $W(t)$ , играющая роль *коэффициента стохастической чувствительности* цикла, является решением системы [41]

$$\begin{aligned} \dot{W} &= F(t)W + WF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \\ W(t+T) &= W(t), \\ W(t)r(t) &= 0, \quad r(t) = f(\xi(t)), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^\top(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)), \\ P(t) &= P_{f(\xi(t))}, \quad P_r = I - \frac{rr^\top}{r^\top r}. \end{aligned}$$

Здесь  $P_r$  – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору  $r \neq 0$ . Эта система, благодаря экспоненциальной устойчивости предельного цикла, имеет единственное решение. Необходимые теоретические сведения по решению системы (5) приведены в [42].

В случае цикла на плоскости ( $n = 2$ ) матрица стохастической чувствительности  $W(t)$  и проекционная матрица  $P(t)$  имеют ранг, равный единице, и представимы в виде

$$W(t) = \mu(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^\top(t).$$

Здесь  $p(t)$  – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору  $f(\xi(t))$ , а значит и циклу  $\Gamma$  в точке  $\xi(t)$ ;  $\mu(t) > 0$  –  $T$ -периодическая скалярная функция, задающая разброс пучка по нормали  $p(t)$  к циклу, – *функция стохастической чувствительности* (ФСЧ).

Функция  $\mu(t)$  является решением [41] краевой задачи

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t), \quad \mu(0) = \mu(T)$$

с  $T$ -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t)$$

и может быть найдена в явном виде

$$\mu(t) = g(t)(c + h(t)), \quad (6)$$

где

$$g(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad h(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{g(s)}ds, \quad c = \frac{g(T)h(T)}{1 - g(T)}.$$

Функция стохастической чувствительности определена в точках цикла  $\Gamma$  и характеризует на различных участках этого цикла разброс пучка случайных траекторий. Эта функция позволяет сравнивать степень чувствительности разных частей цикла к стохастическим помехам и предсказывать тонкие эффекты случайных воздействий.

В анализе чувствительности предельного цикла к случайным возмущениям важную роль играет величина  $m = \max_{[0;T]} \mu(t)$ , которую мы будем называть *показателем стохастической чувствительности* цикла [15]. Эта величина является удобной характеристикой цикла в целом.

## 2. Аттракторы модели «хищник–жертва»

Модель популяционной динамики «хищник–жертва» с насыщением хищника задается следующей двумерной нелинейной системой [43]:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - a \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2, \\ \dot{y} = b \frac{x}{1+x} y - y, \end{cases} \quad (7)$$

где  $x$  – плотность популяции жертвы,  $y$  – плотность популяции хищников,  $a$  – удельная скорость потребления популяцией хищника популяции жертвы при единичной плотности обеих популяций,  $b/a$  – коэффициент переработки потребленной хищником биомассы жертвы в свою собственную биомассу,  $\gamma$  – коэффициент ограниченности ресурса, потребляемого жертвами. Параметры  $a$ ,  $b$  и  $\gamma$  положительны. Система имеет биологический смысл только при неотрицательных значениях координат  $x$  и  $y$ .

В отсутствие жертв популяция хищников экспоненциально вымирает – этой ситуации отвечает положение равновесия  $M_1 = (0; 0)$ . В отсутствие хищников плотность популяции жертв стабилизируется к значению, равному  $1/\gamma$ , – такой ситуации соответствует равновесие  $M_2 = (1/\gamma; 0)$ .

Кроме этих двух вырожденных положений равновесия, в системе также существует единственное невырожденное, отвечающее сосуществованию хищников и жертв. Оно соответствует точке покоя

$$M_3 \left( \frac{1}{b-1}; \frac{b}{a} \cdot \frac{b-\gamma-1}{(b-1)^2} \right).$$

Для сохранения биологического смысла этого равновесия требуются некоторые дополнительные ограничения:  $b > 1$  и  $\gamma < b - 1$ . Мы будем изучать динамику системы в окрестности этого положения равновесия.

**2.1. Равновесие.** Характер поведения системы (7) вблизи точки покоя  $M_3$  можно исследовать с помощью системы первого приближения с матрицей

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \left(1 - \gamma \frac{b+1}{b-1}\right) & -\frac{a}{b} \\ \frac{b-\gamma-1}{a} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Собственные числа матрицы  $F$  имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{b} \left(1 - \gamma \frac{b+1}{b-1}\right) \pm \sqrt{\Delta} \right],$$

где

$$\Delta = \gamma^2 \left( \frac{1}{b} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right)^2 + \gamma \frac{2}{b} \left( 2 - \frac{1}{b} \cdot \frac{b+1}{b-1} \right) + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{b} - 4.$$

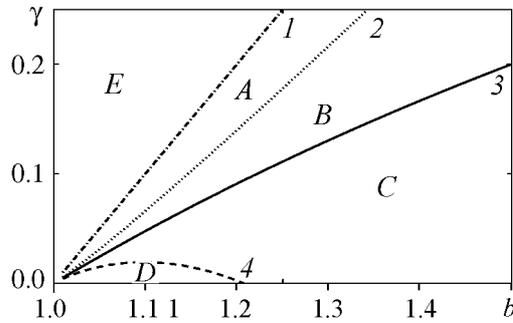


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1) для точки покоя  $M_3$

Отметим, что параметр  $a$  не влияет на собственные числа матрицы (8). Зафиксируем значение  $a = 2$  и в дальнейшем будем изучать динамику системы (7) в зависимости от параметров  $b$  и  $\gamma$ .

По результатам анализа собственных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в плоскости параметров  $b$  и  $\gamma$  получена бифуркационная диаграмма (рис. 1).

В зонах  $A$  и  $B$  точка покоя  $M_3$  устойчива (зона  $A$  — устойчивый узел,  $B$  — устойчивый фокус). Зона  $A$  ограничена прямой  $\gamma = b - 1$  (граница 1) и кривой  $\gamma = \delta(b)$  (граница 2), где

$$\delta(b) = \frac{b-1}{b+1} + 2b \left( \frac{b-1}{b+1} \right)^2 \left( \sqrt{\frac{2b}{b-1}} - 1 \right).$$

При переходе из зоны  $B$  в зону  $C$  через границу 3, задаваемую соотношением  $\gamma = (b-1)/(b+1)$ , равновесие  $M_3$  теряет устойчивость (зона  $C$  — неустойчивый фокус, зона  $D$  — неустойчивый узел).

Зоны  $C$  и  $D$  разделяет граница 4, задаваемая соотношением

$$\gamma = \frac{b-1}{b+1} - 2b \left( \frac{b-1}{b+1} \right)^2 \left( \sqrt{\frac{2b}{b-1}} + 1 \right).$$

В зоне  $E$  фазовый портрет — седло. Потеря устойчивости точки покоя в зонах  $C$  и  $D$  сопровождается рождением предельного цикла. При этом граница 3 изображает точки бифуркации Андронова–Хопфа.

Иследуем чувствительность равновесия  $M_3$  к возмущениям начальных данных в зоне  $A \cup B$ , где оно устойчиво.

Характеристический показатель  $\Lambda$  системы (7) в зоне  $A$  равен

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{b} \left( 1 - \gamma \frac{b+1}{b-1} \right) + \sqrt{\Delta} \right],$$

а в зоне  $B$

$$\Lambda = \frac{1}{2b} \left( 1 - \gamma \frac{b+1}{b-1} \right).$$

Наименьшие значения характеристического показателя в зоне  $A \cup B$ , при каждом фиксированном значении параметра  $b$ , достигаются на границе 2 ( $\gamma = \delta(b)$ ), разделяющей зоны  $A$  устойчивого узла и  $B$  устойчивого фокуса. В точках этой кривой характеристический показатель задаётся формулой  $\Lambda = \Lambda(b) = (b-1)/(b+1) \left( 1 - \sqrt{2b/(b-1)} \right)$ . При движении вдоль границы 2, при  $b \rightarrow +\infty$ , характеристический показатель  $\Lambda(b)$  убывает и стабилизируется:  $\Lambda(b) \rightarrow 1 - \sqrt{2}$  (см. ниже п. 2.2).

Рассмотрим наряду с детерминированной системой (7) соответствующую стохастически возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - a \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2 + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = b \frac{x}{1+x} y - y + \varepsilon \dot{w}_2, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\varepsilon$  – интенсивность шумов,  $w_1$  и  $w_2$  – стандартные независимые винеровы процессы.

**2.2. Стохастическое равновесие.** Состояния стохастической системы (9) в окрестности равновесия  $M_3$  изображены на рис. 2. Как видно из рисунка, разброс состояний вдоль разных направлений существенно различается и зависит от параметров системы.

Детальное описание разброса может быть получено с помощью матрицы стохастической чувствительности  $W$  – решения уравнения (3). Для равновесия  $M_3$  си-

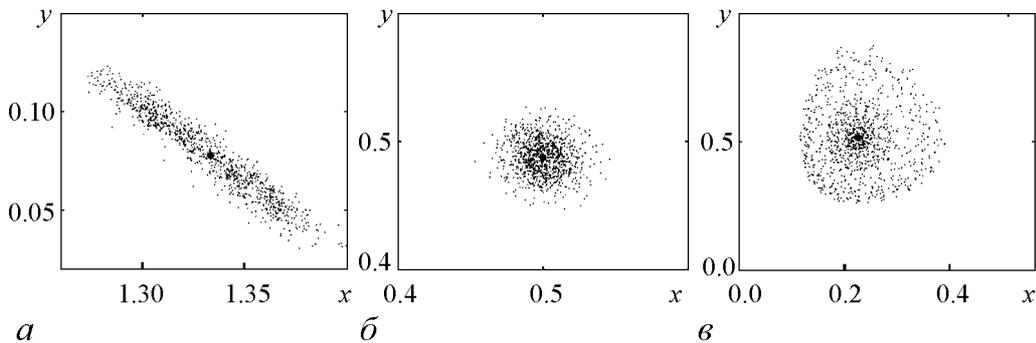


Рис. 2. Разброс случайных состояний системы (9) для  $\gamma = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.005$  и различных значений  $b$ :  $a - 1.75$ ,  $б - 3.0$ ,  $в - 5.0$

стемы (9) решением уравнения (3) является матрица

$$W = \frac{1}{2g'_x} \begin{pmatrix} \frac{f'_y - g'_x}{f'_x} & -1 \\ -1 & \frac{f_x'^2 - f'_y g'_x + g_x'^2}{f'_x f'_y} \end{pmatrix},$$

где

$$f(x, y) = x - a \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2, \quad g(x, y) = b \frac{x}{1+x} y - y, \quad x = \frac{1}{b-1}, \quad y = \frac{b}{a} \cdot \frac{b-\gamma-1}{(b-1)^2}.$$

Характеристики стохастической чувствительности – собственные числа  $\eta_1$  и  $\eta_2$  матрицы  $W$  – задают разброс случайных траекторий в направлении соответствующих собственных векторов. Графики функций  $\eta_1(b)$  и  $\eta_2(b)$  при  $\gamma = 0.7$  представлены на рис. 3 (сплошные линии).

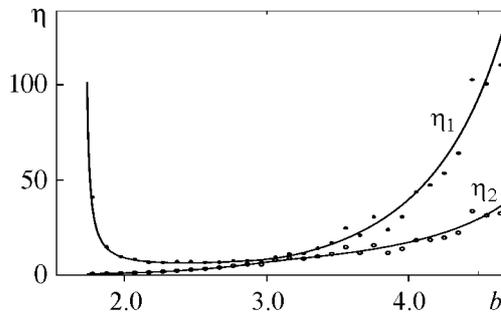


Рис. 3. Стохастическая чувствительность равновесия  $M_3$ :  $\eta_{1,2}$  (сплошные линии) и  $\tilde{\eta}_{1,2}$  (дискретные значения) при  $b \in (1.75, 5)$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.005$

Характер поведения функций  $\eta_1(b)$  и  $\eta_2(b)$  на рассматриваемом интервале неоднороден. В середине интервала они близки друг к другу, а на концах интервала существенно отличаются.

Как уже было сказано, собственные числа  $\eta_1$  и  $\eta_2$  матрицы  $W$  описывают разброс случайных траекторий в направлении собственных векторов  $h_1$  и  $h_2$ . Проследим, как связано изменение значений функций  $\eta_1(b)$  и  $\eta_2(b)$  с изменением формы соответствующего облака случайных состояний системы (см. рис. 2 и рис. 3).

При приближении параметра  $b$  к бифуркационному значению  $b = 1.7$  (граница  $I$  – граница устойчивости точки  $M_3$ ) старшее из собственных чисел  $\eta_1$  устремляется в бесконечность, а младшее  $\eta_2$  стремится к нулю. Соответственно, облако случайных траекторий значительно вытягивается в одном направлении и сжимается в направлении, перпендикулярном к нему (рис. 2, а).

При  $b = 3$  собственные числа достаточно малы и отличаются незначительно, и облако имеет практически круглую форму и небольшой размер (рис. 2, б).

Когда же параметр  $b$  приближается к другому бифуркационному значению  $b = 17/3$  (граница устойчивости 3), оба собственных числа устремляются в бесконечность, но с различной скоростью. Как видно из рис. 2, в, облако имеет большой размер и сильнее вытянуто в одном из направлений.

По результатам прямого численного моделирования случайных состояний системы (9) были найдены собственные значения  $\tilde{\eta}_1$  и  $\tilde{\eta}_2$  матрицы эмпирической чувствительности

$$\tilde{W} = \frac{1}{\varepsilon^2} D(\varepsilon),$$

где  $D(\varepsilon)$  – эмпирическая ковариационная матрица случайных состояний системы (9). На рис. 3 значения  $\tilde{\eta}_1$  обозначены звездочками, а  $\tilde{\eta}_2$  – кружочками. Как видим, значения эмпирической чувствительности  $\tilde{\eta}_1$  и  $\tilde{\eta}_2$  хорошо совпадают с  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

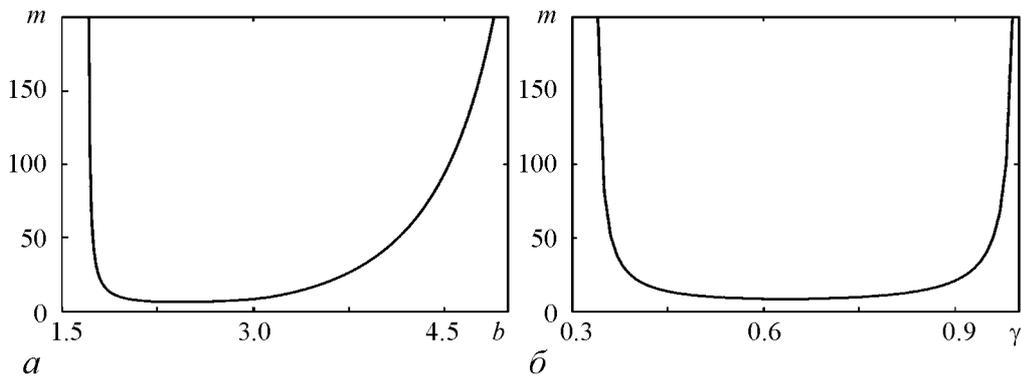


Рис. 4. Показатель  $m(b, \gamma)$  стохастической чувствительности равновесия  $M_3$  в сечениях:  $b \in (1.75, 6)$ ,  $\gamma = 0, 7$  (а);  $\gamma \in (0.35, 1)$ ,  $b = 2$  (б)

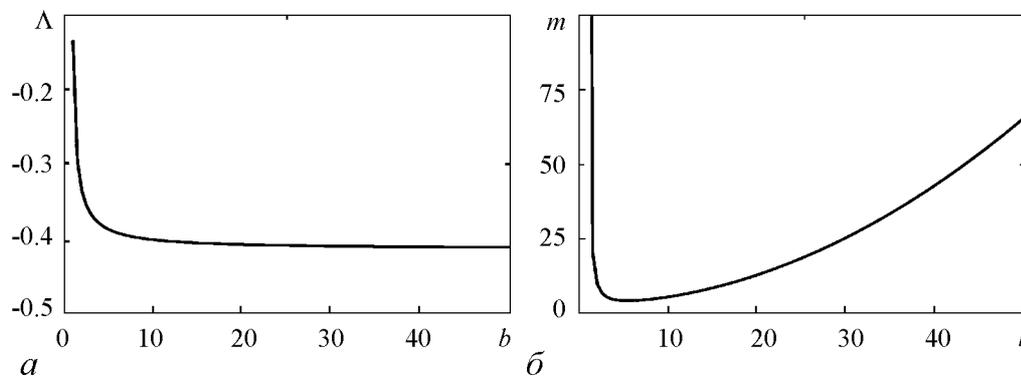


Рис. 5. Характеристики устойчивости равновесия  $M_3$  при  $\gamma = \delta(b)$ :  $a$  – характеристический показатель;  $\bar{b}$  – показатель стохастической чувствительности

Показатель  $m = \max(\eta_1, \eta_2)$  служит общей характеристикой стохастической чувствительности точки покоя. Графики зависимости функции  $m$  от параметров  $b$  и  $\gamma$  приведены на рис. 4.

В области  $A \cup B$  функция  $m$  имеет абсолютный минимум при  $b = 4.05$ ,  $\gamma = 1.945$ , равный  $m_{\min} = 3.4207$ . Точка покоя при таких параметрах  $b$  и  $\gamma$  является наименее чувствительной к стохастическим возмущениям.

Напомним, что с точки зрения детерминированной теории, степень устойчивости точки  $M_3$ , определяемая соответствующим характеристическим показателем, в области  $A \cup B$  тем выше, чем дальше мы продвигаемся вдоль границы  $\gamma = \delta(b)$ , при  $b \rightarrow +\infty$  (рис. 5, а). Показатель же стохастической чувствительности  $m$  в этом направлении неограниченно растет ( $m \rightarrow +\infty$ ) (рис. 5, б).

Как видно из проведенных исследований, детерминированный и стохастический анализ дают нам принципиально разные результаты. Тот факт, что в присутствии шума характеристические показатели не могут служить хорошим критерием устойчивости, отмечался и в [44].

**2.3. Предельный цикл.** Рассмотрим динамику модели (7) в зоне  $C \cup D$ , где вокруг неустойчивого равновесия  $M_3$  существует устойчивый предельный цикл  $\Gamma$ . Основной характеристикой детерминированной устойчивости цикла является мультипликатор  $\rho = \rho_2$ , так как  $\rho_1 \equiv 1$ .

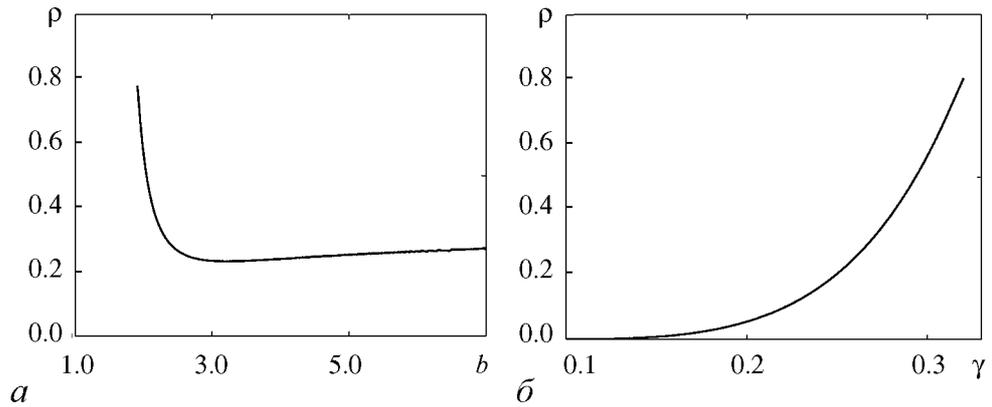


Рис. 6. Мультипликатор  $\rho(b, \gamma)$  в сечениях:  $b \in (2, 7)$ ,  $\gamma = 0.3$  (а);  $\gamma \in (0.1, 0.32)$ ,  $b = 2$  (б)

Графики зависимости  $\rho$  от параметров  $b$  и  $\gamma$  приведены на рис. 6. С точки зрения мультипликатора, наиболее устойчивыми являются предельные циклы, соответствующие значениям  $\gamma$ , близким к нулю. Такие циклы наименее чувствительны к однократному начальному возмущению.

**2.4. Стохастический цикл.** В присутствии стохастических шумов вокруг цикла формируется стационарно распределенный пучок случайных траекторий. На рис. 7 изображен стохастический цикл, образованный случайными траекториями системы (9). Как видно, разброс траекторий вдоль невозмущенного детерминированного цикла неоднороден. Соответствующий перепад дисперсии представлен на рис. 8, где изображена кривая стохастической функции чувствительности  $\mu(t)$  и дискретные значения соответствующей эмпирической функции чувствительности  $\tilde{\mu}(t)$ , найденные прямым численным моделированием случайных траекторий системы (9) для цикла с параметрами  $a = 2$ ,  $b = 2$ ,  $\gamma = 0.3$ . Хорошее совпадение значений  $\mu(t)$  и  $\tilde{\mu}(t)$  позволяет в дальнейшем анализе особенностей разброса случайных траекторий вдоль цикла использовать функцию стохастической чувствительности  $\mu(t)$ . Экстремумы функции  $\mu(t)$  хорошо передают неравномерность разброса траекторий при движении вдоль цикла.

Графики, демонстрирующие поведение показателя стохастической чувствительности  $m$  в зависимости от параметров  $b$  и  $\gamma$ , представлены на рис. 9. Как ви-

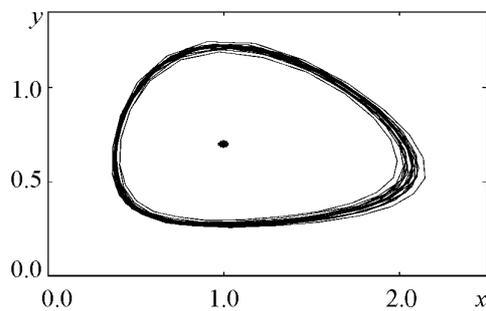


Рис. 7. Предельный цикл системы (8) и случайные траектории системы (9) при  $b = 2$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\varepsilon = 0.005$

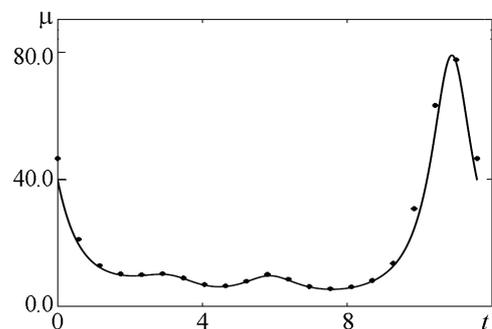


Рис. 8. Стохастическая чувствительность цикла системы (9) при  $b = 2$ ,  $\gamma = 0.3$

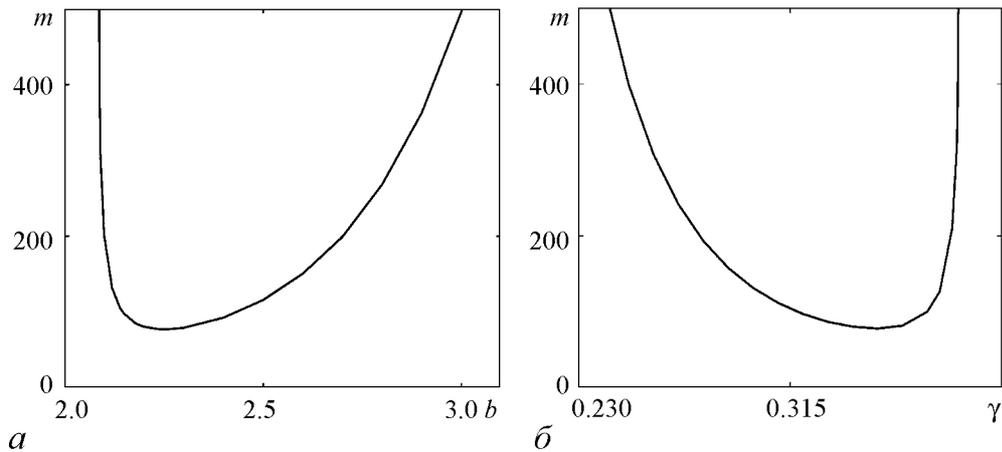


Рис. 9. Зависимость  $m$  от  $b$  и  $\gamma$ :  $b \in (1.9, 2.7)$ ,  $\gamma = 0.3$  (а);  $\gamma \in (0.25, 0.32)$ ,  $b = 2$  (б)

дим, при вариации параметров показатель стохастической чувствительности цикла существенно меняется. Минимум функции  $m(b, \gamma)$  в области  $C \cup D$  достигается при  $b = 2.25$ ,  $\gamma = 0.35$  и равен  $m_{\min} = 77.39$ . Стохастический цикл системы (9) при таких параметрах является наименее чувствительным в области  $C \cup D$  к случайным возмущениям.

Связь изменения показателя стохастической чувствительности с конфигурацией стохастических циклов для  $\gamma = 0.35$  можно проследить на рис. 10. Между внешним ( $b = 3.2$ ) и внутренним ( $b = 2.08$ ) стохастическими циклами располагается более узкий цикл ( $b = 2.25$ ), соответствующий минимуму показателя стохастической чувствительности.

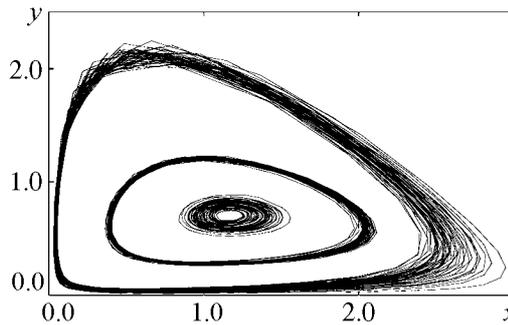


Рис. 10. Стохастические циклы системы (9) для  $\gamma = 0.35$ ,  $\epsilon = 0.005$  при  $b = 2.08$  (внутренний);  $b = 2.25$  (средний);  $b = 3.2$  (внешний)

Сравнивая рис. 6 и рис. 9, можно отметить, что результаты детерминированного и стохастического анализа предельных циклов (как и выше рассмотренных равновесий) принципиально различаются. При стремлении  $\gamma \rightarrow 0$  значение показателя стохастической чувствительности  $m \rightarrow \infty$ , в то время как мультипликатор  $\rho \rightarrow 0$ . Это означает, что предельные циклы, наиболее устойчивые к детерминированным возмущениям начальных данных, имеют высокую стохастическую чувствительность.

### Заключение

В настоящей работе рассмотрены вопросы анализа устойчивости и чувствительности регулярных аттракторов (равновесий и циклов) нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Под воздействием шумов случайные траектории системы покидают детерминированный ат-

трактор и образуют вокруг него некоторый пучок – стохастический аттрактор. Для стохастических равновесий и циклов излагаются необходимые теоретические сведения по аппроксимации и исследованию соответствующих вероятностных распределений, использующие конструкцию функции стохастической чувствительности.

В работе на примере классической модели популяционной динамики «хищник–жертва», учитывающей явление насыщения хищника при росте численности жертвы, проведен сравнительный анализ детерминированной устойчивости и стохастической чувствительности соответствующих аттракторов – устойчивого равновесия и предельного цикла. На основе разработанного авторами метода функции стохастической чувствительности получено параметрическое описание особенностей разброса случайных состояний вокруг равновесия, отражающего стационарный режим сосуществования взаимодействующих популяций, в присутствии случайных возмущений. Стохастическая чувствительность равновесия задается  $2 \times 2$ -матрицей. Ее собственные числа и векторы достаточно наглядно определяют пространственную ориентацию и размер облака случайных состояний.

В работе проиллюстрирована связь изменения собственных чисел матрицы чувствительности с изменением формы соответствующего облака случайных состояний системы при вариации параметров. Если значения собственных чисел существенно различны, то облако случайных траекторий значительно вытянуто в направлении старшего собственного вектора. Если собственные числа отличаются незначительно, то облако имеет практически круглую форму. При увеличении собственных чисел размер облака увеличивается. Старшее собственное значение служит общей характеристикой стохастической чувствительности точки покоя. В работе получены значения параметров системы, при которых равновесие является наименее чувствительным к стохастическим возмущениям.

В случае цикла функция стохастической чувствительности одномерна и характеризует разброс случайных траекторий в каждой точке цикла по направлению нормали. Для стохастических циклов системы «хищник–жертва» в работе построены соответствующие функции стохастической чувствительности и исследована их зависимость от параметров системы. При вариации параметров показатель стохастической чувствительности цикла существенно меняется. В пространстве параметров найден минимум показателя стохастической чувствительности, при котором цикл системы является наименее чувствительным к случайным возмущениям.

Показано, что чувствительность к шуму не определяется только лишь традиционно используемыми показателями Ляпунова траектории на аттракторе. Для исследуемой популяционной модели значения параметров, при которых детерминированная система максимально устойчива к начальному возмущению, могут в то же время соответствовать максимальной чувствительности системы к шуму. Полученные в работе результаты характеризуют введенную функцию стохастической чувствительности как достаточно простую и наглядную конструкцию, позволяющую отслеживать тонкие эффекты воздействия случайных возмущений на равновесия и циклы нелинейных систем.

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 07-01-96079урал, 09-01-00026, 09-08-00048 и Федерального агентства по образованию 2.1.1/2571.*

## Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1972, вып. 25. С. 100.
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
4. Turchin P. Complex population dynamics: A theoretical/empirical synthesis, Princeton University Press, 2003.
5. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Институт компьютерных исследований, 2002.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
7. Музычук О.В. Вероятностные характеристики системы «хищник–жертва» со случайно изменяющимися параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 2–3. С. 80.
8. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
9. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
10. Рытов С.М. Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
11. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
13. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
14. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. С. 400.
15. Landa P.S., McClintock P.V.E. Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol. 323. P. 1.
16. Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // Physics Reports. 2004. Vol. 392. P. 321.
17. Gammaitoni L. et al. Stochastic resonance // Rev. Mod. Phys. 1998. Vol. 70. P. 223.
18. McDonnell M.D., Stocks N.G., Pearce C.E.M., Abbott D. Stochastic resonance: From suprathreshold stochastic resonance to stochastic signal quantization. Cambridge University Press, 2008.
19. Matsumoto K., Tsuda I. Noise induced order // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 31. P. 87.
20. Gassmann F. Noise-induced chaos-order transitions // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. P. 2215.
21. Gao J.B., Hwang S.K., Liu J.M. When can noise induce chaos? // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 1132.
22. Zaks M.A., Sailer X., Schimansky-Geier L., Neiman A.B. Noise induced complexity: From subthreshold oscillations to spiking in coupled excitable systems // Chaos. 2005. Vol. 15. P. 026117.

23. *Agez G., Glorieux P., Taki M., Louvergneaux E.* Two-dimensional noise-sustained structures in optics: Theory and experiments // *Phys. Rev. A.* 2006. Vol. 74. P. 043814.
24. *Clerc M.G., Falcon C., Tirapegui E.* Front propagation sustained by additive noise // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74. P. 011303.
25. *Arnold L.* *Random Dynamical Systems.* Springer-Verlag, 1998.
26. *Бланк М.Л.* Конечномерные стохастические аттракторы бесконечномерных динамических систем // *Функц. анализ и его прил.* 1986. 20:2. С.54.
27. *Бланк М.Л.* Малые возмущения хаотических динамических систем // *Успехи мат. наук.* 1989. Т. 44, Вып. 6(270). С. 3.
28. *Scheutzw M.* Comparison of various concepts of a random attractor: A case study // *Arch. Math.* 2002. Vol. 78. P. 233.
29. *Schmalfluss B.* The random attractor of the stochastic Lorenz system // *ZAMP.* 1997. Vol. 48. P. 951.
30. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // *Fluctuations and Sensitivity in Equilibrium Systems / ed. by W. Horsthemke and D.K. Kondepudi.* Berlin: Springer. 1984. P. 143.
31. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
32. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* The stochastic Brusselator: Parametric noise destroys Hopf bifurcation // *Stochastic Dynamics.* Bremen. 1997. P. 71. New-York: Springer, 1999.
33. *Malick K., Marcq P.* Stability analysis of noise-induced Hopf bifurcation // *Eur. Phys. J.* 2003. Vol. 36. P. 119.
34. *Leung H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model // *Physica A.* 1998. Vol. 254. P. 146.
35. *Namachchivaya N.Sri.* Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitations // *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 110. P. 923.
36. *Schenk-Hoppe K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear Dynamics.* 1996. Vol. 11. P. 255.
37. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances// *Chaos, Solitons and Fractals.* 2009. Vol. 39. P. 7.
38. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // *Physica A.* 2000. Vol. 278. P. 126.
39. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic dynamo model for subcritical transition // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 066307.
40. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
41. *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // *Изв.вузов.Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Т. 6, № 5. С. 19.
42. *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т. 9, № 6. С. 104.

43. *Rosenzweig M.L., MacArthur R.H.* Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions // *Amer. Natur.* 1963. Vol. 97. P. 209.
44. *Paladin G., Serva M., Vulpiani A.* Complexity in dynamical systems with noise // *Phys. Rev. Letters.* 1995. Vol. 74, № 1. P. 66.

*Поступила в редакцию 25.01.2008  
После доработки 7.03.2009*

## ANALYSIS OF ATTRACTORS FOR STOCHASTICALLY FORCED «PREDATOR–PREY» MODEL

*I.A. Bashkirtseva, L.V. Karpenko, L.B. Ryashko*

We consider the population dynamics model «predator–prey». Equilibria and limit cycles of system are studied from both deterministic and stochastic points of view. Probabilistic properties of stochastic trajectories are investigated on the base of stochastic sensitivity function technique. The possibilities of stochastic sensitivity function to analyse details and thin features of stochastic attractors are demonstrated.

*Keywords:* Population dynamics, equilibria, limit cycles, stochastic sensitivity.



*Башкирцева Ирина Адольфовна* – родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

E-mail: [irina.bashkirtseva@usu.ru](mailto:irina.bashkirtseva@usu.ru)  
Уральский государственный университет  
620083, Екатеринбург, Ленина, 51



*Карпенко Лариса Владимировна* – родилась в 1985 году, окончила Уральский госуниверситет (2008), аспирант кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – стохастические модели популяционной динамики.

E-mail: [slayer-13@mail.ru](mailto:slayer-13@mail.ru)  
Уральский государственный университет  
620083, Екатеринбург, Ленина, 51



*Ряшко Лев Борисович* – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

E-mail: [lev.ryashko@usu.ru](mailto:lev.ryashko@usu.ru)  
Уральский государственный университет  
620083, Екатеринбург, Ленина, 51