



УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ В СИСТЕМЕ ИКЕДЫ

Пространственно-временная модель

Н.М. Рыскин, О.С. Хаврошин

Метод управления хаосом в кольцевом резонаторе, содержащем среду с кубической фазовой нелинейностью (система Икеды), предложенный в работе [1], рассматривается в рамках распределенной пространственно-временной модели, которая описывается нелинейным уравнением Шрёдингера с граничным условием, содержащим запаздывание. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность предложенного метода. В случае, когда дисперсия нелинейной среды мала, полученные результаты хорошо согласуются с приближенной теорией, основанной на точечном отображении [1]. В случае сильной дисперсии, когда нестационарное поведение системы, в основном, обусловлено модуляционной неустойчивостью, динамика носит более сложный характер, что связано с процессами конкуренции различных собственных мод резонатора. Показано, что подбором параметров управляющей цепи обратной связи удается подавить автомодуляционные колебания и обеспечить устойчивость периодических режимов в широком диапазоне параметров.

Ключевые слова: Управление хаосом, кольцевой нелинейный резонатор, запаздывающая обратная связь, нелинейное уравнение Шрёдингера, модуляционная неустойчивость.

Введение

В работе [1] была предложена схема управления хаосом в системе Икеды, которая представляет собой кольцевой резонатор, содержащий отрезок среды с кубической фазовой нелинейностью, замкнутый в кольцо цепью обратной связи (ОС) с задержкой [2–4]. Резонатор возбуждается внешним гармоническим сигналом. Метод основан на введении дополнительной цепи обратной связи, параметры которой подбираются таким образом, чтобы спектральные компоненты сигнала на основной частоте, прошедшие по двум ветвям цепи ОС, оказывались в фазе, а на паразитных частотах – в противофазе, и таким образом подавляли бы друг друга. Математическая модель системы Икеды (см. [1] и цитированную там литературу) описывается нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ)

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (1)$$

которое является основной моделью распространения огибающей квазигармонической волны в нелинейной среде с дисперсией [5–7], с запаздывающим граничным условием

$$A(0, t) = A_{\text{in}} e^{i\omega t} + \rho \left[(1 - r) e^{i\psi_1} A(l, t - \Delta t_1) + r e^{i\psi_2} A(l, t - \Delta t_2) \right]. \quad (2)$$

Здесь $A(x, t)$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда сигнала; V – групповая скорость; ω_0'' – параметр дисперсии групповой скорости; β – параметр нелинейности; l – протяженность нелинейной среды; A_{in} и ω – амплитуда и частота внешнего сигнала; $\Delta t_{1,2}$ и $\psi_{1,2}$ – времена задержки и набег фазы сигнала в соответствующей цепи ОС; ρ – параметр, характеризующий глубину обратной связи; r определяет соотношение амплитуд сигналов в первой и второй цепи ОС. Последние два параметра удовлетворяют условиям $0 < \rho < 1$, $0 < r < 1$. При $r = 0$ имеем обычную систему Икеды с единственным контуром обратной связи [4, 8].

Как показано в [1], при выборе параметров $\psi_{1,2}$ и $\Delta t_{1,2}$ в соответствии с соотношениями

$$\psi_1 = 2\pi n + \psi_2 + \omega(\Delta t_1 - \Delta t_2), \quad (3)$$

$$\Omega(\Delta t_2 - \Delta t_1) = 2\pi m + \pi \quad (4)$$

(ω – частота основного сигнала, Ω – частота паразитной модуляции), компоненты сигнала на основной частоте после прохождения двух ветвей ОС оказываются в фазе, а на паразитных частотах $\omega \pm \Omega$ – в противофазе. Таким образом, можно осуществить подавление автомодуляции и стабилизировать режим периодических колебаний на частоте внешнего воздействия.

Анализ предложенной схемы управления хаосом в [1] проводился на основе точечного отображения

$$A_{n+1} = A_{\text{in}} + \rho e^{i\psi} \left[(1 - r) A_n e^{i|A_n|^2} + r A_{n-1} e^{i|A_{n-1}|^2} \right], \quad (5)$$

следующего из (1), (2) в случае, когда можно пренебречь дисперсией. Здесь A_n – комплексная амплитуда сигнала в n -й момент дискретного времени $t_n = n\tau$, где $\tau = \Delta t_1 + l/V$. При $r = 0$ (5) переходит в отображение Икеды, которое относится к числу эталонных моделей нелинейной динамики и хорошо изучено [3, 4]. Результаты теоретического анализа и численного моделирования показали возможность эффективного подавления режимов автомодуляции и значительного расширения диапазона параметров, в котором устойчивы периодические колебания.

Однако анализ на основе отображения (5) носит приближенный характер. В настоящей работе рассматривается управление пространственно-временной динамикой в исходной распределенной системе, которая описывается НУШ (1) с запаздывающим граничным условием (2). Как было показано в работе [8], данная система демонстрирует два различных сценария поведения. В случае слабой дисперсии динамика системы во многом аналогична поведению отображения Икеды. В частности, период автомодуляции приблизительно равен 2τ , а с увеличением амплитуды внешнего воздействия наблюдается сценарий перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. При сильной дисперсии, если выполнен критерий Лайтхилла $\beta\omega_0'' > 0$ [5–7], автомодуляция обусловлена модуляционной неустойчивостью. В этом случае период автомодуляции определяется не временем запаздывания τ , а частотой, для которой инкремент модуляционной неустойчивости принимает

максимальное значение, а переход к хаосу с увеличением A_{in} происходит, в основном, через разрушение квазипериодического движения.

Отметим, что, как было показано в работах [9, 10], модуляционная неустойчивость может быть либо абсолютной, либо конвективной. В первом случае автомодуляция возникает в среде без внешней обратной связи. Физическая причина появления абсолютной неустойчивости заключается в том, что при достаточно большой амплитуде сигнала диапазон неустойчивых возмущений расширяется и начинает захватывать область волновых чисел, где групповая скорость отрицательна, что приводит к возникновению внутренней распределенной обратной связи [9, 10]. Необходимо, однако, учитывать, что принципиальную роль в данном случае играет присутствие волн с отрицательной групповой скоростью, то есть абсолютная неустойчивость возможна лишь в окрестности критической частоты. Ниже мы будем рассматривать случай, когда неустойчивость является конвективной, что имеет место при выполнении условия [9, 10]

$$\beta |A_0|^2 < \frac{V^2}{2\omega_0''} + \omega, \quad (6)$$

где A_0 – амплитуда стационарного состояния. В дальнейшем значения управляющих параметров всегда выбираются таким образом, что условие (6) выполняется.

1. Методика численного моделирования

Численное интегрирование НУШ (1) проводилось с помощью конечно-разностной схемы типа «предиктор–корректор». Пусть известны значения поля в узлах пространственной сетки в некоторый момент времени $A_j^n = A(t = n\Delta t; x = j\Delta x)$. Здесь Δt и Δx – шаги дискретизации по времени и координате, соответственно. На первом этапе (предиктор) находятся значения поля в промежуточный момент времени $A_j^{n+1/2}$. При этом используется чисто неявная схема вида

$$\begin{aligned} \frac{A_j^{n+1/2} - A_j^n}{\Delta t/2} = & -V \cdot \frac{A_j^{n+1/2} - A_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x} + \\ & + \frac{i\omega_0''}{2} \cdot \frac{A_{j+1}^{n+1/2} - 2A_j^{n+1/2} + A_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + i\beta \left| A_j^{n+1/2} \right|^2 A_j^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Разностное уравнение (7) решается методом правой прогонки. При этом в нелинейное слагаемое вначале подставляется значение $\left| A_j^n \right|$, а затем решение уточняется с помощью итераций. Затем по полученным значениям $A_j^{n+1/2}$ рассчитывается поле в момент времени $(n+1)\Delta t$:

$$\begin{aligned} \frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} = & -V \cdot \frac{A_j^{n+1/2} - A_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x} + \\ & + \frac{i\omega_0''}{2} \cdot \frac{A_{j+1}^{n+1/2} - 2A_j^{n+1/2} + A_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + i\beta \left| A_j^{n+1/2} \right|^2 A_j^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку правые части у выражений (7) и (8) совпадают, последнее существенно упрощается

$$A_j^{n+1} = 2A_j^{n+1/2} - A_j^n. \quad (9)$$

Получившаяся конечно-разностная схема имеет второй порядок точности как по координате, так и по времени и является безусловно устойчивой (см., например, [11]). Точность расчетов контролировалась уменьшением шага по координате и времени; большинство расчетов проводилось при $\Delta t = 0.005$, $\Delta x = 0.1$.

Граничные и начальные условия ставятся следующим образом. Начальное распределение поля вдоль системы предполагается нулевым. На левой границе граничное условие ставится в соответствии с соотношением (2) с той лишь разницей, что для исключения резких скачков поля внешний сигнал полагается плавно нарастающим во времени по закону $A_{\text{in}}(t) \exp(i\omega t)$. Чтобы исключить эффекты отражения и реализовать режим однонаправленного распространения, граничное условие справа ставится в виде так называемых поглощающих слоев, то есть считается, что интересующая нас область имеет некоторую конечную длину l , а при $x > l$ в уравнение (1) искусственно вводится затухание с коэффициентом $\gamma(x)$, зависящим от координаты. Соответственно, уравнение (1) в области $x > l$ принимает вид

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A + i\gamma(x) A = 0. \quad (10)$$

Существуют различные способы выбора зависимости $\gamma(x)$; здесь предполагается, что коэффициент диссипации нарастает по закону $\gamma = \gamma_0 \sigma^{g(x-l)}$. Константы γ_0 , σ и g , так же как и количество поглощающих слоев, подбираются эмпирически. Основное требование состоит в том, чтобы обеспечить быстрое затухание возмущения, прошедшего в поглощающие слои, и отсутствие видимых отражений от границы раздела. Для уменьшения отражений следует уменьшать γ_0 и одновременно увеличивать протяженность поглощающих слоев. Большинство расчетов проводилось при $\gamma_0 = 0.01$, $\sigma = e$, $g = 1.03$, а длина поглощающей области выбиралась равной l .

Как известно (см., например, [5, 6]) НУШ (1) является полностью интегрируемой системой и имеет бесконечный набор сохраняющихся величин (интегралов движения). Некоторым из них удается придать четкий физический смысл. В частности, следует выделить интеграл вида

$$N = \int_x |A|^2 dx = \text{const}, \quad (11)$$

который имеет смысл энергии волны или, если использовать аналогию с квантовой механикой, – числа квазичастиц. Важным достоинством используемой разностной схемы является то, что она сохраняет интеграл (11), точнее, его дискретный аналог $\sum_j |A_j^n|^2$.¹

¹Сказанное относится к задаче с нулевыми или с периодическими граничными условиями. В случае, рассматриваемом в настоящей работе, присутствует приток энергии от внешнего источника и диссипация на правой границе, поэтому система уже не является интегрируемой и величина (11) не сохраняется.

2. Результаты численного моделирования

2.1. Случай слабой дисперсии. Рассмотрим вначале случай слабой дисперсии ($\omega_0'' = 0.01$). Остальные параметры выберем следующим образом: параметры обратной связи $\rho = 0.5$, $\Delta t_1 = 15$, $\psi_1 = 0$, частота входного сигнала $\omega = 0$,² параметр нелинейности $\beta = 1$, групповая скорость $V = 1$, протяженность нелинейной среды $l = 5$. Поскольку в случае слабой дисперсии автомодуляция возникает в результате неустойчивости Икеды и имеет период, примерно равный 2τ [4, 8], где $\tau = \Delta t_1 + l/V = 20$, из (4) получаем, что время задержки во второй цепи ОС следует выбирать $\Delta t_2 = \Delta t_1 + \tau = 35$. Что касается фазы ψ_2 , то в случае $\omega = 0$ в соответствии с формулой (3) ее можно выбрать равной ψ_1 .

Результаты численного моделирования показывают, что в отсутствие управления автомодуляция возникает при $A_{in} \approx 0.55$. На рис. 1 приведены временная зависимость выходного сигнала $A_{out} = |A(x=l)|$, фазовый портрет и спектр сигнала при достаточно существенном превышении порога автомодуляции ($A_{in} = 0.66$). Как видно, в данном случае имеет место достаточно глубокая периодическая модуляция. Зависимость выходного сигнала от времени имеет вид последовательности почти прямоугольных импульсов, а период автомодуляции $T \approx 2\tau = 40$, то есть эта ситуация достаточно хорошо описывается точечным отображением (5). Добавление слабой управляющей ОС позволяет подавить автомодуляцию, что демонстрирует рис. 1, в. В этом случае по окончании достаточно короткого переходного процесса осцилляции огибающей затухают и устанавливается режим одночастотных вынужденных колебаний на частоте внешнего воздействия.

Хотя формально предлагаемый метод рассчитан на подавление какой-то определенной паразитной частоты, стабилизировать одночастотный режим удастся не только в случае периодической автомодуляции, но и для более сложных режимов, включая хаотические колебания со сплошным спектром (рис. 2). Соответственно, при этом потребовалось увеличить глубину дополнительной ОС, а установление стационарного режима происходит после достаточно длительного переходного процесса.

На рис. 3 приведены границы области устойчивости на плоскости параметров r , A_{in} , рассчитанные при двух различных значениях фаз обратной связи (при данных значениях параметров в соответствии с формулой (3) фазы в первой и второй цепях ОС следует выбирать одинаковыми, $\psi_1 = \psi_2$). На этих же рисунках нанесены теоретические границы устойчивости для отображения (5), построенные по формулам, полученным в [1] (ср. рис. 6, а, б в [1]). При этом, поскольку отображение записано в несколько иной нормировке переменных, значения амплитуды воздействия, приведенные в [1], следует перенормировать в соответствии с формулой

$$A_{in} \rightarrow A_{in} \left(\frac{\beta l}{V} \right)^{-1/2}. \quad (12)$$

²Напомним, что переменная A имеет смысл медленно меняющейся амплитуды волны. Поэтому условие $\omega = 0$ означает, что частота входного сигнала выбирается в точности равной несущей частоте волны.

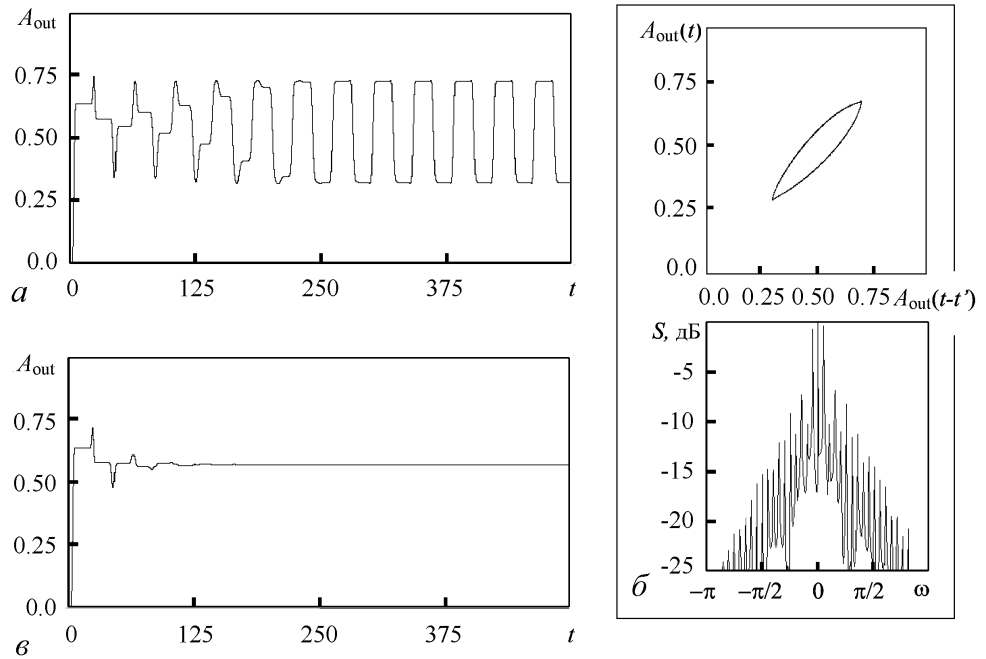


Рис. 1. *a* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени; *б* – фазовый портрет и спектр в режиме глубокой периодической автомодуляции при следующих значениях параметров: $A_{in} = 0.66$, $\omega = 0$, $V = 1$, $\omega_0'' = 0.01$, $\beta = 1$, $\rho = 0.5$, $\Delta t_1 = 15$, $\psi_1 = 0$, $r = 0$. *в* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени при добавлении управляющей цепи обратной связи с параметрами $r = 0.2$, $\psi_2 = 0$, $\Delta t_2 = 35$

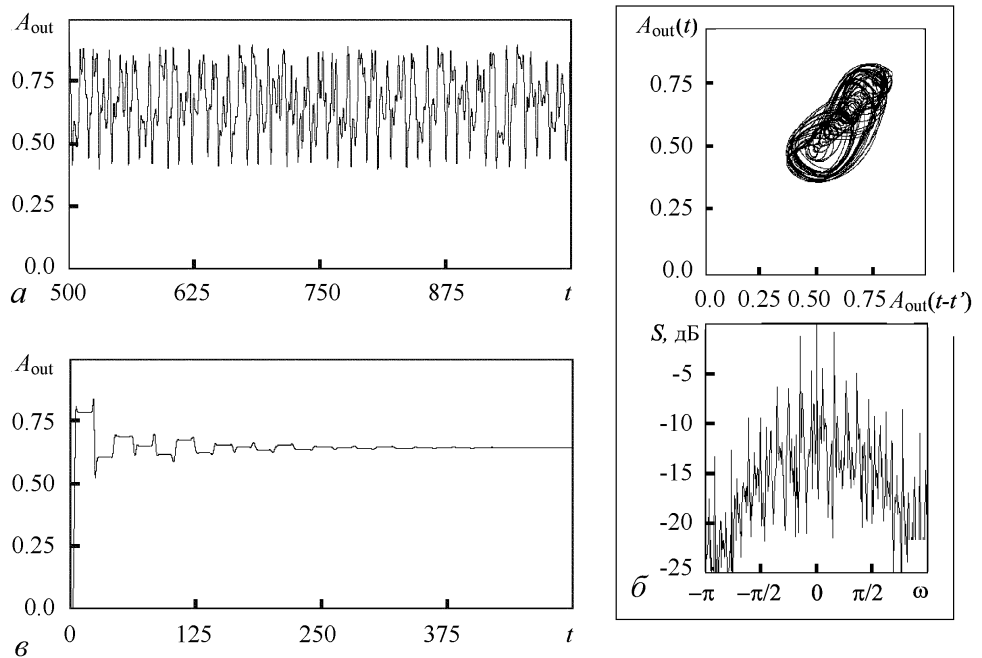


Рис. 2. *a* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени; *б* – фазовый портрет и спектр в хаотическом режиме при $A_{in} = 0.9$. *в* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени при добавлении управляющей цепи обратной связи с $r = 0.33$. Остальные параметры те же, что на рис. 1

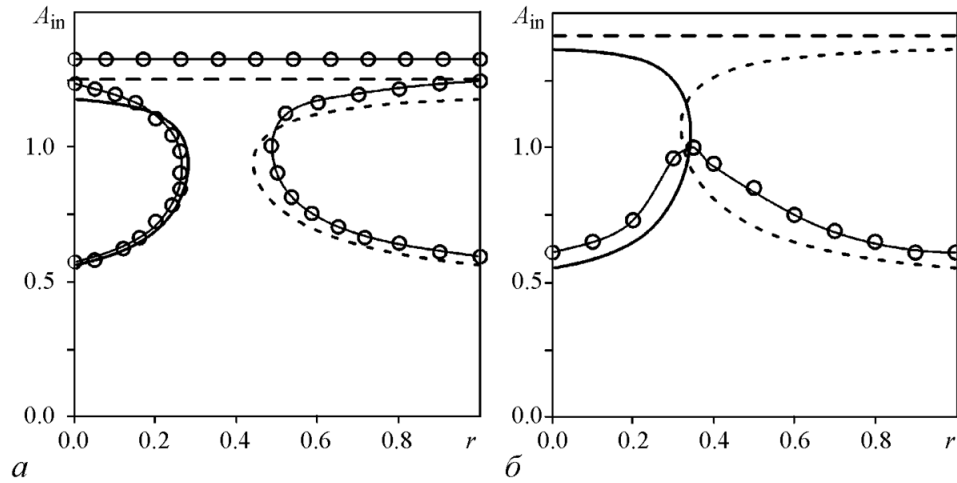


Рис. 3. Границы области устойчивости одночастотного режима на плоскости параметров r , A_{in} для пространственно-временной модели (кружки) при $\psi_{1,2} = 0$ (а) и $\psi_{1,2} = -\pi/3$ (б). Остальные параметры те же, что на рис. 1, 2. Также приведены границы бифуркаций удвоения периода (жирная сплошная линия), Неймарка–Сакера (пунктир) и касательной бифуркации (штриховая линия) для отображения (5)

Напомним, что бифуркация удвоения периода для отображения соответствует возникновению автомодуляции с периодом 2τ для пространственно-временной модели, бифуркация Неймарка–Сакера – автомодуляции с периодом, отличным от 2τ , а касательная бифуркация – жесткому переходу на другую ветвь передаточной характеристики системы [8].

Результаты достаточно хорошо согласуются между собой, хотя границы, рассчитанные для пространственно-временной модели, лежат несколько выше. В частности, в зависимости от значений фаз $\psi_{1,2}$ область устойчивости на плоскости параметров может иметь различную структуру. При $\psi_{1,2} > -0.27\pi$ на плоскости параметров имеются две изолированные области неустойчивости (рис. 3, а). В левой области период автомодуляции примерно равен 2τ , а с увеличением A_{in} переход к хаосу происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода. В правой области период автомодуляции отличен от 2τ и меняется вдоль границы, а переход к хаосу происходит в результате разрушения квазипериодического движения. Сверху область устойчивости ограничена линией касательной бифуркации, которая представляет собой горизонтальную прямую. При $\psi_{1,2} < -0.27\pi$ граница устойчивости имеет более простой вид с единственным максимумом при $r \approx 0.33$ (рис. 3, б). Как и для отображения, существует еще одна область устойчивости, примыкающая снизу к линии касательной бифуркации, однако она расположена при несколько бóльших A_{in} и на рис. 3, б не показана. Эта область имеет вид очень узкой полосы, наибольшая ширина которой составляет $1.51 < A_{in} < 1.55$ при $r = 0.33$.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод, что в случае слабой дисперсии динамика системы достаточно адекватно описывается упрощенной моделью в виде точечного отображения, по крайней мере, в интересующей нас области устойчивости одночастотного режима (ср. [8]).

2.2. Случай сильной дисперсии. Теперь рассмотрим случай сильной дисперсии ($\omega_0'' = 1$, параметры ω , V , β , l , ρ , Δt_1 , ψ_1 те же, что и в предыдущем случае). Эту ситуацию уже нельзя описать с помощью точечного отображения. Как показыва-

ет линейный анализ неустойчивости [8], при достаточно высокой амплитуде колебаний в резонаторе возбуждаются неустойчивые возмущения с частотами, отстоящими от частоты входного сигнала ω на величину

$$\Omega_n = \frac{\pi n}{\Delta t_1 + l/v_g}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где v_g – групповая скорость на соответствующей частоте. Для моды с номером $n = 1$, если заменить v_g на групповую скорость на несущей частоте V , получим частоту неустойчивости Икеды $\Omega = \pi/\tau$. Однако при сильной дисперсии v_g уже может достаточно сильно отличаться от V . Частота и волновое число связаны нелинейным дисперсионным соотношением, следующим из (1):

$$\omega = kV + \frac{\omega_0'' k^2}{2} - \beta |A_0|^2. \quad (14)$$

Здесь A_0 – амплитуда колебаний в резонаторе на основной частоте. Отсюда получаем выражение для групповой скорости, зависящей от частоты и амплитуды

$$v_g(\omega, A_0) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = V + \omega_0'' k(\omega, A_0)$$

или, если разрешить (14) относительно k ,

$$v_g = \sqrt{V^2 + 2(\omega + \beta |A_0|^2)}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13), получим уравнение для собственных частот

$$\Omega_n = \frac{\pi n}{\Delta t_1 + \frac{l}{\sqrt{V^2 + 2(\Omega_n + \beta |A_0|^2)}}}. \quad (16)$$

Здесь учтено, что мы рассматриваем случай, когда несущая частота полагается равной нулю, что несколько упрощает дело. Уравнение (16) можно переписать в виде кубического уравнения относительно Ω_n и решить численно.

В отличие от случая слабой дисперсии, на стадии возникновения автомодуляции в первую очередь возбуждается мода, имеющая частоту, ближайшую к частоте, на которой инкремент модуляционной неустойчивости максимален [8]. Как правило, это частота достаточно удалена от частоты Ω_1 , и частота автомодуляции оказывается заметно выше, чем при неустойчивости Икеды. Соответственно, параметры дополнительной цепи ОС надо подбирать таким образом, чтобы подавить эту частоту.

Рассмотрим подавление автомодуляции при $A_{in} \approx 0.31$, что близко к порогу ее возникновения. На рис. 4, а, б приведены зависимости амплитуды выходного сигнала от времени и спектры для системы с одной цепью ОС ($r = 0$). Видно, что автомодуляция связана с возбуждением моды с $n = 4$, имеющей частоту $\Omega_4 = 0.32\pi$. Здесь и далее собственные частоты занумерованы в соответствии с формулой (13), причем они с хорошей степенью точности удовлетворяют уравнению (16). На рис. 4, а

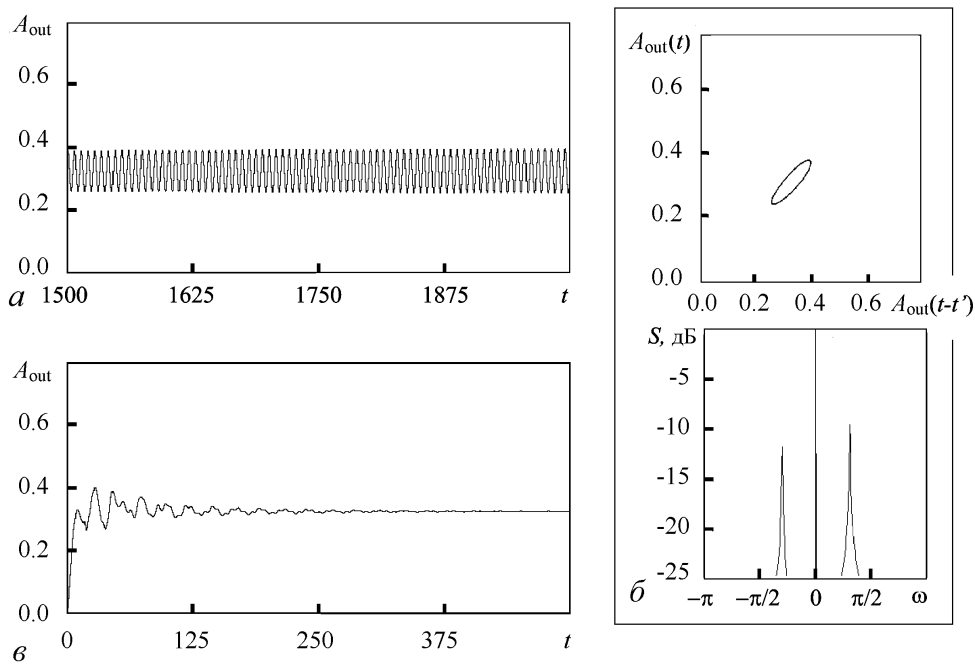


Рис. 4. *a* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени; *б* – фазовый портрет и спектр в режиме автомодуляции при $A_{in} = 0.31$ в случае сильной дисперсии ($\omega_0'' = 1$). *в* – Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени при добавлении управляющей цепи обратной связи с $r = 0.1$, $\Delta t_2 = 18.3$. Остальные параметры те же, что на рис. 1

показан участок временной реализации, соответствующий установившемуся режиму, однако следует отметить, что установлению колебаний предшествует достаточно длительный переходный процесс (порядка 1500 единиц безразмерного времени). Вначале возбуждается мода с $n = 1$, затем постепенно возбуждаются моды, все дальше отстоящие от основной частоты, среди которых доминирует мода с $n = 4$, которая в конце концов подавляет все остальные моды в процессе конкуренции и устанавливается режим периодической автомодуляции.

Определим параметры управляющей цепи ОС. Поскольку $\omega = 0$, фазу ψ_2 по-прежнему следует выбирать равной ψ_1 . Время задержки Δt_2 определим из (4), полагая $\Omega \approx 0.3\pi$, $m = 0$, что дает $\Delta t_2 \approx 18.3$. Как видно из рис. 4, *в*, при таких параметрах происходит эффективное подавление автомодуляции уже при достаточно малой глубине управляющей ОС.

Однако с ростом амплитуды воздействия ситуация усложняется. Рассмотрим случай, когда $A_{in} = 0.35$. При этом автомодуляция становится квазипериодической (рис. 5, *a, б*), что связано с возбуждением еще одной независимой спектральной составляющей, частота которой близка к собственной частоте $\Omega_1 \approx 0.09\pi$.

Применение ОС с временем задержки $\Delta t_2 \approx 18.3$ по-прежнему позволяет подавить частоту Ω_4 , однако остается составляющая на частоте Ω_1 . В результате устанавливается режим периодической автомодуляции (рис. 5, *в*). Хотя глубина модуляции значительно уменьшается по сравнению с рис. 5, *a*, добиться полного ее подавления и установления периодического режима не удастся ни при каких значениях параметра r . Чтобы преодолеть указанную трудность, следует выбрать время задержки таким образом, чтобы условие (4) выполнялось, хотя бы приближенно, для обеих собственных частот. В частности, если выбрать $\Delta t_2 = 25$, оно удовлетворяет-

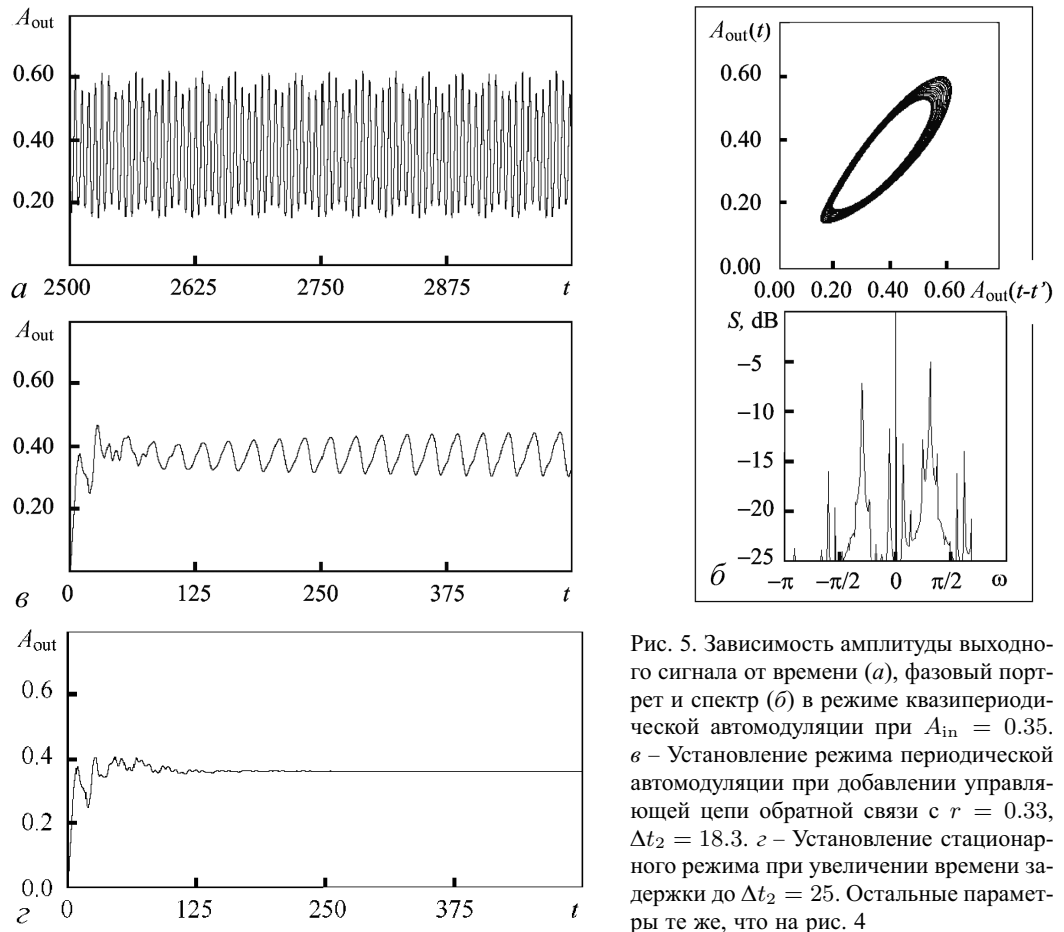


Рис. 5. Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени (а), фазовый портрет и спектр (б) в режиме квазипериодической автомодуляции при $A_{in} = 0.35$. в – Установление режима периодической автомодуляции при добавлении управляющей цепи обратной связи с $r = 0.33$, $\Delta t_2 = 18.3$. з – Установление стационарного режима при увеличении времени задержки до $\Delta t_2 = 25$. Остальные параметры те же, что на рис. 4

ся для частоты $\Omega = 0.1\pi$ при $m = 0$ и для $\Omega = 0.3\pi$ при $m = 3$. Как показывает рис. 5, з, при этом обеспечивается полное подавление автомодуляции.

При данных значениях параметров удается стабилизировать режим одночастотных колебаний вплоть до значений $A_{in} \approx 0.47$, что соответствует хаотическим колебаниям. После этого, хотя частоты Ω_1 и Ω_4 по-прежнему подавляются, начинается возбуждение моды с $n = 3$. Добиться дальнейшего повышения порога автомодуляции можно, вновь изменив время задержки таким образом, чтобы подавить частоту $\Omega_3 \approx 0.24\pi$. В частности, численное моделирование показывает, что если увеличить время задержки до $\Delta t_2 = 30$, когда условие (4) выполняется для частоты $\Omega_3 \approx 0.2\pi$ при $m = 1$, удастся подавить хаотические колебания при $A_{in} = 0.55$. Установление колебаний происходит после очень длительного переходного процесса, в ходе которого происходит медленное затухание моды с $n = 4$, что иллюстрирует рис. 6.

В целом исследования показывают, что при сильной дисперсии подавление автомодуляции представляет собой существенно более сложную задачу, чем в случае слабой дисперсии. Это обусловлено тем, что наряду с характерным временем τ циркуляции сигнала по кольцу ОС появляется еще один независимый временной масштаб, связанный с модуляционной неустойчивостью. Очевидно, что чем больше τ , то есть чем больше мод попадают в полосу модуляционной неустойчивости, тем

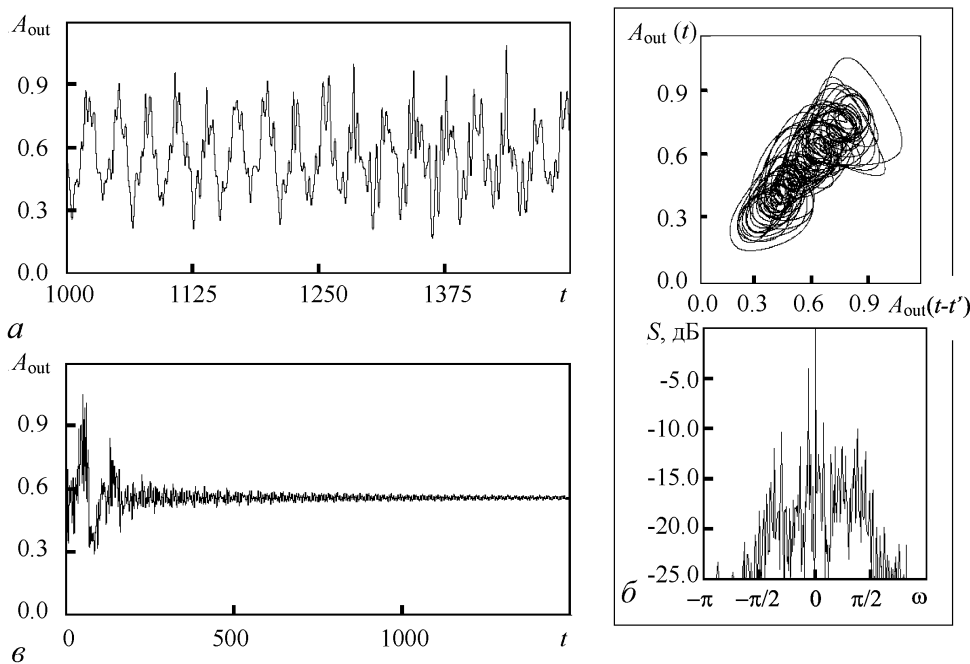


Рис. 6. Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени (а), фазовый портрет и спектр (б) в хаотическом режиме при $A_{in} = 0.55$. в – Установление стационарного режима при добавлении управляющей цепи обратной связи с $r = 0.5$, $\Delta t_2 = 30$. Остальные параметры те же, что на рис. 4, 5

труднее обеспечить устойчивость одночастотного режима колебаний. Тем не менее подбором параметров цепи управляющей ОС удастся повысить порог автомодуляции примерно в два раза.

Заключение

В данной работе предложенная в [1] схема управления хаосом в системе Икеды исследована в рамках пространственно-временной модели, которая описывается нелинейным уравнением Шрёдингера с запаздывающим граничным условием. Результаты численного моделирования показали, что при достаточно слабой дисперсии хорошо работает приближенное описание на основе точечного отображения [1]. В случае сильной дисперсии, когда нестационарное поведение системы, в основном, обусловлено модуляционной неустойчивостью, динамика носит более сложный характер, что связано с процессами конкуренции различных собственных мод резонатора. Тем не менее и в этом случае соответствующий подбор времени задержки в управляющей цепи обратной связи позволяет стабилизировать режим одночастотных колебаний в достаточно широкой области параметров. В частности, удастся подавить не только многочастотные режимы периодической и квазипериодической автомодуляции, но и хаотические колебания со сплошным спектром.

Авторы благодарны А.П. Кузнецову и С.П. Кузнецову за полезные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1738). Работа Н.М. Рыскина поддержана также фондом некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. Управление хаосом в системе Икеды. Упрощенная модель в виде точечного отображения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 66.
2. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 709.
3. Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Детерминированный хаос в моделях кольцевого нелинейного интерферометра. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
4. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.S. Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London, 1984.
6. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000.
7. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003.
8. Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С. Нелинейная динамика модуляционной неустойчивости в распределенных резонаторах под внешним гармоническим воздействием // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 9. С. 800.
9. Балякин А.А., Рыскин Н.М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 5. С. 6.
10. Balyakin A.A., Ryskin N.M. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2004. Vol. 7, № 1. P. 34.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, Физматлит, 1989.

Поступила в редакцию 4.09.2008

CONTROLLING CHAOS IN IKEDA SYSTEM

Spatio-temporal model

N.M. Ryskin, O.S. Khavroshin

The method for controlling chaos in a ring resonator filled with a medium with cubic phase nonlinearity (Ikeda system), suggested in [1], is investigated within the framework of a distributed spatio-temporal model described by a Nonlinear Schrödinger Equation with time-delayed boundary condition. Numerical results are presented which confirm the capability of the suggested method. For the case of weakly dispersive nonlinear medium, the results are in good agreement with the approximate theory based on the return map [1]. In the case of strong dispersion, when the non-stationary behavior is determined mainly by the modulation instability, the dynamics is more complicated due to competition of different resonator eigenmodes. It is demonstrated, that proper adjustment of the control feedback parameters allows suppressing self-modulation oscillations and provides stable single-frequency operation in a broad range of parameters.

Keywords: Controlling chaos, nonlinear ring-loop resonator, delayed feedback, Nonlinear Schrödinger equation, modulation instability.