

СТОХАСТИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ

Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко

Излагаются современные представления о бифуркациях динамических систем, находящихся под воздействием шума. Даются основные определения и рассматриваются некоторые типичные примеры бифуркаций в присутствии аддитивного и мультипликативного шума.

Ключевые слова: Стохастическая бифуркация, P-бифуркация, D-бифуркация, индуцированный шумом переход.

Введение

Известно, какую важную роль играет бифуркационный анализ в детерминированной нелинейной динамике. Он позволяет выявить возможные сценарии перехода системы от простого поведения к сложному, проанализировать структуру возникающих предельных множеств и разработать методы управления этой структурой [1, 2]. Возникает вопрос, как повлияет шум на бифуркации и что собой представляют бифуркации в присутствии шума. Этот вопрос является весьма важным в силу двух причин: во-первых, шум всегда присутствует в любой реальной системе и, во-вторых, вблизи бифуркации система особенно чувствительна к действию шума, так как в бифуркационной точке нарушается свойство структурной устойчивости [3]. Имеется немало работ, посвященных исследованию *стохастических бифуркаций*, то есть бифуркаций динамических систем в присутствии шума. Однако таких работ гораздо меньше, чем количество публикаций по другим актуальным направлениям нелинейной динамики. В описании стохастических бифуркаций остается много неясного, начиная с формальных определений и кончая наблюдаемыми эффектами. Среди работ по данной проблематике, прежде всего, нужно назвать известную монографию В. Хорстнемке и Р. Лефевра [4], а также книгу Л. Арнольда [5], одна из глав которой посвящена стохастическим бифуркациям. Имеется также ряд статей, в которых исследуются те или иные бифуркации в конкретных динамических системах с шумом, например, работы [6–15].

Цель данной статьи – дать общие представления о теории стохастических бифуркаций и проиллюстрировать их примерами типичных бифуркаций в нелинейных системах с аддитивным и мультипликативным шумом.

1. Основные понятия и определения

Рассмотрим достаточно общую модель динамической системы с шумом – стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), называемое также уравнением Ланжевена [4, 5]

$$d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)dt + \hat{G}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{W}, \quad \mathbf{x} \in R^N, \quad \mathbf{W} \in R^N. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x} \in R^N$ – вектор состояния системы; $\mathbf{W}(t)$ – векторный винеровский процесс, компоненты которого W_i – независимые стандартные винеровские процессы ($i = 1, 2, \dots, N$); $\hat{G}(\mathbf{x}, t)$ – матрица $N \times N$, элементы которой $g_{jk}(\mathbf{x}, t)$ задают интенсивности источников шума. Если интенсивности источников шума не зависят от состояния \mathbf{x} , то шум принято называть *аддитивным*; в противном случае шум называют *параметрическим* или *мультипликативным*. Уравнение (1) описывает некоторую динамическую систему, находящуюся под действием источников гауссова белого шума. Обычно, для большинства естественнонаучных задач СДУ (1) понимается в смысле Стратоновича [4, 5]. Его решение является диффузионным марковским процессом с плотностью вероятности $p(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial A_j(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 B_{jk}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (2)$$

Компоненты вектора сноса $A(\mathbf{x})$ и элементы матрицы диффузии $\hat{B}(\mathbf{x})$ задаются следующими выражениями

$$\begin{aligned} A_j(\mathbf{x}, t) &= f_j(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial g_{jk}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}, \\ B_{jk}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_{ji}(\mathbf{x}, t) g_{ki}(\mathbf{x}, t), \quad j, k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

Обратимся к основным определениям, предложенным в [4, 5]. Начнем с определения стохастической бифуркации, которая может наблюдаться в системе (1) при изменении некоторого управляющего параметра α (этим параметром может быть и интенсивность шума). В [4] под бифуркацией в присутствии шума понимается качественное изменение стационарной плотности вероятности $p(\mathbf{x})$. Например, бифуркация может приводить к возникновению или исчезновению локальных максимумов вероятностного распределения при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_P$. В [5] бифуркации такого типа названы *феноменологическими бифуркациями* или *P-бифуркациями*.

Кроме P-бифуркаций в [5] предлагается выделять еще и другой тип стохастических бифуркаций – *динамические бифуркации* или *D-бифуркации*. Динамическая бифуркация есть изменение характера устойчивости траекторий. Пусть имеется инвариантное множество траекторий ν , устойчивость которых определяется показателями Ляпунова $\lambda_i(\nu)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Смена знака каким-либо из показателей $\lambda_i(\nu)$ при некотором $\alpha = \alpha_D$ означает D-бифуркацию. Одна и та же стохастическая бифуркация может быть одновременно и P- и D-бифуркацией, а может соответствовать только одному типу бифуркации.

С D-бифуркациями связана качественная перестройка так называемого *стохастического* или *случайного аттрактора* (random attractor) [5]. Случайный аттрактор представляет собой множество точек в фазовом пространстве, получаемых спустя интервал времени $\tau \rightarrow \infty$ из множества всевозможных начальных состояний системы (1) при заданной реализации случайной силы. Строгое математическое определение случайного аттрактора дано в [5]. Конкретный вид случайного аттрактора, вообще говоря, меняется во времени, но в установившемся режиме ($\tau \rightarrow \infty$) его геометрическая структура сохраняется. Это может быть точка (стохастическое состояние равновесия), замкнутая кривая (стохастический цикл), поверхность тора (стохастический тор), множество с канторовой структурой (стохастический странный аттрактор).

Как отмечалось в [4], шум может не только сдвигать существующие в системе бифуркации в пространстве параметров, но при некоторых условиях приводить к качественно новому поведению. Такие явления были названы *индуцированными шумом переходами*. Характеристики шума такие, как его интенсивность или ширина спектра (в случае цветного шума), могут играть роль бифуркационных параметров системы.

Для одномерных систем ($N = 1$) справедлива следующая теорема [5]. Пусть процесс $x(t)$ задается одномерным СДУ

$$dx = f(x)dt + g(x)dW,$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, тогда при любом значении параметров существует единственное стационарное решение уравнения ФПК $p(x)$, которому соответствует отрицательный показатель Ляпунова. В случае аддитивного шума в системе (4) имеется единственная инвариантная мера и, как следует из теоремы, соответствующий ей показатель Ляпунова всегда отрицателен

$$\lambda = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 p(x) dx < 0. \quad (4)$$

Таким образом, D-бифуркации в одномерной системе с аддитивным шумом не возможны.

Рассмотрим влияние шума на некоторые типичные локальные бифуркации состояний равновесия: бифуркацию «трехкратное равновесие» (бифуркацию вил для точек равновесия) и суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа.

2. Бифуркация «трехкратное равновесие» (бифуркация вил)

В детерминированном случае бифуркация описывается следующим уравнением первого порядка:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3, \quad (5)$$

где α – управляющий параметр. При $\alpha < 0$ имеется устойчивая точка равновесия $x_1 = 0$. При $\alpha = 0$ происходит бифуркация, в результате которой при $\alpha > 0$ равновесие в нуле становится неустойчивым и образуются две новые устойчивые точки равновесия $x_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha}$. Бифуркация в присутствии шума описана в [5, 13]. Рассмотрим отдельно случаи аддитивного и мультипликативного шума.

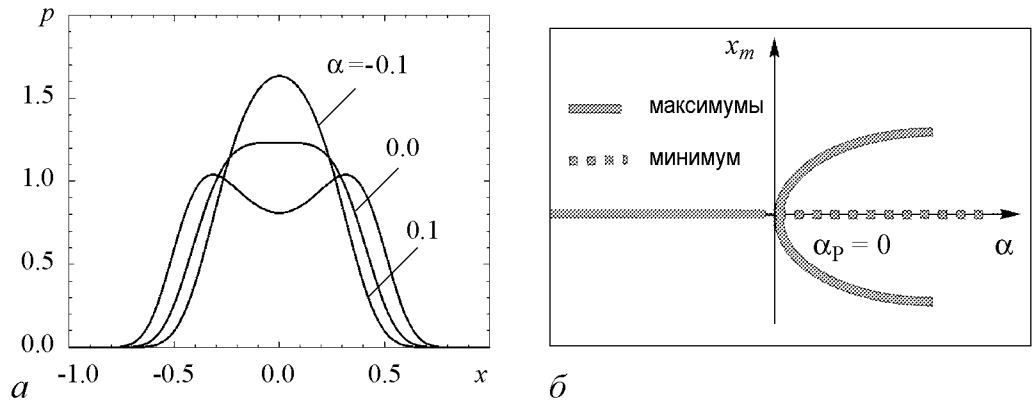


Рис. 1. Бифуркация «трехкратное равновесие» при аддитивном шуме: a – графики стационарной плотности вероятности до Р-бифуркации, в момент бифуркации и после бифуркации; b – зависимость координат экстремумов распределения от параметра α

Аддитивный шум. Бифуркация описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + \sqrt{2D}n(t), \quad (6)$$

где $n(t) = dW/dt$ – нормированный гауссов белый шум; D – константа, задающая интенсивность шума. Для (6) единственным инвариантным множеством траекторий является всё пространство состояний. На нем задана стационарная плотность вероятности $p(x)$, являющаяся стационарным решением уравнения ФПК. Коэффициенты сноса и диффузии для процесса, задаваемого СДУ (5), есть

$$A(x) = \alpha x - x^3, \quad B(x) = D = \text{const.}$$

Легко найти стационарное решение уравнения ФПК

$$p(x) = C \exp \left\{ \frac{x^2}{4D} (2\alpha - x^2) \right\}, \quad (7)$$

где C – нормировочная константа. Изменение формы распределения $p(x)$ с изменением α при $D = 0.01$ показано на рис. 1, a . При $\alpha < 0$ имеется единственный максимум распределения в точке $x_1 = 0$. При $\alpha = \alpha_P = 0$ происходит Р-бифуркация: появляются два симметричных максимума в точках $x_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha}$, а точка $x_1 = 0$ становится точкой минимума. Координаты экстремумов в зависимости от параметра α приведены на рис. 1, b . Они в точности совпадают с точками равновесия системы без шума, причем минимум соответствует неустойчивому равновесию, а максимумы – устойчивым.

В соответствии с приведенной выше теоремой D-бифуркация при аддитивном шуме отсутствует.

Мультипликативный шум. Бифуркация описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + \sqrt{2D}xn(t). \quad (8)$$

При $\alpha < 0$ для (8) имеется единственное инвариантное множество v – устойчивая точка равновесия в нуле. Соответствующая плотность вероятности есть

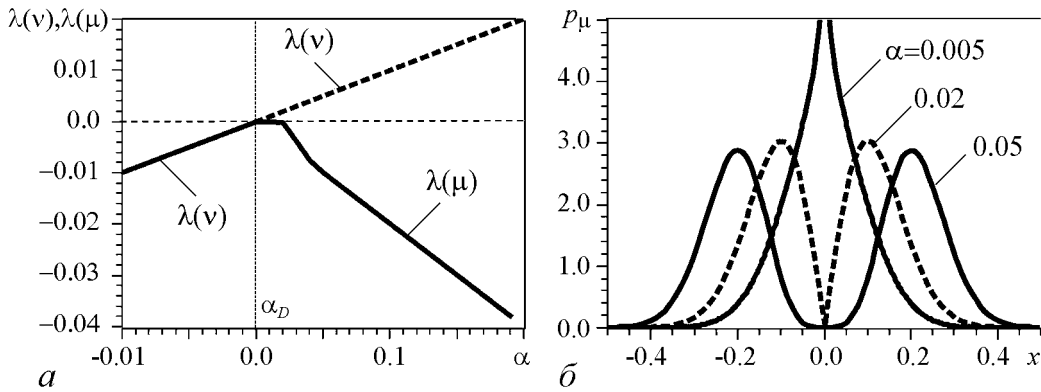


Рис. 2. Бифуркация «трехкратное равновесие» при мультипликативном шуме: a – показатели Ляпунова инвариантных множеств v и μ ; b – графики стационарной плотности вероятности $p_\mu(x)$ при различных значениях параметра α

$p_v(x) = \delta(x)$, а показатель Ляпунова $\lambda(v) = \alpha$. При $\alpha = \alpha_D = 0$ происходит D-бифуркация: равновесие в нуле становится неустойчивым. При этом $\lambda(v)$ меняет знак с минуса на плюс (рис. 2, a). При $\alpha > 0$ кроме инвариантного множества v имеется инвариантное множество μ , представляющее собой все значения x , за исключением нуля. На множестве μ задана стационарная плотность вероятности $p_\mu(x)$, являющейся решением уравнения ФПК

$$p_\mu(x) = |x|^\gamma C \exp\left\{-\frac{x^2}{2D}\right\}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{D} - 1. \quad (9)$$

Соответствующий показатель Ляпунова λ_μ при $\alpha > 0$ всегда отрицателен (рис. 2, a).

С ростом α наблюдаются две качественные перестройки плотности вероятности (9), которые можно считать P-бифуркациями. Они проиллюстрированы графиками функции $p_\mu(x)$, приведенными на рис. 2, b . До первой бифуркации в точке $\alpha = \alpha_{P1} = D$ функция $p_\mu(x)$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow \pm 0$, а после нее – стремится к нулю. При этом возникают два максимума с координатами $x_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha - D}$. Для $\alpha > \alpha_{P1}$ доопределим функцию $p_\mu(x)$ в нуле, исходя из свойства непрерывности, $p_\mu(0) = 0$. В результате второй бифуркации при $\alpha = \alpha_{P2} = 2D$ точка $x_1 = 0$, в которой производная $dP(x)/dx$ терпела разрыв, становится точкой гладкого минимума.

Таким образом, бифуркация, наблюдавшаяся в детерминированной системе, при мультипликативном шуме разделилась на несколько этапов: D-бифуркацию в точке α_D и P-бифуркации в точках α_{P1} и α_{P2} . Расстояние от α_D до α_{P2} называется *бифуркационным интервалом*.

3. Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа

Рассмотрим уравнение ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (10)$$

Оно служит классической моделью генератора с мягким возникновением автоколебаний. Параметр ε управляет режимом генератора. При $\varepsilon = 0$ в (10) имеет место

суперкритическая («мягкая») бифуркация Андронова–Хопфа (АХ), в результате которой из устойчивого фокуса в начале координат $x = 0, y = 0$ ¹ рождается устойчивый предельный цикл. Влияние шума на бифуркацию АХ исследовалось в ряде работ, например в [6–11, 14–15]. Тем не менее, поскольку применяются либо численные либо приближенные методы, некоторые детали бифуркационного сценария остаются под вопросом. Ниже мы рассмотрим отдельно влияние аддитивного и мультипликативного шума на суперкритическую бифуркацию АХ, используя квазигармоническое приближение.

Аддитивный шум. Генератор описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = \sqrt{2D}n(t), \quad (11)$$

где $n(t)$ – источник нормированного гауссова белого шума, D – интенсивность шума. В (11) время нормировано таким образом, что собственная частота колебаний есть $\omega_0 = 1$.

Используя замену переменных

$$x = a(t) \cos(t + \varphi(t)), \quad \dot{x} = y = -a(t) \sin(t + \varphi(t)), \quad (12)$$

где $a(t)$ и $\varphi(t)$ полагаются «медленными» случайными функциями, и применяя усреднение за период автоколебаний, можно получить следующие стохастические уравнения для амплитуды $a(t)$ и фазы $\varphi(t)$ ²:

$$\dot{a} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{a^2}{8} \right) a + \frac{D}{2a} + \sqrt{D}n_1(t), \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{a}n_2(t), \quad (13)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые нормированные источники гауссова белого шума. Амплитудное уравнение не содержит зависимости от фазы φ и может рассматриваться независимо. Стационарное решение уравнения ФПК для плотности распределения амплитуды есть

$$p(a) = Na \exp \left\{ -\frac{1}{16D} (a^2 - 4\varepsilon)^2 \right\}, \quad (14)$$

где N – нормировочная константа.

Переходя к декартовым координатам с помощью замены (12), получаем

$$p(x, y) = p(a, \varphi) |J|^{-1},$$

где $p(a, \varphi)$ – совместная плотность вероятности амплитуды и фазы, а J – якобиан преобразования (12). Учитывая, что $p(a, \varphi) = p(a)p(\varphi|a)$, где $p(\varphi|a)$ есть условная плотность вероятности фазы при заданном значении амплитуды, и $J = -a$ получаем

$$p(x, y) = \frac{1}{a} p(a) p(\varphi|a).$$

Рассмотрим второе уравнение системы (13), зафиксировав реализацию $a(t)$. Так как $a(t)$ – «медленная функция», то процесс $\varphi(t)$ можно считать близким к винеровскому на длинных интервалах времени. Соответственно распределение фазы, определенной в неограниченном интервале $(-\infty, +\infty)$, близко к гауссову с монотонно

¹Здесь и далее вторая переменная на фазовой плоскости вводится как $y = \dot{x}$.

²Точнее говоря, $\varphi(t)$ есть флуктуация мгновенной фазы относительно среднего значения $\Phi_0 = t$.

растущей во времени дисперсией. Хотя скорость роста дисперсии не постоянна, в этом случае, как и для винеровского процесса, можно показать, что значения φ , приведенные к интервалу $[-\pi, +\pi]$, стремятся к стационарному равномерному распределению. Таким образом, для любого a можно предположить, что $p(\varphi|a) = 1/(2\pi)$, $\varphi \in [-\pi, +\pi]$. Расчеты подтверждают данное предположение.

Для $p(x, y)$ окончательно имеем

$$p(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{16D} (x^2 + y^2 - 4\varepsilon)^2 \right\}, \quad (15)$$

где $C = N/(2\pi)$. Для системы (11) имеется единственное инвариантное множество траекторий – вся фазовая плоскость со стационарной плотностью вероятности $p(x, y)$.

Исследовав экстремумы выражения (15), легко найти Р-бифуркацию при $\varepsilon = \varepsilon_P = 0$. Вид функции $p(x, 0)$ до и после бифуркации приведен на рис. 3, а.

После бифуркации стационарная плотность вероятности принимает кратерообразную форму: в начале координат образуется минимум, а максимальное значение $p(x, y)$ соответствует точкам предельного цикла детерминированной системы (10): $x^2 + y^2 = 2\varepsilon$. Таким образом, с Р-бифуркацией при $\varepsilon = 0$ можно связать начало генерации.

Анализ устойчивости траекторий удобнее провести в полярных координатах, рассмотрев возмущения амплитуды и фазы. Устойчивость решений уравнения для амплитуды характеризуется показателем λ_1 , усредненным по распределению $p(a)$. Как следует из теоремы для СДУ первого порядка, всегда должно выполняться неравенство $\lambda_1 < 0$. Второй показатель Ляпунова λ_2 связан с поведением возмущения фазы φ и тождественно равен нулю. Зависимость показателя λ_1 от параметра ε , рассчитанная по формуле

$$\lambda_1 = \left\langle \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right\rangle_{\mu} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\varepsilon - \frac{3}{4}a^2 - \frac{D}{a^2} \right) p(a) da$$

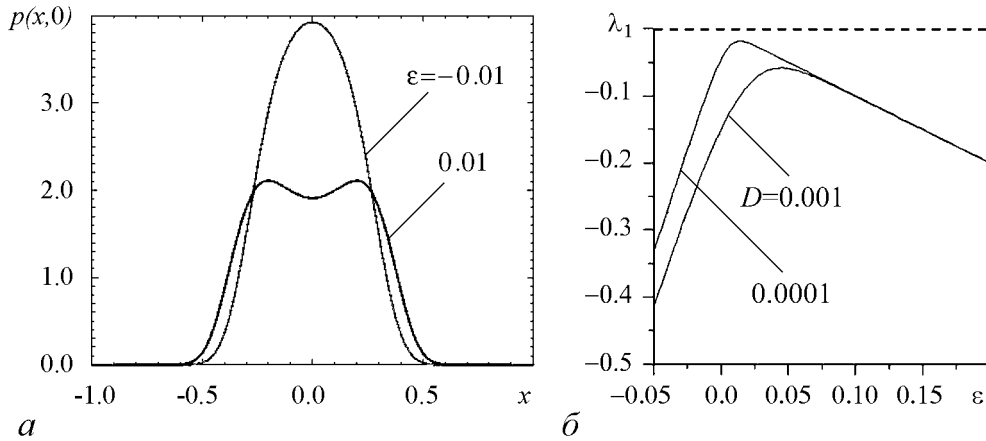


Рис. 3. Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа при аддитивном шуме: а – перестройка стационарной плотности вероятности в точке Р-бифуркации при интенсивности шума $D = 0.001$; б – зависимости показателя Ляпунова, характеризующего поведение амплитуды, от управляющего параметра для двух уровней шума

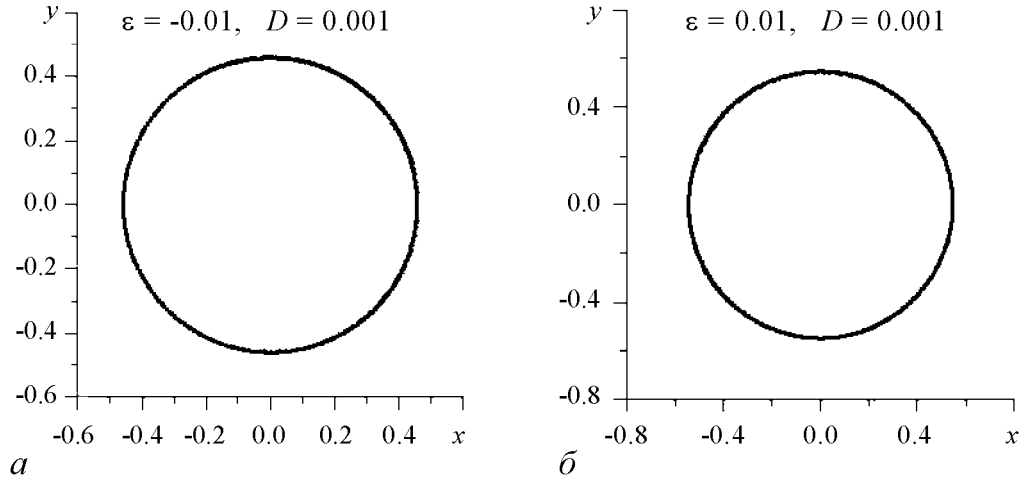


Рис. 4. Случайный аттрактор системы (13) до (а) и после (б) стохастической Р-бифуркации

при двух различных значениях интенсивности шума D , приведена на рис. 3, б. Таким образом, в системе (13) отсутствует динамическая бифуркация. Случайный аттрактор системы (13) при любых значениях ε и D имеет одну и ту же форму стохастического цикла (рис. 4). Изображающие точки равномерно распределяются на окружности, так как возмущение фазы сохраняется во времени. Здесь надо отметить следующую важную деталь. Расчеты показывают, что при слабом шуме и небольших значениях параметра ε укороченная модель (13) находится в очень хорошем количественном соответствии с исходной моделью (11). Однако есть некоторое отличие в характере стохастического аттрактора, связанное с нарушением нейтральной устойчивости траекторий исходной системы вдоль касательного направления в результате действия шума. Возмущение вдоль этого направления соответствует возмущению фазы в (13). Если построить случайный аттрактор для исходной системы (11), то при любом значении параметра все точки на плоскости соберутся в одну точку, вращающуюся вокруг начала координат. Оба показателя Ляпунова системы (11) будут всегда отрицательными, хотя старший из них при слабом шуме близок к нулю.

Сделанный нами вывод об отсутствии D-бифуркации при аддитивном шуме противоречит результатам численных исследований, приведенным в [10]. Затруднительно сказать, связано ли это с использованным нами квазигармоническим приближением или результаты расчетов в [10] ошибочны.

Мультипликативный шум. Генератор описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = \sqrt{2D}\dot{x}n(t), \quad (16)$$

где $n(t)$ – источник нормированного гауссова белого шума, D – интенсивность шума. Шум в модели (16) представляет собой случайную модуляцию параметра возбуждения ε . Используя замену переменных (12) и метод усреднения получаем укороченные уравнения

$$\dot{a} = \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{D}{4} - \frac{a^2}{8} + \frac{\sqrt{D}}{2}n_1(t) \right) a, \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{2}n_2(t), \quad (17)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые нормированные источники гауссова белого шума. Как следует из (17), амплитуда и фаза для данной модели полностью независимы.

Для (16) существует точка равновесия $x = 0, y = \dot{x} = 0$. Иначе говоря, имеется инвариантное множество ν с плотностью $p_\nu(x, y) = \delta(x, y)$. В терминах модели (17) множеству ν соответствует решение $a = 0$. Оно характеризуется плотностью вероятности $p_\nu(a) = 2\delta(a)$ (фаза φ может принимать любые значения). Устойчивость решения $a = 0$ определяется показателем

$$\lambda_1(\nu) = \left\langle \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right\rangle_\nu = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\varepsilon + \frac{D}{2} - \frac{3}{4}a^2 \right) p_\nu(a) da + \frac{\sqrt{D}}{2} \langle n_1(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{D}{2} \right).$$

Если $\varepsilon < -D/2$, то решение $a = 0$ устойчиво, и $p_\nu(a)$ является стационарным распределением амплитуды. При $\varepsilon = \varepsilon_D = -D/2$ происходит D-бифуркация, и показатель $\lambda_1(\nu)$ становится положительным, что означает неустойчивость решения $a = 0$ при $\varepsilon > -D/2$. Стационарным распределением будет плотность $p_\mu(a)$, заданная на множестве μ значений амплитуды $a \neq 0$,

$$p_\mu(a) = Na^{2\alpha+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2D} a^2 \right\}, \quad \alpha = \frac{2\varepsilon}{D}, \quad (18)$$

где N – нормировочная константа. Соответствующий показатель Ляпунова

$$\lambda_1(\mu) = \left\langle \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right\rangle_\mu = \int_0^\infty \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{D}{4} - \frac{3}{8}a^2 \right) p_\mu(a) da + \frac{\sqrt{D}}{2} \langle n_1(t) \rangle = \varepsilon + \frac{D}{2}$$

будет всегда отрицательным.

Стохастический аттрактор системы (17) до динамической бифуркации (при $\varepsilon < -D/2$) представляет собой единственную точку в начале координат, а после бифуркации (при $\varepsilon > -D/2$) становится стохастическим циклом.

Переходя от (18) к декартовым координатам, получаем стационарное распределение

$$p_\mu(x, y) = C(x^2 + y^2)^\alpha \exp \left\{ -\frac{1}{2D} (x^2 + y^2) \right\}, \quad (19)$$

где $C = N/(2\pi)$. Анализ выражения (19) позволяет определить две качественные перестройки стационарной плотности вероятности $p_\mu(x, y)$, которые можно назвать феноменологическими (Р) бифуркациями. Графики функции $p_\mu(x, 0)$ приведены на рис. 5. Для $-D/2 < \varepsilon < 0$ функция $p_\mu(x, y)$, хотя и отлична от δ -функции, но при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ обращается в бесконечность. При $\varepsilon = \varepsilon_{P1} = 0$ происходит Р-бифуркация, после которой плотность вероятности при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ обращается в ноль. Можно определить функцию $p_\mu(x, y)$ в нуле как $p_\mu(0, 0) = 0$, не нарушая её непрерывности. Однако начало координат не бу-

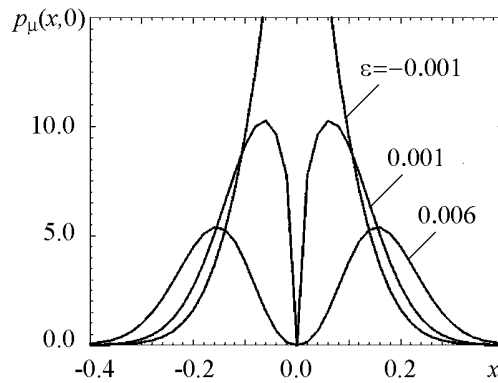


Рис. 5. Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа при мультипликативном шуме: вид стационарной плотности вероятности для интенсивности шума $D = 0.01$ и различных значений ε

дет точкой гладкого минимума, поскольку производные функции $p_\mu(x, y)$ в нуле терпят разрыв. При $\varepsilon > \varepsilon_{P1}$ возникает максимум функции $p_\mu(x, y)$ в точках предельного цикла $x^2 + y^2 = 2\varepsilon$, поэтому данная бифуркация может рассматриваться как начало генерации. Таким образом, как при аддитивном, так и при мультипликативном шуме, порог генерации остается тем же, что и в детерминированной системе (10).

В точке $\varepsilon = \varepsilon_{P2} = D/2$ происходит еще одна качественная перестройка стационарного вероятностного распределения, состоящая в возникновении гладкого минимума в нуле координат. Поведение стационарной плотности вероятности $p_\mu(x, y)$ для модели (16)–(17) очень похоже на поведение плотности вероятности в модели бифуркации «трехкратное равновесие» (8), рассмотренной ранее. Вопрос о том, как вторая Р-бифуркация отражается на статистических характеристиках автоколебаний, пока не исследовался.

Мы рассмотрели влияние на бифуркацию Андронова–Хопфа только белого гауссова шума. В случае мультипликативного цветного шума важную роль играет время корреляции шума τ_{cor} (или, что то же самое, ширина спектральной линии шума). Точки бифуркаций и длина бифуркационного интервала оказываются зависящими от τ_{cor} как от управляющего параметра системы [6, 7, 11].

4. Возникновение и подавление хаоса под действием аддитивного шума

Для рассмотренных простых примеров аддитивный шум, по-видимому, приводит к исчезновению динамической бифуркации. Однако это не означает, что динамические бифуркации при аддитивном шуме вообще невозможны. Для систем с размерностью пространства состояний $N \geq 2$ типичны эффекты возникновения или, напротив, подавления хаотического поведения при воздействии аддитивного шума. Под хаотическим поведением понимается экспоненциальная неустойчивость фазовых траекторий. Например, индуцированный шумом переход к хаосу установлен для осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга [16] и Дуффинга [17]. Такие переходы являются D-бифуркациями, но они отличаются от рассмотренных ранее D-бифуркаций состояний равновесия при воздействии мультипликативного шума. В данном случае нет двух различных инвариантных множеств, соответствующих стационарному режиму до и после бифуркации. Меняется устойчивость траекторий, принадлежащих одному и тому же инвариантному множеству. При этом бифуркация не приводит к качественному изменению вида стационарной плотности вероятности.

В качестве примера рассмотрим переход к хаосу в осцилляторе Дуффинга под действием аддитивного внешнего шума. Система описывается следующим СДУ:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = x - x^3 + \sqrt{2D}n(t). \quad (20)$$

Здесь $n(t)$ – источник нормированного гауссова белого шума; D – интенсивность шума; γ – параметр, задающий диссипацию энергии. Зафиксировав $\gamma = 0.1$ и меняя интенсивность шума, при некотором значении $D \approx 0.0075$ можно наблюдать переход старшего показателя Ляпунова λ_1 из области отрицательных значений в область положительных значений (рис. 6, а). Возникновение экспоненциальной неустойчивости сопровождается изменением характера случайного аттрактора. Если до бифуркации он представлял собой единственную точку, случайным образом перемещающуюся по фазовой плоскости $(x, y = \dot{x})$, то после бифуркации он приобретает сложную, по-видимому, фрактальную структуру (рис. 6, б).

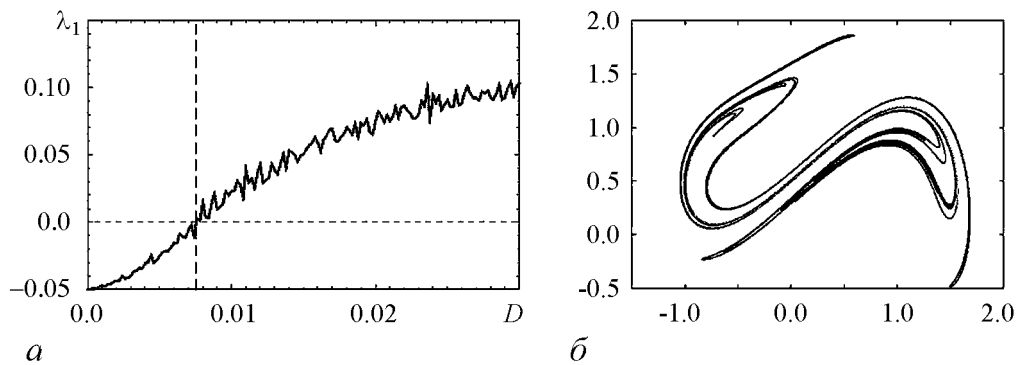


Рис. 6. Индуцированный шумом хаос в осциляторе Дуффинга (20): a – зависимость старшего показателя Ляпунова от интенсивности шума; b – случайный аттрактор после D-бифуркации

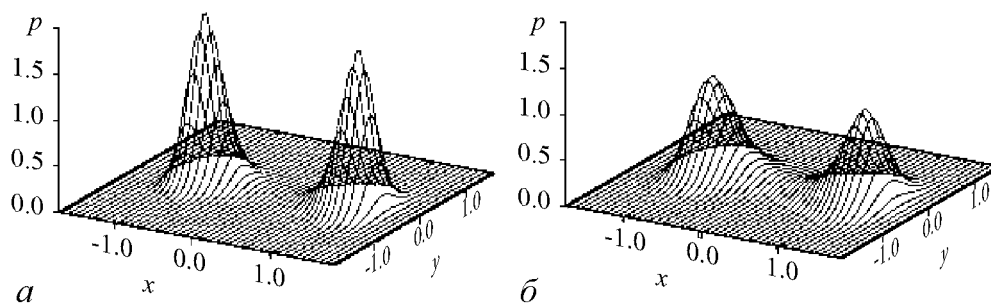


Рис. 7. Стационарная плотность вероятности $p(x, y)$ до бифуркации при $D = 0.006$ (a) и после бифуркации при $D = 0.01$ (b)

На рис. 7 приведены графики численно полученной стационарной плотности вероятности $p(x, y)$ до и после бифуркации. Плотность вероятности имеет два максимума, соответствующих устойчивым состояниям равновесия детерминированной системы, и при переходе через точку D-бифуркации качественно не меняется.

Подобным же образом происходит подавление собственной хаотической динамики внешним шумом, характерное для широкого класса хаотических автогенераторов [18, 19].

Заключение

В заключение подведем некоторые итоги и поставим вопросы, ответ на которые пока не известен. Итак, что же, всё-таки, остается от всего многообразия бифуркаций динамических систем, если учесть присутствие шума? За исключением некоторых случаев мультипликативного шума, когда точка равновесия остается решением стохастического дифференциального уравнения, гауссов шум должен приводить к объединению существующих в детерминированной системе инвариантных множеств и, соответственно, исчезновению динамических бифуркаций. Большинство бифуркаций, даже при мультипликативном шуме, будут проявляться только в перестройках стационарного вероятностного распределения. Их диагностика, особенно для многомерных систем, сильно осложняется.

Определение P-бифуркаций не представляется достаточно строгим и однозначным. Возникает вопрос, правильно ли связывать P-бифуркации только с изменением

числа экстремумов? Дело в том, что при нелинейной замене переменных число экстремумов распределения может измениться. Примером может служить сопоставление плотности вероятности $p(x, y)$ и плотности вероятности $p(a)$ для рассмотренных в данной лекции систем (10) и (14). Экстремумы распределения при переходе к полярным координатам исчезают и возникают при других значениях управляющего параметра.

Из всего сказанного следует, что, несмотря на важную роль шума в нелинейных системах, возможности бифуркационного анализа зашумленных систем оказываются весьма ограниченными. Об этом же свидетельствует следующий факт. Такие фундаментальные явления, как эффективная синхронизация шумящего автогенератора [20, 21], стохастический резонанс [22, 23], когерентный резонанс [24, 25] и синхронизация стохастических осцилляторов [26, 27] до настоящего времени не удалось связать с какими-либо стохастическими бифуркациями. Однако не исключено, что дальнейшее исследование перечисленных явлений и развитие теории стохастических бифуркаций приведут к установлению такой взаимосвязи.

Работа выполнена в рамках АВЦП МО и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009-2010 годы» (гр. № 2.2.2.2/ 229)

Библиографический список

1. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Динамические системы -5. М.: ВИНТИ. 1986. С. 5. (Итоги науки и техн.). (Сов. пробл. мат. Фунд. направл.).
2. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт комп. иссл., 2003.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
4. Хорстнемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
5. Arnold L. Random dynamical systems. Chapter 9. Bifurcation theory. Springer, 2003.
6. Lefever R., Turner J. Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631.
7. Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F. Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // Phys. Rev. F. 1987. Vol. 36. P. 834.
8. Sri Namachshivaya N. Stochastic bifurcation// Appl. Math. and Computation. 1990. Vol. 38. P. 101.
9. Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yoppe' K.R. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: a base study // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1947.
10. Schenk-Yoppe' K.R. Bifurcation scenarios of the noisy Duffing-van der Pol oscillator // Nonlinear Dynamics. 1996. Vol. 11. P. 255.
11. Olarrea J., de la Rubia F.J. Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcational interval // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53(1). P. 268.
12. Landa P.S., Zaikin A.A. Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis // Phys. Rev.E. 1996. Vol. 54(4). P. 3535.

13. *Crauel H., Flandol F.* Additive noise destroys a pitchfork bifurcation // *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 1998. Vol. 10. P. 259.
14. *Leung H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a based van der Pol model // *Physica A*. 1998. Vol. 254(1). P. 146.
15. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos, Solitons, and Fractals*. 2009. Vol. 39. P. 7.
16. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.* Influence of noise on Duffing–van der Pol oscillator // *Zeitschrift f. Angew. Math. und Mechanik*. 1986. Vol. 66. P. 141.
17. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // *J. of Stat. Physics*. 1993. Vol. 70. P. 141.
18. *Matsumoto K., Tsuda I.* Noise-induced order // *J. Stat. Phys.* 1983. Vol. 31(1). P. 87.
19. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A*. 2006. Vol. 354(5-6). P. 423.
20. *Стратонович П.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
21. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
22. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1981. Vol. 14. P. L453.
23. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62. P. 349.
24. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.
25. *Linder B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60(6). P. 7270.
26. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by a periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75(23). P. 4157.
27. *Anishchenko V., Neiman B.* Stochastic synchronization // *Stochastic Dynamics* / Eds. L. Schimansky-Geier and T. Pöschel. Berlin: Springer, 1997. P. 155.

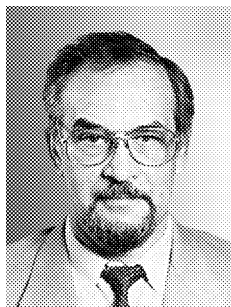
Поступила в редакцию 30.06.2009

STOCHASTIC BIFURCATIONS

T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko

The modern knowledges of bifurcations of dynamical systems in the presence of noise are presented. The main definitions are given and certain typical examples of the bifurcations in the presence of additive and multiplicative noise are considered.

Keywords: Stochastic bifurcation, P-bifurcation, D-bifurcation, noise induced transition.



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: wadim@info.sgu.ru



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru