

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ ЛАМИНАРНЫХ ФАЗ ДЛЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ ТИПА I В ПРИСУТСТВИИ ШУМА

*А.А. Короновский, М.К. Куровская, А.Е. Храмов*

Рассматривается тип перемежающегося поведения, который возникает в результате взаимодействия между динамическими механизмами, приводящими к возникновению перемежаемости типа I, и случайными процессами. Приводится аналитический вывод закона для распределения длительностей ламинарных фаз, при этом зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности, полученная ранее W.-H. Kue, C.-M. Kim (PRE 62(2000) 6304), является следствием построенной в данной работе теории.

*Ключевые слова:* Перемежаемость, седло-узловая бифуркация, шум, хаотическая синхронизация, распределение длительностей ламинарных фаз.

### Введение

Перемежающееся поведение представляет собой часто встречающееся явление в нелинейной науке. Его статистические характеристики исследуются на протяжении долгого времени; в связи с этим выделены различные типы перемежаемости, такие как перемежаемость типа I–III [1, 2], on–off перемежаемость [3–6], перемежаемость «игольного ушка» [7–9], а также перемежаемость цикла [10].

С другой стороны, повышенный интерес исследователей в последнее время направлен на изучение конструктивной роли шума и флуктуаций в нелинейных динамических системах [11–13]. В частности, было обнаружено, что наличие случайных флуктуаций может приводить к некоторой доле упорядоченности во множестве нелинейных систем [14–16]. Подобное явление довольно часто наблюдается в физических, химических и биологических системах при соответствующих условиях [9, 17–19].

Нет никаких сомнений, что различные типы перемежающегося поведения могут иметь место в широком классе систем при наличии шума и флуктуаций, включая случаи, когда данное явление представляет непосредственный практический интерес, например, в радиотехнике, медицине, физиологии и других прикладных науках. Ранее перемежающееся поведение в присутствии шума было исследовано с помощью уравнения Фоккера–Планка [20] с применением ренорм-группового анализа, но при этом характерные закономерности были выявлены лишь в субкритической области, где перемежающееся поведение наблюдается как при наличии шума, так

и при отсутствии. Не так давно было проведено теоретическое рассмотрение перемежающегося поведения при наличии шума в закритической области [21] (здесь в отсутствие шума перемежаемость не возникает), при этом аналитический вид зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности был получен в предположении фиксированной вероятности реинжекции, взятой в виде  $\delta$ -функции. Справедливость найденного аналитического закона была проверена также с помощью экспериментального наблюдения перемежаемости в присутствии шума [22, 23]. В то же время, другая важная статистическая характеристика перемежающегося поведения, а именно распределение длительностей ламинарных фаз, не рассматривалась в закритической области значений управляющих параметров.

В настоящей работе аналитически получен вид распределения длительностей ламинарных фаз для перемежаемости типа I при наличии шума в закритической области значений управляющего параметра. Уже известная зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности [21, 22] является при этом следствием построенной теории. Более того, мы показываем, что данная закономерность, полученная в [21] в предположении фиксированной вероятности реинжекции, выбранной в виде  $\delta$ -функции, на самом деле, практически не зависит от характера процесса реламинизации и, соответственно, полученное выражение для средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности остается справедливым при различных формах вероятности реинжекции. Справедливость найденного аналитического распределения длительностей ламинарных фаз проверена с помощью численного интегрирования модельных динамических систем.

Структура работы следующая. В разделе 1 описывается теория перемежаемости типа I в присутствии шума и приводится аналитический вывод выражения для распределения длительностей ламинарных фаз. В разделе 2 рассматривается поведение некоторых динамических систем для иллюстрации справедливости теоретических выводов. С помощью численного моделирования продемонстрировано, что найденные аналитические зависимости имеют место в различных нелинейных системах, включая связанные хаотические осцилляторы вблизи границы режима фазовой синхронизации в случае, когда величина расстройки их собственных частот мала (раздел 2.3). Окончательные выводы сформулированы в Заключение.

## 1. Теория перемежаемости типа I в присутствии шума

Классической моделью для изучения перемежаемости типа I [1] является однопараметрическое квадратичное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + x_n^2 + \varepsilon, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – управляющий параметр. Значение  $\varepsilon_c = 0$  соответствует седло-узловой (касательной) бифуркации, когда устойчивая и неустойчивая неподвижные точки  $x_{u,s} = \pm|\varepsilon|^{1/2}$ , сливаются друг с другом в точке  $x = 0$  и исчезают.

Ниже критического значения параметра  $\varepsilon < \varepsilon_c$  наблюдается устойчивая неподвижная точка  $x_s = -|\varepsilon|^{1/2}$ , в то время как выше  $\varepsilon_c$  существует узкий коридор между графиком функции  $f(x)$  и биссектрисой  $x_{n+1} = x_n$ , такой что изображающая точка отображения (1) движется вдоль него (рис. 1). Это движение соответствует ламинарной фазе, при этом ее средняя длительность  $T$  обратно пропорциональна

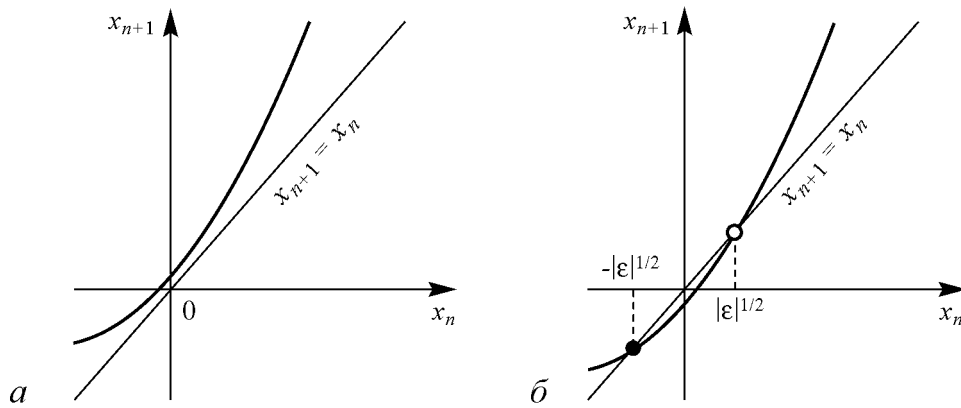


Рис. 1. Итерационная диаграмма отображения (1) для  $\varepsilon > 0$  (а) и  $\varepsilon < 0$  (б). Устойчивая  $x_s = -|\varepsilon|^{1/2}$  и неустойчивая  $x_u = |\varepsilon|^{1/2}$  неподвижные точки отображения (1) обозначены символами  $\bullet$  и  $\circ$ , соответственно

квадратному корню из  $(\varepsilon - \varepsilon_c)$ , то есть

$$T \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1/2}. \quad (2)$$

Чтобы построить теорию перемежаемости типа I в присутствии шума, рассмотрим то же самое квадратичное отображение (1), добавив в него стохастическое слагаемое  $\xi_n$

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 + \varepsilon + \xi_n, \quad (3)$$

где  $\xi_n$  – дельта-коррелированный белый шум с нулевым средним [ $\langle \xi_n \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_n \xi_m \rangle = D\delta(n - m)$ ].

Степень влияния стохастического слагаемого  $\xi_n$  на поведение системы регулируется значением параметра  $D$  (интенсивность шума). При положительных значениях управляющего параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), изображающая точка на итерационной диаграмме, отвечающая поведению системы (3), движется вдоль узкого коридора, и это движение возмущается случайным образом. Пока интенсивность шума невелика, наблюдаются характеристики, близкие к характеристикам классической перемежаемости типа I.

Иной сценарий имеет место, если управляющий параметр  $\varepsilon$  принимает отрицательные значения ( $\varepsilon < 0$ ). В этом случае точка, отвечающая поведению системы (3), долгое время остается в области  $x < x_c = |\varepsilon|^{1/2}$ , при этом динамика системы также возмущается случайной силой. Как только изображающая точка из-за влияния шума достигает границы  $x_c = |\varepsilon|^{1/2}$ , в системе начинается турбулентная фаза, однако такое событие происходит достаточно редко.

В этом случае поведение отображения (3) кардинальным образом отличается от динамики системы (1), поскольку для (1) турбулентные фазы не наблюдаются при  $\varepsilon < 0$  в отсутствие шума. Следовательно, область отрицательных значений параметра  $\varepsilon$  представляется интересной при рассмотрении перемежаемости типа I в присутствии в системе шума.

Полагая, что значение  $\varepsilon$  отрицательно и мало и значение  $x$  изменяется за одну итерацию незначительно, можно рассматривать разность  $(x_{n+1} - x_n)$  как производную по времени  $\dot{x}$  и перейти от системы с дискретным временем (3) к потоковой, аналогично тому, как это осуществляется в классической теории перемежаемости типа I.

Поскольку в уравнении (3) присутствует стохастическое слагаемое, то нужно рассмотреть стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX = (X^2 - |\varepsilon|) dt + dW \quad (4)$$

(где  $X(t)$  – стохастический процесс,  $W(t)$  – одномерный винеровский процесс) вместо обычного дифференциального уравнения  $dx/dt = x^2 + \varepsilon$ , рассматриваемого в классической теории перемежаемости I типа.

Стохастическое дифференциальное уравнение (4) эквивалентно уравнению Фоккера–Планка

$$\frac{\partial \rho_X(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}((x^2 - |\varepsilon|)\rho_X(x, t)) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \rho_X(x, t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

для плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$  стохастического процесса  $X(t)$ . В противоположность тому, что сделано в работе [21], где использовалось обратное уравнение Фоккера–Планка, в настоящей работе рассматривается прямое уравнение, что позволяет получить распределение длительностей ламинарных фаз. Начальные условия были выбраны в виде  $\rho_X(x, 0) = \delta(x)$ , где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция. Такой выбор начальной формы плотности вероятности  $\rho_X(x, 0)$  соответствует началу ламинарной фазы, когда изображающая точка системы (3) имеет координату  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Другими словами, предполагается, что вероятность реинжекции есть дельта-функция

$$P_{\text{in}}(x) = \delta(x), \quad (6)$$

и после процесса реламинаризации система всегда возвращается в состояние  $x = 0$ . Несмотря на то, что вероятность реинжекции  $P_{\text{in}}(x)$  является важным фактором и должна учитываться при исследовании статистических свойств перемежающегося поведения [24, 25], в рассматриваемой задаче форма вероятности реинжекции практически не влияет на распределение длительностей ламинарных фаз (и, соответственно, на зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности), как это будет показано ниже.

Чтобы уменьшить число управляющих параметров, можно выполнить нормировку  $z = x/\sqrt{|\varepsilon|}$ ,  $\tau = t\sqrt{|\varepsilon|}$ , после чего уравнение (5) переписется в виде

$$\frac{\partial \rho_Z(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}((z^2 - 1)\rho_Z(z, \tau)) + \frac{D^*}{2} \frac{\partial^2 \rho_Z(z, \tau)}{\partial z^2}, \quad (7)$$

где  $D^* = D|\varepsilon|^{-3/2}$ ,  $\rho_Z(z, \tau) = \sqrt{|\varepsilon|}\rho_X(z|\varepsilon|^{1/2}, \tau|\varepsilon|^{-1/2})$ .

Так как координата состояния системы долгое время остается в области  $z < z_c = 1$ , можно предположить, что плотность вероятности нужно искать в виде метастабильного распределения, очень медленно убывающего с течением времени (за долгий промежуток времени). Полагают, что процесс релаксации плотности вероятности к этому метастабильному состоянию очень быстрый в сравнении со временем убывания метастабильного распределения, и, следовательно, можно пренебречь временем переходного процесса  $0 \leq t \leq t_{\text{tr}}$ . При сделанных выше предположениях плотность вероятности можно записать в виде  $\rho_Z(z, \tau) = A(\tau)g(z)$ ,  $\forall z \leq 1$ , где  $A(\tau) > 0$  уменьшается очень медленно с увеличением времени, то есть  $dA/d\tau \approx 0$ .

Функция  $g(z)$  должна удовлетворять условиям

$$g(z) > 0 \quad \forall z < 1; \quad \int_{-\infty}^1 g(z) dz < \infty. \quad (8)$$

Так как максимум плотности вероятности должен совпадать с устойчивой неподвижной точкой  $z_s = -1$ , то

$$g'(z)|_{z=-1} = 0. \quad (9)$$

При сделанных предположениях мы переходим к рассмотрению обычного дифференциального уравнения

$$D^* g''(z) - 2((z^2 - 1)g(z))' = 0 \quad (10)$$

вместо (7) в области  $z < 1$ . Данное уравнение эквивалентно уравнению

$$D^* g'(z) - 2(z^2 - 1)g(z) + C_1 = 0, \quad (11)$$

где  $C_1$  – константа. Чтобы решить его, необходимо использовать интегрирующий множитель

$$M(z) = \exp\left(-\frac{2}{D^*} \left(\frac{z^3}{3} - z\right)\right). \quad (12)$$

Решение (11) может быть найдено в виде

$$g(z) = \frac{C_1 \int_0^z \exp\left(\frac{2}{D^*} \left(s - \frac{s^3}{3}\right)\right) ds + C_2}{D^* \exp\left(\frac{2}{D^*} \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right)}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) легко получить, что  $g'(-1) = C_1/D^*$ . Учитывая условие (9), приходим к выводу, что  $C_1 \equiv 0$ . Заметим, что в этом случае полученная функция

$$g(z) = \frac{C_2}{D^*} \exp\left(-\frac{2}{D^*} \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right) \quad (14)$$

также удовлетворяет условию (8). Следовательно, плотность вероятности  $\rho_Z(z, \tau)$  в области  $z < 1$  есть функция

$$\rho_Z(z, \tau) \simeq A(\tau) \exp\left(-\frac{2}{D^*} \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right). \quad (15)$$

Спад функции  $A(\tau)$  должен определяться распределением вероятности, взятым на граничной точке  $z = 1$ , то есть  $dA(\tau)/d\tau \sim -\rho_Z(1, \tau)$ . Это предположение может быть переписано в виде

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = -kA(\tau) \exp\left(-\frac{4}{3D^*}\right), \quad (16)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Очевидно, что убывание  $A(\tau)$  описывается экспоненциальным законом

$$A(\tau) = A(0) \exp(-k\eta\tau), \quad \eta = \exp(-4/(3D^*)), \quad (17)$$

что равносильно экспоненциальному закону для характеристики распределения длительностей ламинарных фаз, как это будет показано далее.

Возвращаясь к первоначальным переменным  $x$  и  $t$ , получим следующее выражение для плотности вероятности:

$$\rho_X(x, t) \simeq A(t) \exp\left(-\frac{2}{D} \left(|\varepsilon|x - \frac{x^3}{3}\right)\right), \quad (18)$$

положив константу интегрирования  $C_1 = 0$ . Здесь

$$A(t) = A(0) \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \quad (19)$$

и

$$T = \frac{1}{k\sqrt{|\varepsilon|}} \exp\left(\frac{4|\varepsilon|^{3/2}}{3D}\right), \quad (20)$$

при этом  $A(t)$  рассматривается как нормировочный множитель, то есть

$$A(0) \int_{-\infty}^{\sqrt{|\varepsilon|}} \exp\left(-\frac{2}{D} \left(|\varepsilon|x - \frac{x^3}{3}\right)\right) dx = 1. \quad (21)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости полученных уравнений и предположений, сделанных выше, было проведено сравнение эволюции плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ , заданной выражением (18), с результатами численного интегрирования уравнения Фоккера–Планка (5) при значениях управляющих параметров  $|\varepsilon| = 10^{-2}$  и  $D = 2.5 \times 10^{-4}$ .

Эволюция плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ , полученная посредством численного интегрирования (5), показана на рис. 2. Видно, что после короткого переходного процесса  $0 \leq t \leq t_{tr}$  плотность вероятности  $\rho_X(x, t)$  достигает состояния, близкого к стационарному (рис. 2, *a*). После этого значение  $\rho_X(x, t)$  уменьшается очень медленно (по экспоненциальному закону) с увеличением времени, при этом вид зависимости плотности вероятности от  $x$ -координаты остается неизменным (рис. 2, *б*).

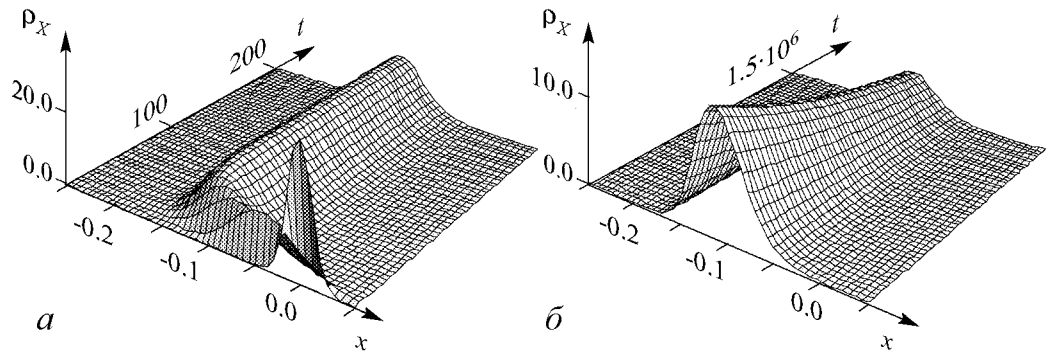


Рис. 2. Эволюция плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ , полученная посредством численного интегрирования уравнения Фоккера–Планка (5),  $|\varepsilon| = 10^{-2}$ ,  $D = 2.5 \times 10^{-4}$ . *a* – Начальный участок эволюции функции плотности вероятности, включающий переходный процесс ( $0 \leq t < t_{tr}$ ,  $t_{tr} \approx 30$ ). *б* – Долговременная эволюция функции  $\rho_X(x, t)$ , переходный процесс не представлен,  $t \geq 50$

На рис. 3 изображены профили плотности вероятности  $\rho_X(x, t^*)$ , взятые в различные моменты времени. Очевидно, что после очень короткого переходного процесса (кривая 1,  $t_1^* = 10$ ), профиль плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$  практически не меняется со временем.

Два различных профиля  $\rho_X(x, t^*)$ , соответствующие моментам времени  $t_2^* = 3 \times 10^1$  и  $t_3^* = 2 \times 10^4$  (кривые 2 и 3, соответственно), очень близко расположены, несмотря на большой временной интервал  $\Delta t = t_3^* - t_2^*$  между ними. Более того, они находятся в отличном согласии с приближенным решением  $A(0)g(x)$ , описываемым уравнением (18) и показанным на рис. 3 квадратами. С ростом времени амплитуда плотности вероятности убывает по экспоненциальному закону, но очень медленно (см. рис. 3, кривые 4 и 5,  $t_4^* = 2.5 \times 10^5$  и  $t_5^* = 10^6$ , соответственно), хотя форма плотности вероятности остается одной и той же во все моменты времени.

Следовательно, принимая во внимание результаты численного интегрирования уравнения Фоккера–Планка (5) и сравнение с полученным приближенным решением (18), приходим к выводу, что сделанные нами предположения при выводе выражений корректны и могут быть использованы для дальнейшего анализа.

Эволюция плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$  может рассматриваться отдельно на двух временных интервалах  $0 \leq t < t_{tr}$  и  $t_{tr} \leq t < +\infty$ , соответственно. Первый участок времени соответствует переходному периоду, когда плотность вероятности эволюционирует к виду (18), близкому к стационарному. Только когда  $0 \leq t < t_{tr}$ , вид вероятности реинжекции  $P_{in}(x)$  может влиять на эволюцию плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ . При  $t \geq t_{tr}$  (когда время переходного периода истекло) эволюция плотности вероятности всецело определяется выражением (18) и совсем не зависит от вероятности реинжекции  $P_{in}(x)$ . Поскольку переходный период очень короткий по сравнению с экспоненциальным спадом плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ , им можно пренебречь и использовать только второй интервал времени  $t_{tr} \leq t < +\infty$  для того, чтобы получить статистические характеристики перемежающегося поведения типа I в присутствии шума. Очевидно, что в этом случае полученные результаты не будут зависеть от процесса реламинаризации и вероятности реинжекции  $P_{in}(x)$ .

Вид распределения  $p(t)$  длительностей  $t$  ламинарных фаз может быть определен из соотношения между  $\rho_X(x, t)$  и  $p(t)$

$$p(t) = - \int_{-\infty}^{\sqrt{|\varepsilon|}} \frac{\partial \rho_X(x, t)}{\partial t} dx. \quad (22)$$

Используя соотношения (18), (19) и (21) можно получить, что распределение дли-

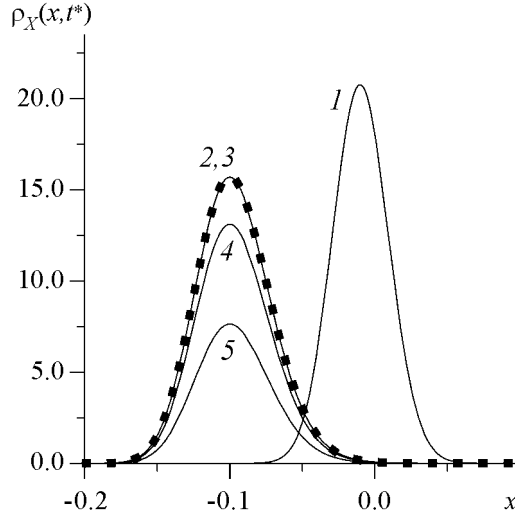


Рис. 3. Профили плотности вероятности  $\rho_X(x, t^*)$  в различные моменты времени  $t^*$ , полученные посредством численного интегрирования уравнения Фоккера–Планка (5)

тельностью ламинарных фаз выражается экспоненциальным законом

$$p(t) = T^{-1} \exp(-t/T), \quad (23)$$

где  $T$ , определяемое выражением (20), есть средняя длительность ламинарных фаз. Полученное аналитическое выражение (20) для средней длительности  $T$  ламинарных фаз согласуется с решением  $T \sim |\varepsilon|^{-1/2} f(\sigma^2 |\varepsilon|^{-3/2})$ , выведенным в предыдущих работах [20, 26, 27] и совпадает с формулой для  $T$ , приведенной в [21]. Если значение параметра надкритичности  $\varepsilon$  достаточно большое, то можно использовать приближенное уравнение  $\ln T \sim D^{-1} |\varepsilon|^{3/2}$  (см. [21]). Основываясь на рассмотрении, проведенном выше, можно утверждать, что выражения (20) и (23) практически не зависят от свойств процесса реламинаризации и могут быть использованы для произвольной вероятности реинжекции  $P_{\text{in}}(x)$ .

## 2. Результаты численного моделирования

Для того чтобы проверить справедливость полученных аналитических выражений, рассмотрим численно поведение двух различных динамических систем, в которых можно наблюдать перемежаемость типа I, добавив шум. В качестве таких систем были выбраны квадратичное отображение (п. 2.1) и неавтономный генератор ван дер Поля (п. 2.2).

### 2.1. Квадратичное отображение с добавлением стохастического слагаемого.

Начнем рассмотрение влияния шума на характеристики перемежаемости типа I на примере квадратичного отображения

$$x_{n+1} = x_n^2 + \lambda + \varepsilon + D\xi_n, \quad \text{mod } 1, \quad (24)$$

где «mod 1» – операция, обеспечивающая возврат системы в окрестность точки  $x = 0$ ;  $\lambda = 0.25$ ; а плотность вероятности случайной величины  $\xi$  распределена равномерно в интервале  $\xi \in [-1, 1]$ . Уравнение (24) можно свести к отображению (3) с помощью линейного преобразования переменных. Если интенсивность шума  $D$  равна нулю, то седло-узловая бифуркация происходит при  $\varepsilon = 0$ . Перемежающееся поведение типа I наблюдается при  $\varepsilon > 0$  в то время как устойчивая неподвижная точка в системе существует при  $\varepsilon < 0$ . Добавив случайное воздействие с интенсивностью  $D = 10^{-7}$  в уравнение (24), можно ожидать, что перемежающееся поведение будет также наблюдаться и в области отрицательных значений параметра надкритичности  $\varepsilon$ .

Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности ниже точки  $\varepsilon_c = 0$  показана на рис. 4. Для сравнения с теоретической зависимостью  $\ln T \sim D^{-1} |\varepsilon|^{3/2}$  по оси абсцисс на рис. 4, а откладываются значения  $|\varepsilon|^{3/2}$  ( $\varepsilon < 0$ ), в то время как ось ординат показана в логарифмическом масштабе. Видно отличное соответствие аналитического закона (20) и данных, полученных при численном моделировании.

Распределение длительностей ламинарных фаз также хорошо согласуется с экспоненциальным законом (23), предсказываемым теорией перемежаемости типа I с шумом (рис. 4, б). Нужно заметить, что имеется небольшой диапазон, в который попадают короткие ламинарные фазы, и где наблюдается отклонение от экспоненциального закона (23). Эта область соответствует переходному периоду  $0 \leq t < t_{\text{tr}}$ ,



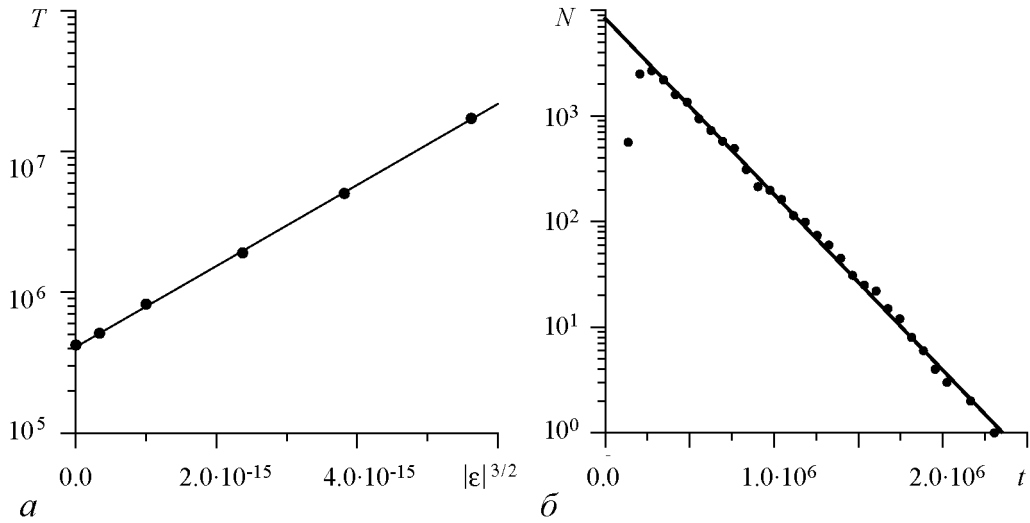


Рис. 4. *a* – Зависимость средней длительности  $T$  ламинарных фаз от параметра надкритичности  $|\epsilon|$  ( $\epsilon < 0$ ) для (24). Точки, полученные итерированием (24) изображены символами (•). Теоретический закон  $\ln T \sim |\epsilon|^{3/2}$  показан сплошной линией. *б* – Распределение длительностей ламинарных фаз для отображения (24), значение параметра надкритичности было выбрано равным  $|\epsilon| = 10^{-11}$ . Аналитический экспоненциальный закон (23) показан сплошной линией

в течение которого плотность вероятности  $\rho_X(x, t)$  приходит к виду (18), близкому к стационарному состоянию, как это уже обсуждалось в разделе 1. Существование этого переходного интервала времени, тем не менее, практически не влияет на статистические характеристики (20) и (23) перемежающегося поведения в присутствии шума в полном соответствии с выводами, сделанными выше.

Таким образом, перемежающееся поведение, наблюдающееся в квадратичном отображении со случайным слагаемым, подчиняется теоретическим закономерностям, полученным в разделе 1. Поскольку теория перемежаемости типа I была построена на основе модели (3), схожей с отображением (24), необходимо исследовать другую систему, чтобы убедиться, что наши теоретические выводы справедливы и применимы к широкому классу нелинейных систем.

**2.2. Осциллятор ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием в присутствии шума.** Рассмотрим в качестве второго примера неавтономный генератор ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\omega_e t) + D\xi(t) \quad (25)$$

под внешним гармоническим воздействием с амплитудой  $A$  и частотой  $\omega_e$ , при наличии стохастического слагаемого  $D\xi(t)$ , где  $\xi(t)$  – дельта-коррелированный белый шум [ $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t)\xi(\tau) \rangle = \delta(t - \tau)$ ].

Значения управляющих параметров были выбраны следующими:  $\lambda = 0.1$ ,  $\omega_e = 0.98$ . Для данных значений параметров и  $D = 0$  динамика неавтономного осциллятора ван дер Поля становится синхронной при  $A = A_c = 0.0238$ . Для интегрирования уравнения (25) использовался одношаговый метод Эйлера с шагом  $h = 5 \times 10^{-4}$ , величина интенсивности шума была фиксированной:  $D = 1$ .

Известно, что при определенных условиях (то есть для слабо нелинейного изохронного осциллятора под внешним периодическим воздействием) можно исполь-

звать метод комплексных амплитуд для поиска решения в виде  $x(t) = \text{Re } a(t)e^{i\omega t}$ , описывающего поведение осциллятора (25) в отсутствие шума. В результате для комплексной амплитуды  $a(t)$  получаем укороченное уравнение  $\dot{a} = -iva + a - |a|^2a - ik$ , где  $\nu$  – расстройка частот,  $k$  – перенормированная амплитуда внешнего воздействия. При малых  $\nu$  и больших  $k$  устойчивая неподвижная точка  $a^* = \text{const}$  на плоскости комплексной амплитуды соответствует синхронному режиму, при этом разрушению синхронизации соответствует локальная седло-узловая бифуркация, ассоциированная с глобальной бифуркацией рождения предельного цикла из общей сепаратрисы седла и узла [28, 29]. Ниже границы режима синхронизации (для малых значений расстройки частот) разность фаз в зависимости от времени

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \omega_e t \quad (26)$$

(где  $\varphi(t)$  – фаза осциллятора ван дер Поля) содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), прерываемые фазовыми проскоками (турбулентные фазы), в течение которых значение  $|\Delta\varphi(t)|$  изменяется на  $2\pi$ . Средняя длительность ламинарных фаз  $T$  зависит от параметра надкритичности  $\varepsilon = (A_c - A)$  по закону (2), соответствующему перемежаемости типа I.

Если добавить случайное слагаемое  $D\xi(t)$  ( $D \neq 0$ ), то закономерности перемежаемости типа I с шумом, описанные выше, будут выявляться для значений параметра  $A > A_c$  (рис. 5, *a*). Для отрицательных значений параметра надкритичности  $\varepsilon$ , как и ожидалось, наблюдается закон  $\ln T \sim D^{-1}|\varepsilon|^{3/2}$ . Чтобы показать это более наглядно, по оси абсцисс на рис. 5, *a* откладываются значения  $|\varepsilon|^{3/2}$  ( $\varepsilon < 0$ ), а ось ординат представлена в логарифмическом масштабе. Нетрудно видеть прекрасное соответствие численных данных и теоретических выводов (20).

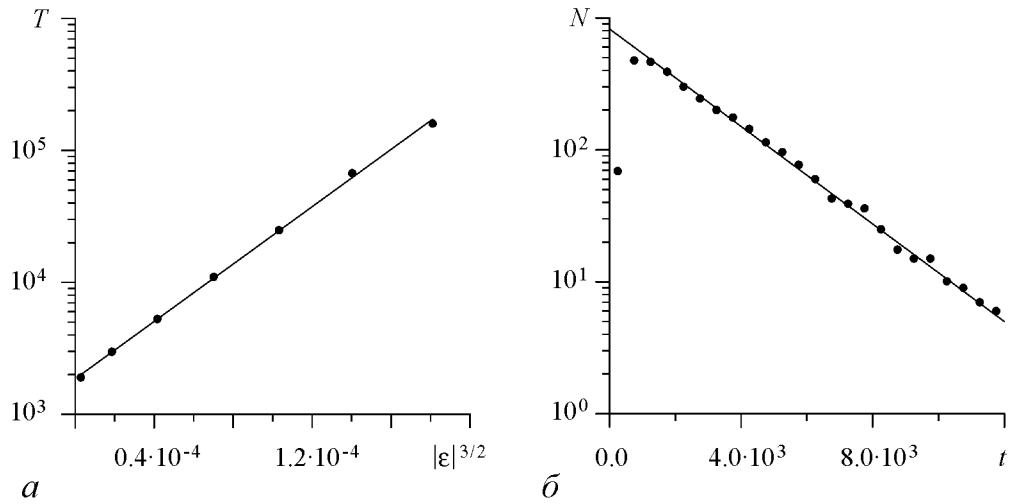


Рис. 5. *a* – Зависимость средней длительности  $T$  ламинарных фаз от параметра надкритичности  $\varepsilon = (A_c - A)$  для неавтономного генератора ван дер Поля со случайным воздействием (25). Точки, полученные численным интегрированием (25) изображены символами (●). Теоретический закон  $\ln T \sim |\varepsilon|^{3/2}$  показан сплошной линией. *b* – Распределение длительностей ламинарных фаз для неавтономного осциллятора ван дер Поля, амплитуда внешнего сигнала  $A = 0.0245$  была взята выше критической точки  $A_c = 0.0238$  ( $\varepsilon = -7 \times 10^{-4}$ ). Ось ординат представлена в логарифмическом шкале. Аналитический экспоненциальный закон (23) показан сплошной линией

Распределение длительностей ламинарных фаз  $N(t)$ , полученное для  $A > A_c$ , также подтверждает справедливость теоретических выводов. Действительно, распределение  $N(t)$ , показанное на рис. 5, б, находится в хорошем соответствии с экспоненциальным законом (23), предсказанным теорией, при этом так же, как и для отображения (24), можно выделить малый диапазон с короткими ламинарными фазами, соответствующий переходному периоду после процедуры реламинаризации. Несмотря на то, что в этом диапазоне наблюдается отклонение от экспоненциального закона, переходный процесс не оказывает существенного влияния на характеристики перемежающегося поведения при наличии в системе шума.

Таким образом, рассмотрев две различные системы, можно сделать выводы, что (а) шум вносит новые черты в перемежающееся поведение, когда система в его отсутствии демонстрирует перемежаемость I типа, при этом данные особенности динамики будут наблюдаться при большем значении управляющего параметра; (б) теоретическое приближение, полученное в разделе 1, является верным.

Необходимо обсудить еще один случай. До настоящего момента мы имели дело со стохастическим внешним воздействием как при теоретическом рассмотрении, так и в численном моделировании. Тем не менее, возмущения могут быть как случайными, так и детерминированными. Хорошо известно, что система Ресслера может рассматриваться как зашумленный периодический осциллятор (см., например, [30]). Кроме того, два типа синхронной динамики, обобщенная синхронизация [31–34] и индуцированная шумом синхронизация [19, 35–38] обуславливаются очень схожими механизмами [39], а различие между ними заключается лишь в характере управляющего сигнала. В случае индуцированной шумом синхронизации хаотический осциллятор управляется случайным внешним сигналом, в то время как при обобщенной синхронизации используется детерминированный сигнал другой хаотической динамической системы. Таким образом, одним из интересных моментов является следующий: будут ли наблюдаться закономерности, выявленные при исследовании динамических систем со стохастическим (случайным) внешним воздействием, в случае, когда шумоподобное поведение обуславливается наличием хаотической динамики. Следующий раздел посвящен рассмотрению этого вопроса.

**2.3. Однонаправленно связанные осцилляторы Ресслера** Обратимся к хаотической системе, управляемой внешним хаотическим сигналом, когда имеет место режим фазовой синхронизации [40, 41]. В этом случае присутствуют как явление синхронизации, так и детерминированная шумоподобная динамика, следовательно, можно ожидать, что зависимости, полученные в разделе 1, окажутся справедливыми.

Исследуемая система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \sigma(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \tag{27}$$

где  $(x_d, y_d, z_d)$  – декартовы координаты ведущего осциллятора,  $(x_r, y_r, z_r)$  – ведомого;  $\sigma$  – параметр, отвечающий за величину связи. Значения других управляющих параметров по аналогии с предыдущими исследованиями [42, 43] были выбраны

следующими:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ . Параметр  $\omega_r$ , задающий собственную частоту ведомой системы, был фиксирован ( $\omega_r=0.95$ ), а значение аналогичного параметра ведущей системы  $\omega_d$  равнялось 0.93. При указанных значениях управляющих параметров хаотические аттракторы обеих подсистем в отсутствие связи являются фазово-когерентными.

Мгновенная фаза хаотического сигнала  $\varphi(t)$  может быть введена традиционным способом как угол поворота  $\varphi_{d,r} = \arctan(y_{d,r}/x_{d,r})$  на плоскости проекции

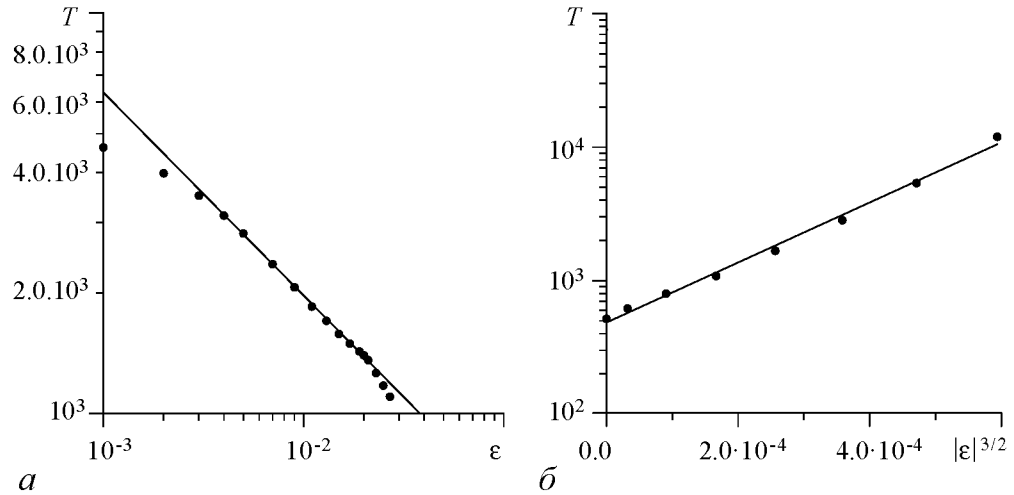


Рис. 6. Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности  $\epsilon = (\sigma_c - \sigma)$  для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (27). Точки, полученные посредством численного интегрирования (27), изображены символами  $\bullet$ .  $a$  – Величина связи  $\sigma < \sigma_c$ , параметр  $\epsilon > 0$ . Оси координат представлены в логарифмическом масштабе, степенной закон  $T \sim \epsilon^{-1/2}$  показан сплошной линией. Отклонения численно полученных данных от теоретической зависимости наблюдается только при очень больших и очень малых значениях  $\epsilon$ .  $b$  – Величина связи  $\sigma > \sigma_c$ , параметр  $\epsilon < 0$ . Представлена зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от величины  $|\epsilon|^{3/2}$ , при этом только ось ординат изображена в логарифмическом масштабе. Теоретический экспоненциальный закон (20) показан сплошной линией

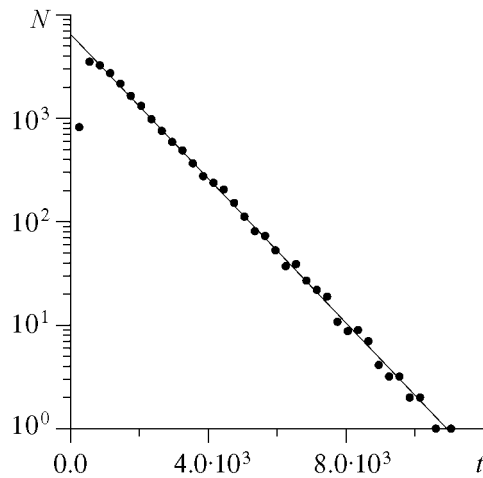


Рис. 7. Распределение длительностей ламинарных фаз для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (27), значение параметра связи  $\sigma = 0.035$  выбрано выше критической точки  $\sigma_c = 0.031$  ( $\epsilon = -0.004$ ). Аналитический экспоненциальный закон (23) показан сплошной линией. Ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

$(x, y)$  каждой системы. Наличие режима фазовой синхронизации диагностировалось при выполнении условия захвата фаз [41]

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_d(t) - \varphi_r(t)| < \text{const}. \quad (28)$$

Ниже границы режима фазовой синхронизации зависимость разности фаз  $\Delta\varphi(t)$  от времени  $t$  содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), чередующиеся с участками, в течение которых значение  $|\Delta\varphi(t)|$  изменяется на  $2\pi$  (турбулентные фазы).

Как и в случае неавтономного осциллятора ван дер Поля со случайным слагаемым (25), будут наблюдаться те же самые степенной (2) и экспоненциальный (20) законы для зависимости средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности  $\varepsilon = \sigma_c - \sigma$ , ниже и выше критической точки  $\sigma_c \approx 0.031$ , соответственно (рис. 6). Распределение длительностей ламинарных фаз  $N(t)$  (рис. 7) также удовлетворяет аналитическому выражению (23).

Принимая во внимание, что полученные результаты находятся в отличном соответствии с теоретическими выводами для перемежаемости типа I в присутствии шума, можно заключить, что не только шум, имеющий случайную природу, но также и детерминированная хаотическая динамика вносит изменения в перемежающееся поведение I типа, при этом имеют место зависимости (20) и (23).

### Заключение

Таким образом, в работе рассмотрен тип перемежающегося поведения, обусловленный взаимодействием детерминированных механизмов и случайной динамики. Исследовав численно три модельные системы, включая случай, когда шум имеет детерминированную природу (два однонаправленно связанных осциллятора Ресслера), можно сделать вывод, что (а) шум вносит новые черты в перемежающееся поведение, когда система в его отсутствие демонстрирует перемежаемость I типа; (б) результаты численного моделирования находятся в отличном соответствии с построенной теорией; (в) процесс реламинаризации и вероятность реинжекции не влияют на статистические характеристики перемежаемости типа I в присутствии шума. Несмотря на то, что в данной работе исследование характеристик перемежающегося поведения было проведено на примере модельных систем, можно ожидать, что те же самые закономерности будут наблюдаться во многих других важных условиях, когда уровень естественных шумов значителен, например в некоторых физиологических [44, 45] и физических [9] системах.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 07-02-00044 и 09-02-92421-КЭ), Фонда некоммерческих программ «Династия», а также аналитической ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы».*

## Библиографический список

1. *Bergé P., Pomeau Y., and Vidal Ch.* L'ordre dans le chaos. Hermann, Paris, 1988.
2. *Dubois M., Rubio M., and Bergé P.* Experimental evidence of intermitstencies associated with a subharmonic bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol.51. P. 1446.
3. *Platt N., Spiegel E.A., and Tresser C.* On-off intermittency: a mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
4. *Heagy J.F., Platt N., and Hammel S.M.* Characterization of on-off intermittency // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 2. P. 1140.
5. *Boccaletti S. and Valladares D.L.* Characterization of intermittent lag synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
6. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Lett.* 2005. Vol. 70, № 2. P. 169.
7. *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., and Kurths J.* Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 1. P. 47.
8. *Lee K.J., Kwak Y., and Lim T.K.* Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, № 2. P. 321.
9. *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., and Arcchi F.T.* Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO2 laser systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 19. P. 194101.
10. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., and Boccaletti S.* Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. P. 114101.
11. *Neiman A., Silchenko A., Anishchenko V.S., and Schimansky-Geier L.* Stochastic resonance: Noise-enhanced phase coherence // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 7118.
12. *Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I., and Kurths J.* Influence of noise on statistical properties of nonhyperbolic attractors // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62. P. 7886.
13. *Sosnovtseva O.V., Fomin A.I., Postnov D.E., and Anishchenko V.S.* Clustering of noise-induced oscillations // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64, № 2. P. 026204.
14. *Pikovsky A.S. and Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 5. P. 775.
15. *Mangioni S., Deza R., Wio H., and Toral R.* Disorder effects of color in nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 13. P. 2389.
16. *Zaikin A.A., Kurths J., and Schimansky-Geier L.* Doubly stochastic resonance // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, № 2. P. 227.
17. *Neiman A. and Russell David F.* Synchronization of noise-induced bursts in noncoupled sensory neurons // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88, № 13. P. 138103.
18. *Zhou C.T., Kurths J., Kiss I.Z., and Hudson J.L.* Noise-enhanced phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 1. P. 014101.

19. Zhou C.T., Kurths J., Allaria E., Boccaletti S., Meucci R., and Arcelli F.T. Noise-enhanced synchronization of homoclinic chaos in a CO<sub>2</sub> laser // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. P. 015205.
20. Hirsch J.E., Huberman B.A., and Scalapino D.J. Theory of intermittency // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 25, № 1. P. 519.
21. Kye W.-H. and Kim C.-M. Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 6304.
22. Cho Jin-Hang, Ko Myung-Suk, Park Young-Jai, and Kim C.-M. Experimental observation of the characteristic relations of type-i intermittency in the presence of noise // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65, № 3. P. 036222.
23. Kye W.-H., Rim S., Kim C.-M., Lee Jong-Han, Ryu Jung-Wan, Yeom Bok-Sil, and Park Young-Jai. Experimental observation of characteristic relations of type-III intermittency in the presence of noise in a simple electronic circuit // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68, № 3. P. 036203.
24. Kim C.-M., Kwon O.J., Lee Eok-Kyun, and Lee Hoyun. New characteristic relations in type-i intermittency // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73, № 4. P. 525.
25. Kim C.-M., Yim Geo-Su, Ryu Jung-Wan, and Park Young-Jai. Characteristic relations of type-iii intermittency in an electronic circuit // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, № 24. P. 5317.
26. Hirsch J.E., Nauenberg M., and Scalapino D.J. // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 87. P. 391.
27. Crutchfield J.P., Farmer J.D., and Huberman B.A. Fluctuations and simple chaotic dynamics // Physics Reports. 1982. Vol. 92, № 2 P. 45.
28. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J. Phase synchronisation in regular and chaotic systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
29. Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K. Two types of phase synchronization destruction // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75, № 3. P. 036205.
30. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., and Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica D. 1997. Vol. 104, № 4. P. 219.
31. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., and Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, № 2. P. 980.
32. Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 5. R4508-R4511.
33. Kocarev Lj. and Parlitz U. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 11. P. 1816.
34. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., and Sushchik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528.
35. Fahy S. and Hamann D.R. Transition from chaotic to nonchaotic behavior in randomly driven systems // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69, № 5. P. 761.

36. *Martian A. and Banavar J.R.* Chaos, noise and synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72, № 10. P. 1451.
37. *Toral R., Mirasso C.R., Hernández-García E., and Piro O.* Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems // *Chaos.* 2001. Vol. 11, № 3. P. 665.
38. *Zhou C.T. and Kurths J.* Noise-induced phase synchronization and synchronization transitions in chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. P. 230602.
39. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 354, № 5–6. P. 423.
40. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences, Cambridge University Press, 2001.
41. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., and Zhou C.T.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports.* 2002. Vol. 366. P. 1.
42. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, № 6. P. 067201.
43. *Hramov A.E., Koronovskii A.A. and Moskalenko O.I.* Generalized synchronization onset // *Europhysics Letters.* 2005. Vol. 72, № 6. P. 901.
44. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., and Prokhorov M.D.* Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73, № 2. P. 026208.
45. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., and Prokhorov M.D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 5. P. 056207.

*Поступила в редакцию 29.07.2009*

## **DISTRIBUTION OF THE LAMINAR PHASES IN THE CASE OF TYPE-I INTERMITTENCY WITH NOISE**

*A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, A.E. Hramov*

This work is devoted to the intermittent behavior caused by the interplay between the dynamical mechanisms resulting in the type-I intermittency and the stochastic processes. The analytical consideration of the laminar phase distribution is given.

*Keywords:* Intermittency, saddle-node bifurcation, noise, chaotic synchronization, laminar phase distribution.





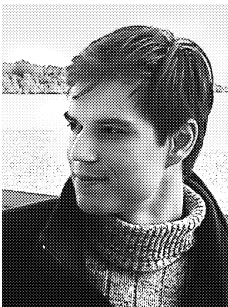
*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



*Куровская Мария Константиновна* – родилась в г. Ташауз (1986). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2007). Награждена медалью Российской академии наук (2008). Кандидат физико-математических наук (2009). Ассистент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика, различные типы хаотической синхронизации и методы их диагностики. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: mc@nonlin.sgu.ru



*Храмов Александр Евгеньевич* – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: ach@nonlin.sgu.ru