



БИФУРКАЦИИ ДВУМЕРНОГО ТОРА В КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ж.Т. Жусубалиев, О.О. Яночкина

Исследуется динамика системы неавтономных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В плоскости параметров численно и аналитически рассчитаны области с различным динамическим поведением. Показано, что в кусочно-гладких динамических системах наряду с классической бифуркацией Неймарка–Сакера существуют еще два механизма рождения инвариантного тора, не имеющие аналогов в гладких системах. В первом случае тор возникает из периодической орбиты через S -бифуркацию. Во втором случае инвариантный тор рождается из устойчивого состояния равновесия. Здесь состояние равновесия исчезает на S -бифуркационной границе и мягко сменяется неустойчивым циклом, окруженным резонансным или эргодическим тором.

Ключевые слова: Кусочно-гладкие динамические системы, S -бифуркация, инвариантный тор, состояние равновесия.

Введение

Практические приложения, в которых приходится прибегать к рассмотрению кусочно-гладких динамических систем, необычайно широки. Это, например, системы с сухим трением, виброударные системы, релейные и импульсные системы автоматического управления, электронные и радиотехнические системы с кусочно-гладкими характеристиками или ключевыми элементами, широкий класс устройств современной силовой электроники.

Фазовые траектории рассматриваемых динамических систем сшиваются из отдельных гладких участков [1–4]. Усложнение колебаний в кусочно-гладких системах связано с двумя типами бифуркаций [2]. Первый тип – точно такой же, как и в гладких системах. Это так называемые локальные бифуркации, например, бифуркации седло-узел, удвоения периода, Неймарка–Сакера, и глобальные – гомоклинические и гетероклинические бифуркации (см., например, [5, 6]).

Второй тип не имеет аналогов в гладких системах и связан с ситуацией, когда траектория периодического движения проходит через границу одной из поверхностей сшивания или касается ее. Это вызывает нарушение условий существования периодического решения и соответствует появлению или исчезновению участка траектории в одной из областей кусочной непрерывности [2]. Такие бифуркации получили название S -бифуркаций [2, 7, 8] (border-collision bifurcations [9]).

Простейшей бифуркационной картине при С-бифуркациях соответствует непрерывный переход решения одного типа в решение другого типа [2]. Возможны и более сложные ситуации, например удвоение, утроение периода колебаний, рождение движений с участками скольжения или хаотического аттрактора из периодической орбиты [3, 7–13].

Изучению нелинейных явлений в кусочно-гладких системах в последние годы уделяется пристальное внимание. Теоретические исследования стимулируются потенциальными приложениями результатов во многих областях науки и техники. Они охватывают приложения к силовой электронике и теории управления [3, 13], механике [4], биологическим [14] и экономическим [15] системам. Обзор этих исследований можно найти в [16].

Наряду с бесконечным каскадом бифуркаций удвоения периода и различными формами перемежаемости, переход к хаосу через возникновение и разрушение двумерного тора является одним из классических сценариев хаотизации колебаний в диссипативных системах. Однако в рассматриваемых системах механизмы рождения и разрушения двумерного тора могут иметь некоторые отличия от классических [3, 17–19].

В классическом случае двумерный тор возникает из периодической орбиты через бифуркацию Неймарка–Сакера, условием которой является выход на единичную окружность пары комплексно-сопряженных мультипликаторов. В статье показано, что в кусочно-гладких системах наряду с классическим существуют еще два механизма рождения двумерного тора, связанные с С-бифуркацией.

В первом случае инвариантный тор возникает из периодической орбиты. В такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов периодической орбиты скачком выходит из единичного круга. Потеря устойчивости сопровождается появлением резонансного или эргодического тора. Во втором случае инвариантный тор рождается из устойчивого состояния равновесия. Здесь состояние равновесия исчезает на С-бифуркационной границе и мягко сменяется неустойчивым циклом типа фокус, окруженным резонансным или эргодическим тором.

1. Постановка задачи

В качестве базового объекта для исследований рассмотрим полупроводниковый преобразователь постоянного напряжения с многозонной импульсной модуляцией [20–23], уравнение движения которой в безразмерной форме имеет вид [24]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y - (\mu - \omega)K_F, & \dot{y} &= \mu x + \omega y - (\mu + \omega)K_F, \\ K_F &= \frac{1}{2N} \sum_{s=1}^N [1 + \text{sign}(\varphi - \eta_s)], \\ \varphi &= \vartheta x(\tau) - y(\tau) + \frac{q}{\Omega}, & \eta_s(t) &= \frac{P}{N\alpha\Omega} (s - 1 + t - \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x, y \in \mathbb{R}$; K_F – сигнал на выходе модулятора; t – безразмерное время; $\eta_s(t)$ – вынуждающее воздействие, представляющее собой периодическую последовательность импульсов пилообразной формы с периодом 1: $\eta_s(t+1) \equiv \eta_s(t)$; $\tau = [t] = k - 1$, $k = 1, 2, \dots$ – дискретное время, где $[\cdot]$ – функция, выделяющая целую часть аргу-

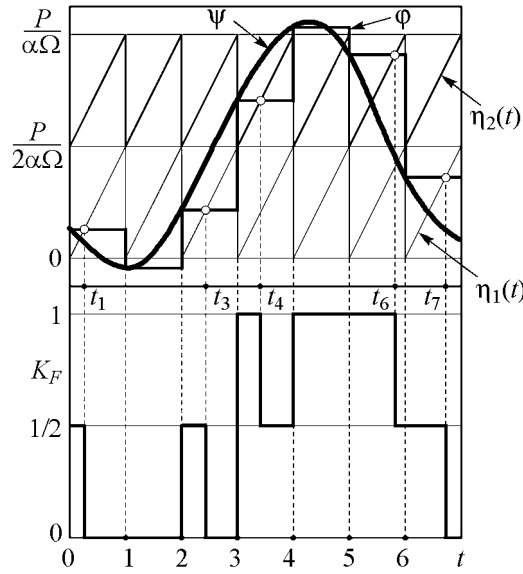


Рис. 1. Временные диаграммы работы модуляторов

менты времени $t = k - 1, k = 1, 2, \dots$ и хранит его до конца текущего k -го интервала $k - 1 < t < k$ (рис. 1). Как можно видеть из диаграммы, изображенной на рис. 1, сигнал φ является кусочно-постоянной функцией. Импульсы запускаются в моменты времени $t = k - 1$ и существуют до момента совпадения сигнала φ с одним из опорных периодических сигналов $\eta_s(t), s = \overline{1, N}$.

В исследованиях были выбраны следующие значения параметров: $\mu = -0.266$; $\omega = 0.384$; $P = 8.734$; $q = P/2$; $N = 2$; $\alpha > 0$ и $\Omega > 0$ – варьируемые параметры.

Систему уравнений (1) можно свести к двумерному кусочно-гладкому стробоскопическому отображению (см., например, [17, 24])

$$\begin{aligned} x_k &= e^{\mu} (\cos \omega \cdot x_{k-1} - \sin \omega \cdot y_{k-1}) + \frac{1}{2} [\sqrt{2}e^{\mu(1-z_k)} \sin(\pi/4 - \omega(1-z_k)) - \gamma s_k - 1], \\ y_k &= e^{\mu} (\sin \omega \cdot x_{k-1} + \cos \omega \cdot y_{k-1}) + \frac{1}{2} [\sqrt{2}e^{\mu(1-z_k)} \cos(\pi/4 - \omega(1-z_k)) - \delta s_k - 1], \\ k &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma = \sqrt{2}e^{\mu} \sin(\pi/4 - \omega)$, $\delta = \sqrt{2}e^{\mu} \cos(\pi/4 - \omega)$.

Переменные s_k и z_k определяются по алгоритму

$$\begin{aligned} s_k &= \begin{cases} 1, & \varphi_{k-1} \leq \frac{P}{2\alpha\Omega}, \\ 2, & \varphi_{k-1} > \frac{P}{2\alpha\Omega}, \end{cases} \\ z_k &= \begin{cases} 0, & \varphi_{k-1} < 0, \\ \frac{2\alpha\Omega}{P} \varphi_{k-1} - s_k + 1, & 0 \leq \varphi_{k-1} \leq \frac{P}{\alpha\Omega}, \\ 1, & \varphi_{k-1} > \frac{P}{\alpha\Omega}, \end{cases} \\ \varphi_{k-1} &= \vartheta x_{k-1} - y_{k-1} + \frac{q}{\Omega}. \end{aligned}$$

мента; q – опорный сигнал; μ, ω – соответственно действительная и мнимая части собственных значений $\lambda_{1,2} = \mu \pm j\omega$, $\mu < 0$ матрицы коэффициентов уравнения (1); $\vartheta = (\mu + \omega)/(\mu - \omega)$. Параметр P регулирует амплитуду импульсов $\eta_s(t)$, Ω – нормированное входное напряжение, α – коэффициент усиления, N – число зон.

На рис. 1 приведены временные диаграммы, поясняющие формирование управляющих импульсов для системы с двумя зонами ($N = 2$). Импульсы K_F формируются методом широтно-импульсной модуляции первого рода [25]. В начале каждого тактового интервала устройство выборки-хранения запо-

Здесь s_k – номер зоны, в которой формируются импульсы; $z_k = t_k - k + 1$ – относительная длительность импульсов (коэффициент заполнения), где t_k – моменты переключения модулятора.

Период T периодического движения динамической системы (1) в общем случае является кратным периоду внешнего воздействия a : $T = ma$, $m = 1, 2, \dots$, где $a = 1$. Движение с таким периодом будем называть m -циклом или циклом периода m .

2. Бифуркационный анализ

В исследованиях параметры α и Ω варьировались в следующих пределах: $4.0 \leq \alpha \leq 24.0$; $3.0 \leq \Omega \leq 13.0$.

На рис. 2 приведена карта динамических режимов в плоскости управляющих параметров (α, Ω) . В области Π_0 сигнал на выходе модулятора равен $K_F = \text{const} = 1$, $t \rightarrow \infty$ и состояние системы описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y - \mu + \omega, & \dot{y} &= \mu x + \omega y - \mu - \omega, \\ \forall x(\tau) - y(\tau) + \frac{q}{\Omega} - \frac{P}{2\alpha\Omega} (s - 1 + t - \tau) &> 0, & s &= 1, 2. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет единственное состояние равновесия $(x^0, y^0) = (1, 1)$, представляющее собой устойчивый фокус (собственные значения матрицы Якоби комплексные с отрицательной действительной частью). Такое поведение вызвано тем, что рассматриваемая динамическая система не имеет собственного «ритма» (не являет-

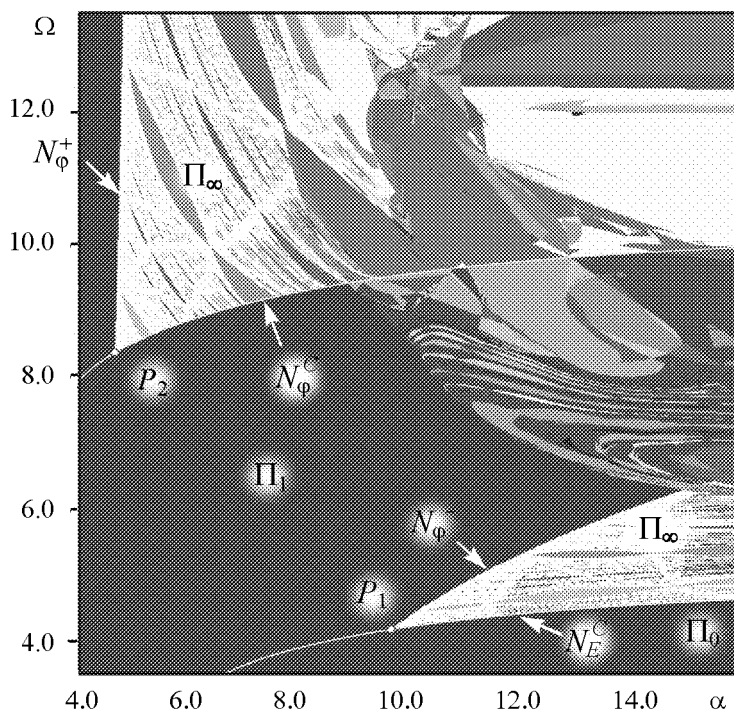


Рис. 2. Карта динамических режимов в плоскости управляющих параметров (α, Ω)

ся активной системой [26]) и в отсутствие внешней вынуждающей силы, то есть управляющих импульсов K_F , не может совершать колебательное движение. Если возмутить систему, то возникают свободные колебания, которые после некоторого переходного процесса затухают из-за диссипации. Частота свободных колебаний равна $\omega/2\pi$, а скорость затухания определяется величиной $|\mu|^{-1}$.

В области, ограниченной бифуркационными линиями N_E^C и N_Φ^C , уравнение (1) имеет единственное периодическое решение с периодом внешнего воздействия (1-цикл), определяемое неподвижной точкой (x^-, y^-) отображения (2). Это решение отвечает вынужденным колебаниям, индуцированным импульсами модулятора второй зоны. Координаты (x^-, y^-) могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} x = e^\mu (\cos \omega \cdot x - \sin \omega \cdot y) + \frac{1}{2} [\sqrt{2}e^{\mu(1-z)} \sin(\pi/4 - \omega(1-z)) - 2\gamma], \\ y = e^\mu (\sin \omega \cdot x + \cos \omega \cdot y) + \frac{1}{2} [\sqrt{2}e^{\mu(1-z)} \cos(\pi/4 - \omega(1-z)) - 2\delta], \\ \vartheta x - y + \frac{q}{\Omega} - \frac{P}{2\alpha\Omega} (1+z) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

После исключения переменных (x, y) система (3) приводится к трансцендентному уравнению относительно коэффициента заполнения z

$$\xi(z) = \vartheta\sigma_1(z) - \sigma_2(z) + \frac{2q}{\Omega} - \frac{P}{\alpha\Omega} (1+z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_1(z) &= 1 + \frac{e^{2\mu} + f_1 - f_1 e^\mu \cos \omega - f_2 e^\mu \sin \omega - e^\mu (\cos \omega - \sin \omega)}{1 - 2e^\mu \cos \omega + e^{2\mu}}, \\ \sigma_2(z) &= 1 + \frac{e^{2\mu} + f_2 - f_2 e^\mu \cos \omega + f_1 e^\mu \sin \omega - e^\mu (\cos \omega + \sin \omega)}{1 - 2e^\mu \cos \omega + e^{2\mu}}, \end{aligned}$$

где

$$f_1 = e^{\mu(1-z)} \{\cos[\omega(1-z)] - \sin[\omega(1-z)]\}, \quad f_2 = e^{\mu(1-z)} \{\cos[\omega(1-z)] + \sin[\omega(1-z)]\}.$$

Для существования решения $z_* \in [0, 1]$ этого уравнения ввиду непрерывности $\xi(z)$ достаточно выполнения неравенства

$$\xi(0)\xi(1) < 0. \quad (5)$$

Доказательство условия (5) можно найти, например, в [25].

Для построения границ области существования неподвижной точки (x^-, y^-) достаточно рассмотреть условия нарушения неравенства (5), соответствующие появлению корней $z_* = 1$ и $z_* = 0$. Подставив эти значения в (4), получим искомые границы в форме явной зависимости между параметрами α и Ω

$$\begin{aligned} N_\Phi^C &= \left\{ (\alpha, \Omega) : \frac{2\omega}{\mu - \omega} + \frac{q}{\alpha\Omega} (\alpha - 2) = 0 \right\}, \\ N_E^C &= \left\{ (\alpha, \Omega) : \frac{2\omega}{\mu - \omega} + \frac{P}{\alpha\Omega} (\alpha - 1) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

При нарушении условия (5) система имеет либо состояние равновесия, либо периодическое решение другого типа, индуцируемое импульсами модулятора первой зоны.

Обсудим сначала поведение динамической системы в окрестности N_E^C . Траектория рассматриваемого периодического решения сшивается из двух участков. Нарушение условия существования этого решения происходит из-за исчезновения одного из участков фазовой траектории на С-бифуркационной границе N_E^C , когда корень уравнения (4) принимает граничное значение $z_* = 1$. Из системы (3) и непрерывной зависимости решения уравнения (4) от параметров α, Ω легко увидеть, что на линии N_E^C неподвижная точка (x^-, y^-) непрерывно переходит в состояние равновесия.

На С-бифуркационной границе N_E^C мультипликаторы неподвижной точки (x^-, y^-) равны

$$\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j, \quad \rho_r = e^\mu \cos \omega, \quad \rho_j = e^\mu \sin \omega \sqrt{1 - \frac{\alpha\Omega}{P}\eta}, \quad \eta = \frac{2(\mu^2 + \omega^2)}{(\mu - \omega)e^\mu \sin \omega}.$$

Как видно, действительная часть мультипликаторов не зависит от параметров α и Ω , следовательно, устойчивость определяется только мнимой частью. Несложно показать, что условие устойчивости этой неподвижной точки определяется неравенством

$$e^{2\mu} - \frac{4(\mu^2 + \omega^2)}{(2\theta - 2 + P/\Omega)(\mu - \omega)} e^\mu \sin \omega < 1$$

или

$$e^{2\mu} - \frac{(\mu^2 + \omega^2)(2 - \alpha)}{2\omega} e^\mu \sin \omega < 1.$$

Проследим за изменением мультипликаторов вдоль бифуркационной кривой N_E^C . Чуть выше границы N_E^C расположена кривая суперкритической бифуркации Неймарка-Сакера N_φ^- . Кривая N_φ^- опирается на линию N_E^C в точке P_1 коразмерности два. Координаты точки P_1 в плоскости параметров (α, Ω) определяются

$$P_1 = \left(\frac{2\omega(1 - e^{2\mu})}{e^\mu(\mu^2 + \omega^2) \sin \omega} + 2, \quad \frac{P(\omega - \mu)(1 - e^{2\mu})}{4e^\mu(\mu^2 + \omega^2) \sin \omega + 4\omega(1 - e^{2\mu})} \right).$$

Область, имеющая форму «клюва», ограниченная линиями N_E^C и N_φ^- , соответствует области квазипериодичности и хаоса. Между линиями N_E^C и N_φ^- можно видеть многочисленные окна с периодической динамикой, отвечающие резонансным языкам.

При изменении параметров вдоль кривой N_E^C в сторону возрастающих значений α в точке P_1 комплексно-сопряженная пара мультипликаторов $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$ выходит на границу единичного круга и неподвижная точка (x^-, y^-) становится неустойчивым фокусом.

Таким образом, на участке бифуркационной кривой N_E^C , расположенном слева от точки P_1 , из состояния равновесия мягко рождается устойчивый цикл периода 1. На втором участке, расположенном справа от точки P_1 , из устойчивого состояния равновесия возникает неустойчивый 1-цикл с комплексно-сопряженной парой мультипликаторов (неустойчивый фокус), окруженный резонансным или эргодическим тором.

Характер движения на торе определяется числом вращения. Когда оно иррационально, инвариантный тор плотно заполняется траекториями (сечение Пуанкаре представляет собой гладкую замкнутую кривую) и динамика квазипериодична.

На рис. 3, *a* изображена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая рождение квазипериодических колебаний из устойчивого состояния равновесия. На рис. 3, *б* приведена зависимость абсолютного значения комплексно-сопряженной пары мультипликаторов 1-цикла от параметра Ω . Как видно из этих диаграмм, при увеличении Ω сначала из состояния равновесия возникает инвариантный тор с иррациональным числом вращения, а затем в точке $\Omega = \Omega_\varphi^-$, лежащей на линии N_φ^- , квазипериодический режим мягко сменяется периодическим через «обратную» суперкритическую бифуркацию Неймарка–Сакера.

При рациональном числе вращения на инвариантном торе имеется четное число периодических орбит, половина из которых устойчивые, а половина – седловые, а сам тор образован замыканием неустойчивых многообразий седловых циклов. Остановимся на это переходе чуть подробнее. Важно отметить, что резонансные языки ограничены не кривыми седло-узловой бифуркации, как в случае гладких систем, а С-бифуркационными линиями, в точках которых устойчивая периодическая орбита сливается с седловой и исчезает [3, 17]. В такой бифуркации с седловой периодической орбитой может сливаться гиперболический цикл, имеющий тип как устойчивого узла, так и устойчивого фокуса. Рис. 4 иллюстрирует рождение резонансного тора устойчивого состояния равновесия. На бифуркационной диаграмме сплошные

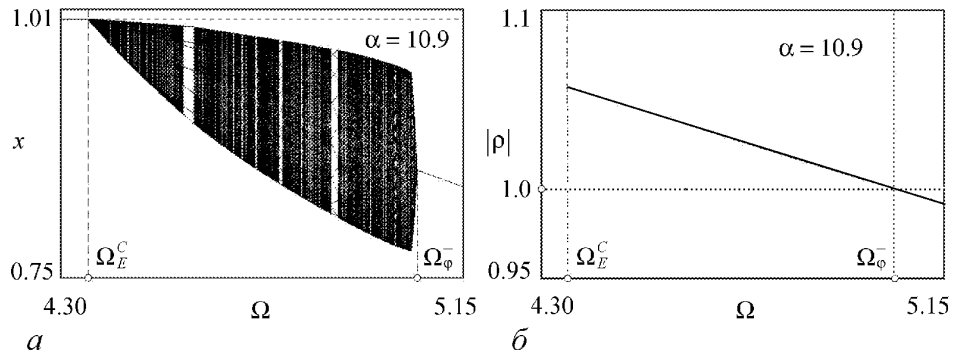


Рис. 3. С-бифуркации рождения эргодического тора из состояния равновесия, где Ω_φ^- , Ω_E^C – бифуркационные значения параметра Ω . В точке Ω_φ^- реализуется классическая суперкритическая бифуркация Неймарка–Сакера. *a* – бифуркационная диаграмма. *б* – зависимость абсолютного значения $|\rho|$ комплексно-сопряженной пары мультипликаторов $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$ от параметра Ω

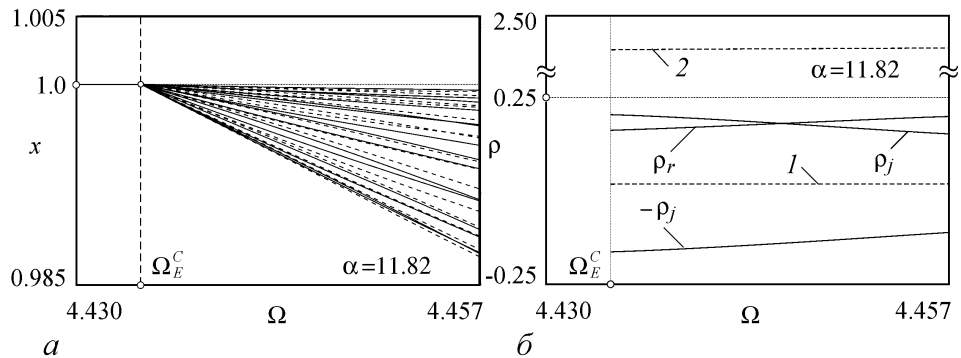


Рис. 4. К С-бифуркации рождения резонансного тора из состояния равновесия. *a* – бифуркационная диаграмма. Сплошные линии соответствуют устойчивому 15-циклу, а пунктирные – седловому. *б* – зависимости мультипликаторов устойчивого и седлового 15-циклов от параметра Ω . Штриховые линии 1 и 2 соответствуют мультипликаторам седлового цикла, а сплошные – мультипликаторам $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$ устойчивого цикла. Ω_E^C – бифуркационное значение параметра Ω

из линии соответствуют устойчивому 15-циклу, а пунктирные – седловому. На рис. 4, б приведены зависимости мультипликаторов от параметра Ω , где пунктирные линии, обозначенные цифрами 1 и 2, соответствуют мультипликаторам седлового 15-цикла, а сплошные – мультипликаторам устойчивого 15-цикла. На рис. 5 изображен фазовый портрет динамической системы (2) при значениях параметров $\alpha = 11.82$ и $\Omega = 4.457$, лежащих внутри резонансного языка 1 : 15. На это рисунке черными точками обозначены точки устойчивого цикла, а белыми – седлового. Через W_{\pm}^U , W_{\pm}^S обозначены соответственно неустойчивые и устойчивые многообразия седловой периодической орбиты.

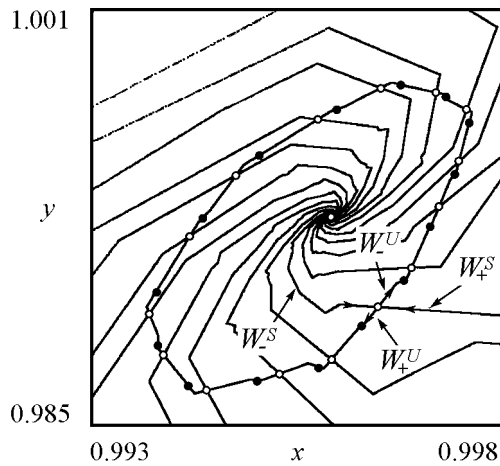


Рис. 5. Фазовый портрет динамической системы (2) при значениях параметров $\alpha = 11.82$, $\Omega = 4.457$, лежащих внутри резонансного языка 1 : 15

Остается теперь рассмотреть бифуркации при переходе через границу N_{φ}^C . Выше кривой N_{φ}^C расположена линия N_{φ}^+ субкритической бифуркации Неймарка–Сакера, которая опирается на N_{φ}^C в точке

$$P_2 = \left(\frac{\omega(1 - e^{2\mu})}{e^{\mu}(\mu^2 + \omega^2) \sin \omega} + 1, \frac{P(\omega - \mu)(1 - e^{2\mu})}{2e^{\mu}(\mu^2 + \omega^2) \sin \omega + 2\omega(1 - e^{2\mu})} \right)$$

коразмерности два.

Точка P_2 делит границу N_{φ}^C на два участка. При переходе через участок, расположенный слева от P_2 , реализуется С-бифуркация простого изменения типа решения: устойчивый 1-цикл переходит в устойчивый цикл того же периода, но другого типа. Это движение индуцируется импульсами модулятора первой зоны и отвечает неподвижной точке (x^+, y^+) отображения (2)

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{1}{2} + \frac{(1 - e^{\mu} \cos \omega) f_1(z_*) - 1 + e^{\mu}(\cos \omega + \sin \omega) - f_2(z_*) e^{\mu} \sin \omega}{2 - 4e^{\mu} \cos \omega + 2e^{2\mu}}, \\ y^+ &= \frac{1}{2} + \frac{(1 - e^{\mu} \cos \omega) f_2(z_*) - 1 + e^{\mu}(\cos \omega - \sin \omega) + f_1(z_*) e^{\mu} \sin \omega}{2 - 4e^{\mu} \cos \omega + 2e^{2\mu}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где z_* – корень уравнения

$$\vartheta \sigma_1(z) - \sigma_2(z) + \frac{\vartheta - 1}{1 - 2e^{\mu} \cos \omega + e^{2\mu}} + \frac{P}{\Omega} - \frac{P}{\alpha \Omega} z = 0, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

При переходе через участок справа от точки P_2 мягко возникает инвариантный тор, а неподвижная точка (x^+, y^+) становится неустойчивым фокусом. Как удалось установить, при движении по параметрам к линии N_{φ}^C амплитуда колебаний монотонно убывает и становится равной нулю на бифуркационной границе N_{φ}^C . Так что на самой линии N_{φ}^C система (1) имеет устойчивое состояние равновесия $(x^+, y^+) = (x_0^+, y_0^+) = (1/2, 1/2)$. Необходимо отметить, что это состояние негрубое.

На рис. 6 приведены бифуркационная диаграмма и зависимость абсолютно значения комплексно-сопряженной пары мультипликаторов 1-цикла от параметра α , иллюстрирующие рождение эргодического тора из периодической орбиты. Как

мы видим из рис. 6, *a*, при уменьшении α комплексно-сопряженная пара мультипликаторов 1-цикла скачком выходит из единичного круга. Потеря устойчивости 1-цикла сопровождается мягким возникновением квазипериодических колебаний (см. рис. 6, *б*), а далее в точке $\alpha = \alpha_{\phi}^+$ реализуется «обратная» субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера, при которой неустойчивый цикл периода 1 вновь становится устойчивым.

На рис. 7 представлены результаты бифуркационного анализа, демонстрирующие возникновение резонансного тора из периодической орбиты. В исследованиях был выбран резонансный язык 1 : 6. Резонансный язык опирается на сегмент

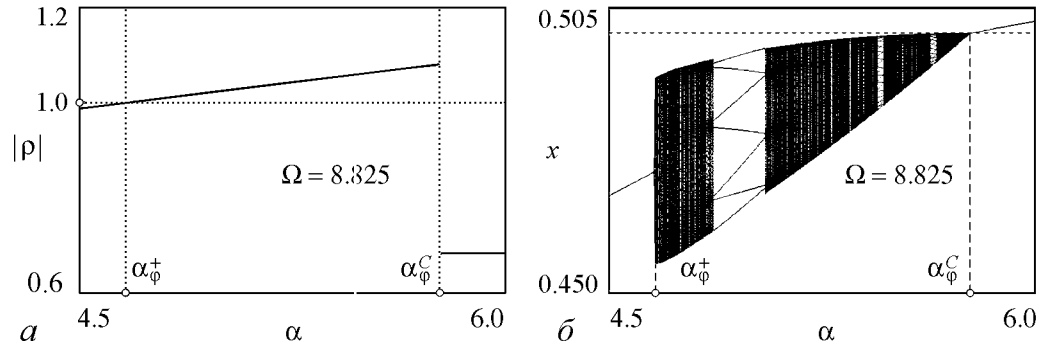


Рис. 6. С-бифуркации рождения эргодического тора из периодической орбиты, где α_{ϕ}^+ , α_{ϕ}^C – бифуркационные значения параметра α . В точке α_{ϕ}^+ реализуется субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера. *a* – зависимость абсолютного значения $|\rho|$ комплексно-сопряженной пары мультипликаторов $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$ от параметра α . *б* – бифуркационная диаграмма

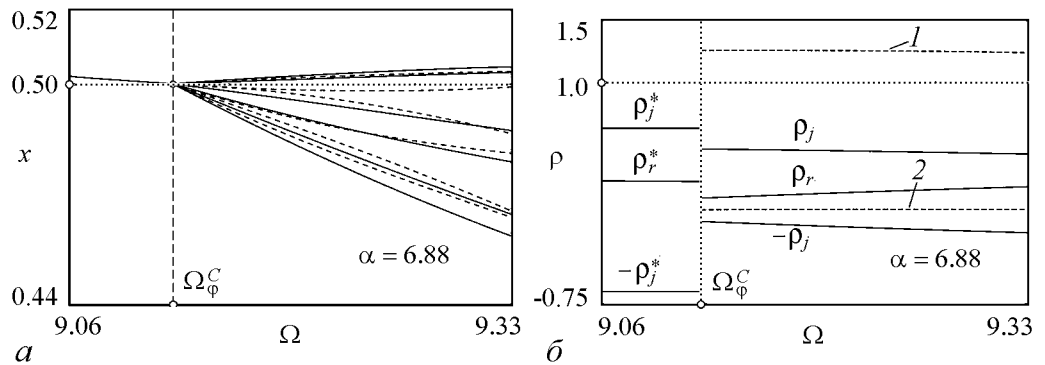
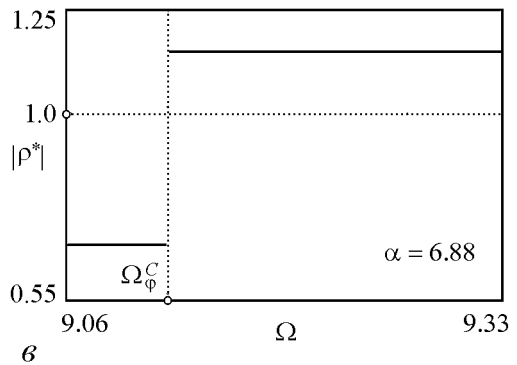


Рис. 7. К С-бифуркации рождения резонансного тора из периодической орбиты. *a* – бифуркационная диаграмма. Сплошные линии соответствуют устойчивому 6-циклу, а пунктирные – седловому. *б* – зависимости мультипликаторов устойчивого и седлового 6-циклов от параметра Ω . Штриховые линии 1 и 2 соответствуют мультипликаторам седлового цикла, а сплошные – мультипликаторам $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$ устойчивого 6-цикла. $\rho_{1,2}^* = \rho_r^* \pm j\rho_j^*$ – мультипликаторы устойчивого 1-цикла. Ω_{ϕ}^C – бифуркационное значение параметра Ω . *в* – зависимость абсолютного значения $|\rho^*|$ комплексно-сопряженной пары мультипликаторов $\rho_{1,2}^* = \rho_r^* \pm j\rho_j^*$ цикла периода 1 от параметра Ω



кривой N_φ^C , длина которого является ненулевой (см. также [3]). В точках этого сегмента мягко рождается пара циклов – устойчивый и седловой, лежащие на двумерном инвариантном торе. Обсудим эту бифуркацию более подробно.

Как мы уже выяснили, ниже бифуркационной границы N_φ^C отображение (2) имеет устойчивую неподвижную точку (x^-, y^-) . При переходе через N_φ^C справа от P_2 неподвижная точка (x^-, y^-) меняет тип и становится неустойчивым фокусом с координатами (6). Как показано на рис. 7,б, в такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов периодической орбиты скачком выходит из единичного круга. Потеря устойчивости сопровождается появлением резонансного тора.

На бифуркационной диаграмме рис.7, а сплошные линии соответствуют устойчивому 6-циклу, а пунктирные – седловому. На рис. 7, б приведены зависимости мультипликаторов от параметра α , где пунктирные линии 1, 2 соответствуют мультипликаторам седлового 6-цикла, а сплошные – мультипликаторам устойчивого 6-цикла. Мультипликаторы устойчивого 1-цикла обозначены через $\rho_{1,2}^* = \rho_r^* \pm j\rho_j^*$. На рис. 7, в изображена зависимость абсолютного значения $|\rho^*|$ мультипликаторов $\rho_{1,2}^* = \rho_r^* \pm j\rho_j^*$ 1-цикла от параметра Ω .

На рис. 8 показан фазовый портрет динамической системы (2) при значениях параметров α и Ω , лежащих внутри резонансного языка.

Как можно видеть из диаграмм, приведенных на рис. 3, а и рис. 6, б, характерный размер инвариантной кривой (её «диаметр») при удалении от линий N_E^C и N_φ^C увеличивается приблизительно линейно от нуля в отличие от параболической зависимости, характерной для классической бифуркации Неймарка–Сакера.

Заключение

В данной статье представлены результаты бифуркационного анализа кусочно-гладкой динамической системы, демонстрирующей квазипериодическое поведение. Показано, что в кусочно-гладких системах наряду с классической бифуркацией Неймарка–Сакера существуют еще два механизма рождения инвариантного тора.

В первом случае двумерный тор мягко возникает из периодической орбиты через С-бифуркацию. В такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов скачком выходит из единичного круга: устойчивый цикл переходит в неустойчивый цикл того же периода, но другого типа. Потеря устойчивости сопровождается появлением резонансного или эргодического тора.

Во втором случае инвариантный тор рождается из состояния равновесия, имеющего тип устойчивого фокуса. Здесь состояние равновесия исчезает на С-бифурка-

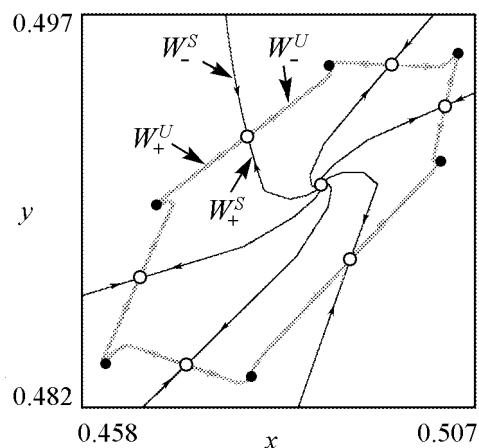


Рис. 8. Фазовый портрет динамической системы (2) при значениях параметров $\alpha = 6.8$, $\Omega = 9.3$, лежащих внутри резонансного языка 1 : 6

ционной границе и мягко сменяется неустойчивым циклом, окруженным резонансным или эргодическим тором.

В обоих случаях характерный размер инвариантного тора («диаметр») при удалении от точки бифуркации изменяется приблизительно линейно от нуля в отличие от параболической зависимости, характерной для классической бифуркации Неймарка–Сакера.

Библиографический список

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
3. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.
4. Leine R.I., Nijmeijer H. Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems. Berlin: Springer Verlag, 2004.
5. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Современные проблемы математики: фундаментальные направления /Под ред. В. И. Арнольда. М.: ВИНТИ, 1986.
6. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geier L. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Berlin: Springer, 2007.
7. Фейгин М.И. Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 861.
8. di Bernardo M, Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. Local analysis of C-bifurcations in n -dimensional piecewise-smooth dynamical systems // Chaos, Solitons and Fractals. 1999. Vol. 10, № 11. P. 1881.
9. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-collision bifurcations including «period two to period three» for piecewise smooth systems // Physica D. 1992. № 57. P. 39.
10. Banerjee S., Ranjan P., Grebogi C. Bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps – theory and applications in switching circuits // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2000. Vol. 47, № 5. P. 633.
11. Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterlin E.A., Mosekilde E. Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in a piecewise-smooth dynamical system // Int. J. Bifurcation Chaos. 2001. Vol. 11, № 12. P. 1193.
12. di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A.R. Grazing bifurcations in n -dimensional piecewise-smooth dynamical systems // Physica D. 2001. Vol. 160. P. 222.
13. Banerjee S., Verghese G.C. (Eds.) Nonlinear phenomena in power electronics. New York: IEEE Press, 2001.
14. Keener J., Sneyd J. Mathematical Physiology. New York: Springer Verlag, 1998.
15. Laugesen J., Mosekilde E. Border-collision bifurcations in a dynamic management game // Comp. Oper. Res. 2006. № 33. P. 464.

16. *di Bernardo M., Budd C., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B., Olivar G., Piironen P.T.* Bifurcations in nonsmooth dynamical systems // SIAM Review. 2008. Vol. 50, № 4. P. 629.
17. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Torus birth bifurcation in a DC/DC converter // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2006. Vol. 53, № 8. P. 2006. 1839.
18. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Birth of bilayered torus and torus breakdown in a piecewise-smooth dynamical system // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 351, № 3. P. 167.
19. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Maity S.M., Mohanan S., Banerjee S.* Border collision route to quasiperiodicity: Numerical investigation and experimental confirmation // Chaos. 2006. Vol. 16. P. 023122-1–023122-11.
20. *Кобзев А.В.* Многозонная импульсная модуляция. Новосибирск: Наука, 1979.
21. *Кобзев А.В., Михальченко Г.Я., Музыченко Н.М.* Модуляционные источники питания РЭА. Томск: Радио и связь. Томский отдел, 1990.
22. *Lai J.S., Peng F.Z.* Multilevel converters – a new breed of power converters // IEEE Trans. Ind. Appl. 1996. Vol. 32, № 3. P. 509.
23. *Meynard T.A., Foch H., Thomas P., Courault J., Jakob R., Nahrstaedt M.* Multicell converters: Basic concepts and industry applications // IEEE Trans. Ind. Electron. 2002. Vol. 49, № 5. P. 955.
24. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Direct transition from a stable equilibrium to quasiperiodicity in non-smooth systems // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372, № 13. P. 2237.
25. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1993.
26. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.

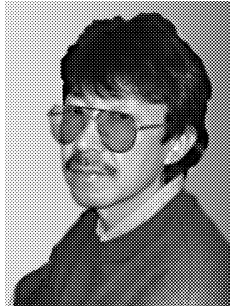
Поступила в редакцию 9.04.2009

BIFURCATIONS OF A TWO-DIMENSIONAL TORUS IN PIECEWISE-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS

Zh.T. Zhusubaliyev, O.O. Yanochkina

Considering a set of coupled nonautonomous differential equations with discontinuous right-hand sides, we discuss two different scenarios for torus birth bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems. One scenario is the continuous transformation of the stable equilibrium into an unstable focus period-1 orbit surrounded by a resonant or ergodic torus. Another is the transition from a stable periodic orbit to an invariant torus through a border-collision bifurcation in which two complex-conjugate multipliers jump abruptly from the inside to the outside of the unit circle.

Keywords: Piecewise-smooth dynamical systems, border-collision bifurcation, invariant torus, equilibrium point



Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – доктор технических наук, профессор. Окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР, 1982). После окончания института работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. Защитил кандидатскую диссертацию (1989) и диссертацию доктора технических наук (2002) в области исследования нелинейной динамики и хаоса в импульсных системах автоматического управления. Профессор кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Область научных интересов – теория бифуркаций и динамического хаоса; сложная динамика и хаос в кусочно-гладких динамических системах, импульсных системах управления и вибрационной механике. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати, является соавтором 5 монографий и одного учебного пособия. Член Международного общества физики и управления.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Курский государственный технический университет

E-mail: zhanybai@mail.kursk.ru, zhanybai@hotmail.com



Яночкина Ольга Олеговна – окончила машиностроительный факультет Курского государственного технического университета (КурскГТУ, 2001). Инженер кафедры вычислительной техники КурскГТУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория бифуркаций, математическое моделирование импульсных систем автоматического управления. Имеет 11 научных публикаций.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Курский государственный технический университет

E-mail: yanoolga@gmail.com