



БИФУРКАЦИЯ БОГДАНОВА–ТАКЕНСА: ОТ НЕПРЕРЫВНОЙ К ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Ю.В. Седова

Обсуждается методически важная бифуркация – Богданова–Такенса. Для простейшей модели описаны связанные с ней бифуркации и эволюция фазовых портретов. Представлены примеры нелинейных систем с такой бифуркацией. Обсуждается метод построения дискретных моделей, основанный на полуявной схеме Эйлера. На основе непрерывного прототипа построена дискретная модель осциллятора Богданова–Такенса, дан аналитический анализ ее бифуркаций коразмерности один и два. Методом карт динамических режимов выявлена картина языков синхронизации и продемонстрировано свойство скейлинга. Даны иллюстрации разрушения и исчезновения инвариантной кривой. Обсуждается еще одно отображение, удобное для учебных целей – отображение Богданова. Представлены некоторые Интернет-ресурсы, интересные с методической точки зрения.

Ключевые слова: Бифуркация Богданова–Такенса, дискретные модели.

Введение

Бифуркация Богданова–Такенса является одной из важнейших в теории бифуркаций. К идее этой бифуркации можно прийти с помощью следующего рассуждения. Пусть в нелинейной системе возможны автоколебания и имеется параметр, ответственный за их возникновение в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Пусть в системе есть еще один параметр, который может приводить к исчезновению устойчивого равновесия в результате седло-узловой бифуркации. Каждой из этих двух бифуркаций отвечает некоторая линия на плоскости параметров указанной гипотетической системы. Точка возможного пересечения линий представляет собой точку бифуркации Богданова–Такенса.

Очевидно, что коразмерность¹ обсуждаемой бифуркации равна двум. Бифуркация Богданова–Такенса была введена в рассмотрение в 1970-е годы и в настоящее время имеет необходимое математическое описание, включающее построение нормальной формы, версальной деформации и т.д. [1–3]. В силу своей достаточно низкой коразмерности она появляется во многих существенных задачах теории колебаний и нелинейной динамики.

В настоящей работе анализируются некоторые методические вопросы, связанные с этой бифуркацией, которые могут быть полезными и в учебных целях.

¹Коразмерность – минимальное число параметров, при котором бифуркация является типичной [1].

Обсуждаются свойства дискретного отображения, полученного с помощью модели бифуркации Богданова–Тakens, реализующейся в автоколебательном осцилляторе. Кроме того, рассматривается одна из важных для теории бифуркаций идей, ассоциирующая консервативную систему с бифуркационной ситуацией. Исследуется также соответствующий слабодиссипативный дискретный осциллятор.

1. Автоколебательный осциллятор с бифуркацией Богданова–Тakens

Для «потребителей» теории бифуркаций важны простые примеры, в которых просматриваются основные моменты явления. Для бифуркации Богданова–Тakens таким примером может служить осциллятор вида

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + f(x) = 0, \quad (1)$$

где функция $f(x)$ отвечает потенциалу в виде кубического полинома

$$f(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x}, \quad U(x) = ax - \frac{x^3}{3}. \quad (2)$$

Потенциальная функция $U(x)$ характеризуется наличием максимума и минимума (рис. 1). Соответственно в системе возможны неустойчивая и устойчивая неподвижные точки, которые легко найти из условия равенства нулю производной от потенциала

$$x_0 = \pm\sqrt{a}. \quad (3)$$

Верхний знак в (3) соответствует неустойчивой точке, а нижний – устойчивой. Таким образом, параметр a управляет взаимным положением экстремумов и отвечает за бифуркацию «седло-узел» слияния неподвижных точек при

$$a = 0. \quad (4)$$

Член $(\mu - x)\dot{x}$ в (1) может характеризовать как положительную, так и отрицательную диссипацию. Поэтому параметр μ отвечает за возможность возникновения автоколебаний, а значит – за бифуркацию Андронова–Хопфа. Ее условие легко найти из

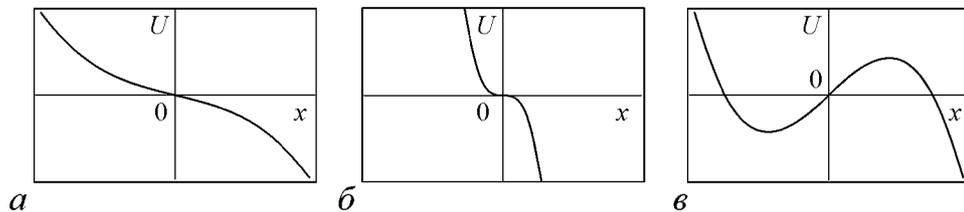


Рис. 1. Вид потенциальной функции: a – до порога бифуркации, $a < 0$; b – в точке бифуркации, $a = 0$; v – за порогом бифуркации, $a > 0$

физических соображений. Действительно, диссипация меняет знак с положительно-го на отрицательный при $\mu - x_0 = 0$. Следовательно, бифуркация Андронова–Хопфа имеет место при

$$\mu = -\sqrt{a}. \quad (5)$$

Устойчивый предельный цикл реализуется при отрицательном трении в осцилляторе (1), а именно при $\mu < -\sqrt{a}$.

Таким образом, осциллятор (1) имеет все «предпосылки» для реализации точки бифуркации Богданова–Тakensа при вариации двух существенных параметров, один из которых a отвечает за бифуркацию седло-узел, а второй μ – за бифуркацию Андронова–Хопфа.

В методических целях полезно получить условия этих бифуркаций и формальным образом. Для этого представим уравнение (1) в стандартном для динамической системы второго порядка виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\mu - x)y - a + x^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Устойчивая неподвижная точка этой системы

$$x_0 = -\sqrt{a}, \quad y_0 = 0, \quad (7)$$

а линеаризованная в ее окрестности матрица

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -y_0 + 2x_0 & \mu - x_0 \end{pmatrix}.$$

с учетом (7) принимает вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{a} & \sqrt{a} + \mu \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Находим след S и якобиан J этой матрицы

$$S = \sqrt{a} + \mu, \quad J = 2\sqrt{a}. \quad (9)$$

Условием бифуркации седло-узел является обращение в ноль якобиана матрицы возмущений, а бифуркации Андронова–Хопфа – ее следа [4, с. 172]. Таким образом, приходим к условиям (4) и (5).

Общая точка двух линий (4) и (5), отвечающая бифуркации Богданова–Тakensа, на плоскости параметров имеет координаты $\mu = a = 0$. В этой точке, как следует из (9), обращаются в ноль одновременно и след, и якобиан матрицы возмущений, что может служить удобным приемом при определении точек Богданова–Тakensа в конкретных системах.

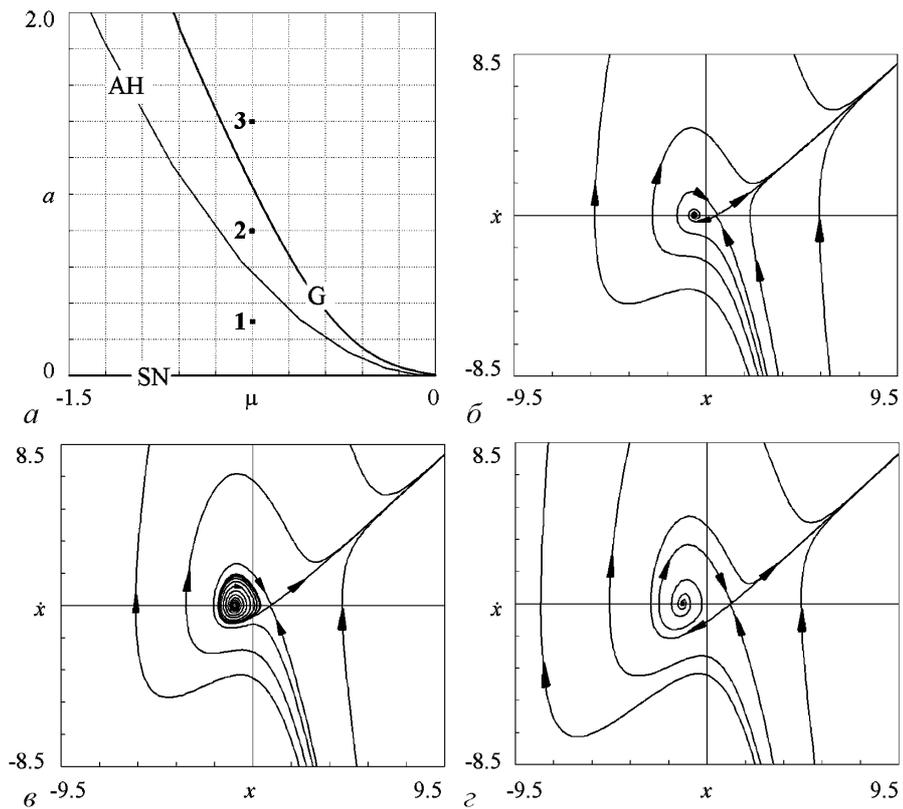


Рис. 2. a – бифуркационные линии осциллятора (1) в окрестности точки Богданова–Тakens на плоскости параметров (μ, a) ; фазовые портреты в характерных точках: b – в точке «1», $в$ – в точке «2», $г$ – в точке «3». Здесь AH – линия бифуркации Андронова–Хопфа, SN – линия бифуркации седло-узел, G – линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы

На рис. 2 показаны линии основных бифуркаций коразмерности один в окрестности точки бифуркации Богданова–Тakens и фазовые портреты системы (1) в избранных точках. Можно видеть характерные для точки Богданова–Тakens метаморфозы фазового портрета системы. Отметим, что наряду с описанными локальными бифуркациями для такой системы оказывается типичной и нелокальная бифуркация «влипания» предельного цикла в петлю сепаратрисы [1–3].

2. Примеры систем с бифуркацией Богданова–Тakens

В методических целях наряду с простейшей моделью полезно обсудить и другие примеры систем с данной бифуркацией, которые являются значимыми в теории колебаний и нелинейной динамике.

2.1. Задача синхронизации в квазигармоническом приближении. В качестве первого примера рассмотрим задачу о синхронизации системы ван дер Поля внешним гармоническим сигналом [3–7]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin \omega t. \quad (10)$$

Здесь λ – параметр, ответственный за бифуркацию Андронова–Хопфа в автономной системе, ω – частота внешнего сигнала, A – его амплитуда.

Для этой задачи в квазигармоническом приближении можно прийти к следующим безразмерным укороченным уравнениям для медленной комплексной амплитуды²:

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon. \quad (11)$$

Здесь Δ – безразмерная отстройка внешней частоты от собственной, ε – безразмерная амплитуда внешнего воздействия. В действительной форме из (11) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta y - x(x^2 + y^2) - \varepsilon, \\ \dot{y} &= y - \Delta x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Матрица линеаризации этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & \Delta - 2xy \\ -\Delta - 2xy & 1 - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для следа и якобиана этой матрицы находим

$$S = 2 - 4|z|^2, \quad J = 1 - 4|z|^2 + 3|z|^4 + \Delta^2, \quad (14)$$

где $|z|^2 = x^2 + y^2$. В свою очередь, из (11) в стационарном случае нетрудно получить выражение для модуля комплексной амплитуды

$$\varepsilon^2 = |z|^2 ((|z|^2 - 1)^2 + \Delta^2). \quad (15)$$

Не приводя полный анализ бифуркаций (его можно найти, например, в [4–7]), укажем лишь на возможность существования точек Богданова–Такенса. Приравняв нулю след и якобиан (14) и используя выражение для неподвижных точек (15), получим

$$\Delta = \pm \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Таким образом, в системе имеется пара точек бифуркации Богданова–Такенса, которые расположены симметричным образом относительно оси частотных расстройек. Из каждой такой точки в соответствии с основным свойством бифуркации Богданова–Такенса выходят линии седло-узловой бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа. Это говорит о важной роли бифуркации Богданова–Такенса в задаче синхронизации. Действительно, при малых амплитудах за возникновение квазипериодического режима (предельного цикла в терминах укороченных уравнений) отвечает седло-узловая бифуркация. В случае больших амплитуд область квазипериодических режимов исчезает в результате другого бифуркационного механизма, связанного с постепенным уменьшением предельного цикла. Точка бифуркации Богданова–Такенса выступает как «граница» между этими двумя типами разрушения квазипериодического поведения (подробнее см. [4,7]).

²Детали вывода уравнений (11) можно найти в соответствующих монографиях и учебниках по теории колебаний [4–7].

2.2. Система Бонхоффера–ван дер Поля. В качестве второго примера обратимся к системе Бонхоффера–ван дер Поля, которая является простейшей феноменологической моделью нейрона [5, с. 242],

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= x + A - By.\end{aligned}\tag{17}$$

Эту систему иногда называют системой ФитцХью–Нагумо [8]. Биофизический смысл параметров в (17) объясняется в [5,8].

Матрица линеаризации системы (17)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}(1 - x^2) & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & -B \end{pmatrix}.\tag{18}$$

Ее след и якобиан

$$S = \frac{1}{\varepsilon}(1 - x^2) - B, \quad J = \frac{1}{\varepsilon}(1 + (x^2 - 1)B).\tag{19}$$

Приравнивая их нулю, получаем $B = \pm 1/\sqrt{\varepsilon}$ и $x^2 = (B - 1)/B$. Тогда с учетом (17) в стационарном случае получаем координаты точек Богданова–Тakensа в пространстве параметров

$$A = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(B - 1)^3}{B}}, \quad B = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.\tag{20}$$

Полный анализ локальных бифуркаций осциллятора Бонхоффера–ван дер Поля можно найти, например, в [9].

3. Метод искусственной дискретизации

Осциллятор с бифуркацией Богданова–Тakensа (1) может быть использован в качестве прототипа для построения дискретного отображения с новыми свойствами. Соответствующий прием является достаточно общим и интересным в методических целях, поэтому обсудим его несколько подробнее.

Пусть имеется динамическая система, заданная системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \dots), \\ \dot{y} &= g(x, y, \dots).\end{aligned}\tag{21}$$

Простейший метод численного решения (21) (метод Эйлера) состоит в том, что выполняется следующая аппроксимация производных:

$$\begin{aligned}\dot{x} &\rightarrow (x_{n+1} - x_n)/\varepsilon, \\ \dot{y} &\rightarrow (y_{n+1} - y_n)/\varepsilon.\end{aligned}\tag{22}$$

Здесь ε – параметр, представляющий собой шаг интегрирования.

Посмотрим теперь на процедуру (22) иначе. Из (21) и (22) получаем

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon \cdot f(x_n, y_n, \dots), \\y_{n+1} &= y_n + \varepsilon \cdot g(x_n, y_n, \dots).\end{aligned}\tag{23}$$

Формулы (23) задают, фактически, некоторую новую динамическую систему в форме итерируемого отображения. При этом параметр ε можно считать уже не малым.

Несмотря на некоторую «искусственность», этот метод оказывается весьма эффективным с позиций построения моделей с новыми свойствами. При этом динамика полученных отображений, с одной стороны, наследует основные свойства прототипа, а с другой – оказывается существенно более богатой. Например, для бифуркации седло-узел в канонической форме [10,11]

$$\dot{x} = a - x^2,\tag{24}$$

применяя процедуру (23), после перенормировки получаем:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2.\tag{25}$$

Выражение (25) описывает логистическое отображение – одну из эталонных систем нелинейной динамики [10,12,13]. Это отображение, так же как и прототип, характеризуется седло-узловой бифуркацией, но демонстрирует, кроме того, бифуркацию удвоения периода, закономерности Фейгенбаума и наличие хаоса [10, 12,13].

Для системы, описывающей бифуркацию коразмерности два, «трехкратное равновесие» [10,11] и определяемой уравнением вида

$$\dot{x} = a + bx + x^3,\tag{26}$$

применим процедуру (23). После простой перенормировки приходим к кубическому отображению

$$x_{n+1} = a + (b + 1)x_n + x_n^3.\tag{27}$$

Это отображение пригодно для описания двухпараметрической картины перехода к хаосу в системах с удвоениями периода. Соотношения ее свойств и свойств прототипа иллюстрирует рис. 3. На рис. 3, *a* показано бифуркационное множество системы (26), представляющее собой точку сборки с отходящими от нее двумя линиями седло-узловых бифуркаций. На рис. 3, *б* показана карта динамических режимов кубического отображения (27). Карта построена численным образом: с помощью компьютера определялся период в каждой точке плоскости параметров; в соответствии с величиной периода точке придавался определенный оттенок серого цвета [12]. Можно видеть, что кубическое отображение существенно богаче по свойствам, чем его прототип. Наблюдается множество областей различных периодов, точки сборки на базе циклов различных периодов, характерные двухпараметрические структуры crossroad area [12] и т.п.

Таким образом, может быть сформулирована своего рода программа построения и исследования дискретных моделей с использованием «списка» основных бифуркаций потоковых систем.

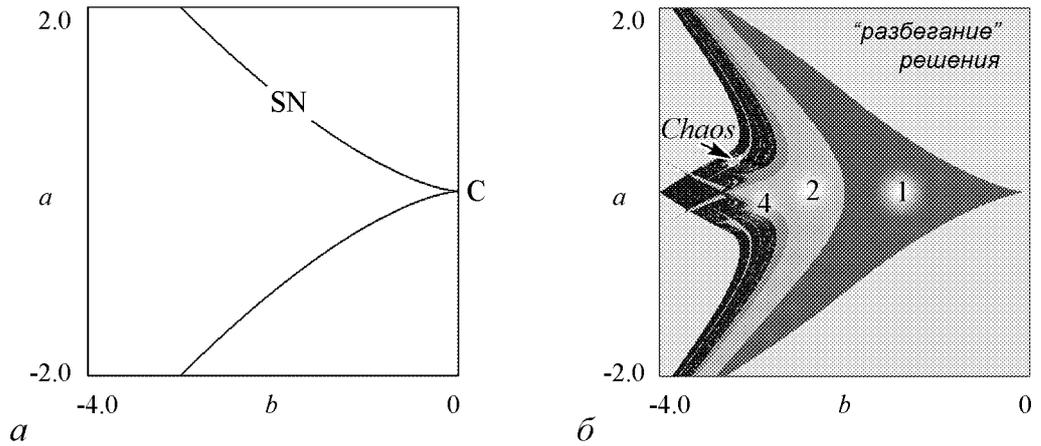


Рис. 3. a – линии бифуркаций седло-узел SN $a = \pm 2(-b/3)^{3/2}$ на плоскости (a, b) , сходящиеся в точке сборки C для системы-прототипа (26); \bar{b} – соответствующая карта динамических режимов кубического отображения (27). Цифрами обозначены периоды циклов

Указанный метод можно применять и к различным типам осцилляторов. Пусть имеется осциллятор общего вида

$$\ddot{x} + g(\dot{x}, x) + f(x) = 0, \quad (28)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(y, x) - f(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Применяя процедуру дискретизации (23), приходим к отображению

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_n, \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon g(y_n, x_n) - \varepsilon f(x_n). \end{aligned} \quad (30)$$

В простейшем случае консервативного осциллятора имеем $g(y, x) = 0$, так что для матрицы возмущений находим

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon \frac{df}{dx} & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Якобиан этой матрицы $J = 1 + \varepsilon^2 df/dx$. Поскольку $J \neq 1$, то полученное отображение не является консервативным. Это определенное несоответствие порождающей системы и получаемого отображения [18], которое можно преодолеть, используя полувяную схему Эйлера

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon g(y_n, x_n) - \varepsilon f(x_n). \end{aligned} \quad (32)$$

Так, если порождающая дифференциальная система представляет собой консервативный осциллятор, то

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_n - \varepsilon^2 f(x_n), \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon f(x_n). \end{aligned} \quad (33)$$

Это отображение характеризуется матрицей возмущений

$$\begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2 \frac{df}{dx} & \varepsilon \\ -\varepsilon \frac{df}{dx} & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

и имеет якобиан $J = 1$, то есть является консервативным. Таким образом, используя (32), можно согласовать свойства порождающего уравнения и отображения.

Указанный прием использовал в своих работах один из создателей теории стохастических колебаний Б.В. Чириков (см., например, [14]) и автор обсуждаемой бифуркации Р.И. Богданов со своими учениками [15–17]. Этот же прием описан (правда, очень кратко) в монографии А.Д. Морозова [18, с. 298].

4. Дискретный осциллятор Богданова–Такенса

Построим теперь дискретную модель, используя в качестве прототипа осциллятор Богданова–Такенса (1). В свете сказанного выше можно ожидать, что это будет новая модель с интересными и существенными свойствами. Применим к модели (1) процедуру (32)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon[(\mu - x_n)y_n - a + x_n^2]. \end{aligned} \quad (35)$$

Исследуем свойства полученного отображения³. Когда параметр дискретизации ε стремится к нулю, на плоскости параметров исходного осциллятора (μ, a) должна быть картина, характерная для системы-прототипа (1) и представленная на рис. 1. Обсудим, как она модифицируется с ростом параметра ε .

Отображение (35) допускает аналитический анализ устойчивости и бифуркаций неподвижной точки, что делает его привлекательным в учебных целях. Неподвижные точки (35) задаются соотношениями

$$x_0 = \pm\sqrt{a}, \quad y_0 = 0, \quad (36)$$

точно такими же, как для осциллятора-прототипа. Выпишем матрицу возмущений (матрицу монодромии) для отображения (35)

$$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon^2(-y_0 + 2x_0) & \varepsilon + \varepsilon^2(\mu - x_0) \\ \varepsilon(-y_0 + 2x_0) & 1 + \varepsilon(\mu - x_0) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Для устойчивой неподвижной точки $x_0 = -\sqrt{a}, y_0 = 0$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon^2\sqrt{a} & \varepsilon + \varepsilon^2(\sqrt{a} + \mu) \\ -2\varepsilon\sqrt{a} & 1 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Отсюда легко вычисляем след и якобиан этой матрицы

$$S = 2 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) - 2\varepsilon^2\sqrt{a}, \quad J = 1 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu). \quad (39)$$

³С использованием терминологии теории бифуркаций можно сказать, что построенное отображение – своего рода дискретный «unfolding» бифуркации Богданова–Такенса, полученный путем «раздува» пространства параметров ее версальной деформации за счет нового параметра дискретизации. Надо полагать, что такая процедура применима и для любых других бифуркаций.

Собственные числа матрицы монодромии (мультипликаторы) подчиняются соотношению [12]

$$\mu^2 - S\mu + J = 0. \quad (40)$$

Таким образом, зная след и якобиан, легко найти условия всех локальных бифуркаций.

Бифуркация Неймарка–Сакера. Это бифуркация рождения инвариантной кривой, ей отвечает равенство $J = 1$. В соответствии с (39) получаем $\mu = -\sqrt{a}$. Таким образом, условие бифуркации Неймарка–Сакера не зависит от параметра дискретизации ε и точно совпадает с условием бифуркации Андронова–Хопфа в осцилляторе-прототипе.

Касательная бифуркация. Этой бифуркации отвечает значение одного из мультипликаторов, равное плюс единице, так что $1 - S + J = 0$. Используя соотношения (39), получаем $a = 0$, что точно соответствует бифуркации седло-узел в осцилляторе-прототипе.

Бифуркация удвоения периода. Этой бифуркации отвечает значение одного из мультипликаторов, равное минус единице, так что $1 + S + J = 0$. Из (39) тогда получаем

$$2 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) - \varepsilon^2\sqrt{a} = 0. \quad (41)$$

Отметим, что эта бифуркация невозможна в исходной системе (1).

Далее приведем перечень основных бифуркаций коразмерности два, которым отвечает попарное пересечение линий бифуркации Неймарка–Сакера, касательной бифуркации и удвоения периода⁴.

Резонанс 1:2, мультипликаторы $\mu_1 = -1, \mu_2 = -1$. Эта бифуркации отвечает совместному выполнению условий (5) и (41), что приводит к

$$\mu = -\frac{2}{\varepsilon^2}, \quad a = \frac{4}{\varepsilon^4}. \quad (42)$$

Fold-flip, мультипликаторы $\mu_1 = -1, \mu_2 = +1$. Эта бифуркация отвечает совместному выполнению условий (4) и (41). В результате получаем

$$\mu = -\frac{2}{\varepsilon}, \quad a = 0. \quad (43)$$

Резонанс 1:1, мультипликаторы $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1$. Эта бифуркации отвечает совместному выполнению условий (4) и (5), что приводит к

$$\mu = 0, \quad a = 0. \quad (44)$$

Дальнейшие иллюстрации свойств отображения (35) удобно представить с использованием карт динамических режимов (рис. 4). Параметр дискретизации во всех случаях $\varepsilon = 0.8$. Буквами обозначены: NS – бифуркация Неймарка–Сакера, T – касательная бифуркация, PD – линии удвоения периода, Q – область квазипериодических режимов, Chaos – область хаоса, D – область убегания фазовых траекторий на бесконечность. Цифрами обозначены периоды циклов.

⁴Названия бифуркаций приводятся в соответствии с [2,27].

На рис. 4, *a* показана карта в достаточно большом масштабе. На ней можно видеть найденные выше аналитически линии и точки бифуркаций, в частности, линию бифуркации Неймарка–Сакера с примыкающей к ней системой языков Арнольда. В левой части рисунка располагаются линии удвоения периода. На этом рисунке имеются точки бифуркаций коразмерности два: *fold-flip* (43) и резонанс 1:1 (44). Точка резонанса 1:2 (42) располагается при больших значениях параметра *a* и при выбранных масштабах в поле зрения не попадает.

На рис. 4, *б* показана окрестность точки $\mu = a = 0$ в тех же масштабах, что и для потоковой системы-прототипа на рис. 2. Сравнивая эти рисунки, заключаем, что на смену бифуркации Андронова–Хопфа приходит бифуркация Неймарка–Сакера. Точка бифуркации Богданова–Тakensа $\mu = a = 0$ заменяется на резонанс 1:1. Однако область существования предельного цикла потоковой системы (2) существенно изменяется. На смену ей приходит область квазипериодических режимов, в которую встроена система различных периодических режимов в виде языков Арнольда. На рис. 4, *в* показан еще более увеличенный фрагмент карты, демонстрирующий детали структуры языков синхронизации.

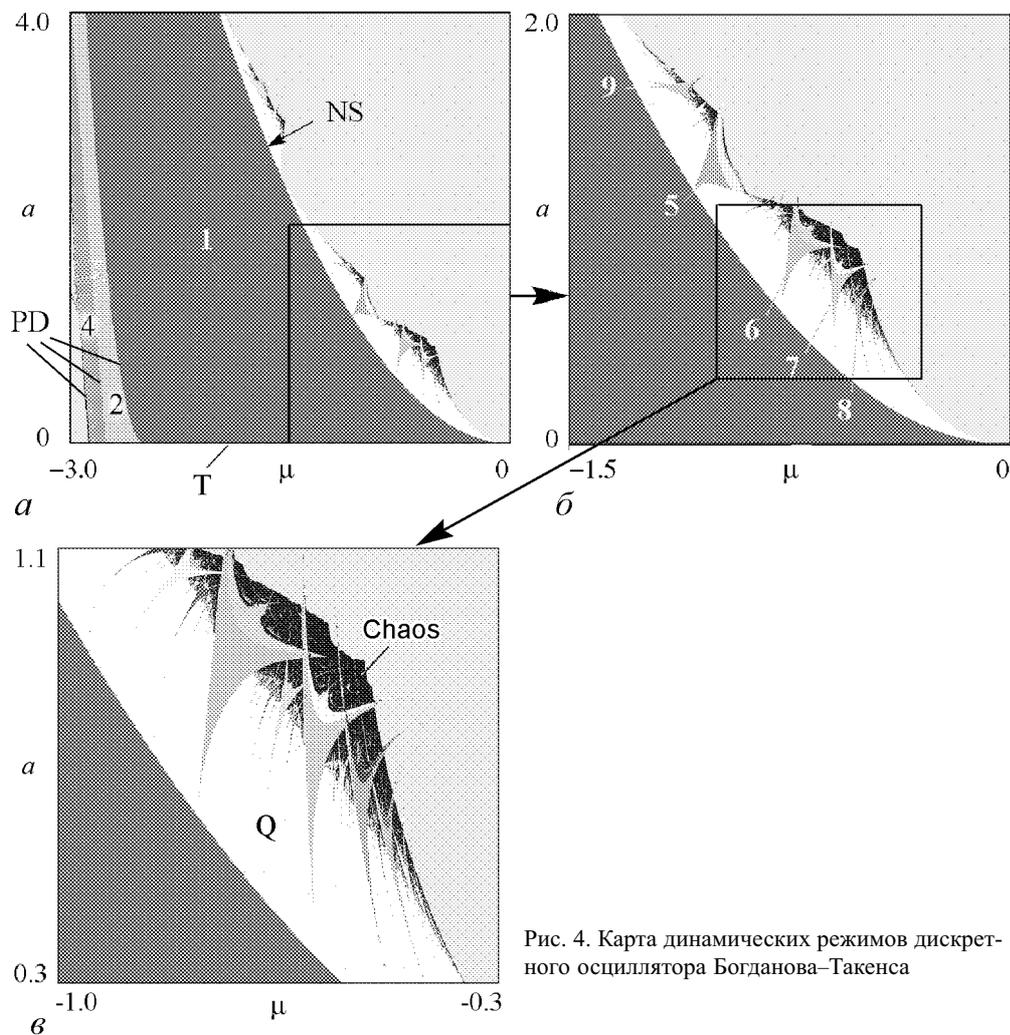


Рис. 4. Карта динамических режимов дискретного осциллятора Богданова–Тakensа

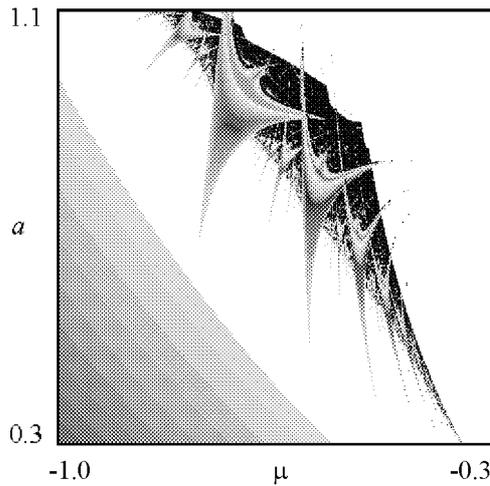


Рис. 5. Карта старшего показателя Ляпунова дискретного осциллятора Богданова–Тakensа

Чтобы на картах можно было различать области квазипериодической динамики и хаоса, необходимо дополнительно вычислить старший показатель Ляпунова. На рис. 5 показана соответствующая карта показателей Ляпунова. На ней области квазипериодических режимов отвечают нулевому показателю, а хаоса – положительному. Оттенками серого отмечены также отрицательные значения показателя, причем, чем больше его абсолютная величина, тем темнее цвет⁵. На рис. 5 хорошо видна линия, на которой языки синхронизации начинают перекрываться и за которой начинается хаос. Соответственно, на картах рис. 4 области квазипериодических режимов также показаны белым, а хаоса – черным цветом.

На рис. 6 показаны фазовые портреты в некоторых избранных точках плоскости параметров отображения (35), иллюстрирующие возможность реализации аттрактора в виде гладкой инвариантной кривой, резонансного цикла на ней и потерю гладкости кривой при продвижении в область хаоса.

Языки синхронизации в окрестности резонанса 1:1 (точки Богданова–Тakensа) обладают свойством самоподобия в пространстве параметров (μ, a, ε) , которое позволяет объяснить картину перехода к непрерывному пределу при уменьшении параметра дискретизации ε . Установим это свойство.

Языки опираются своими основаниями на линию бифуркации Неймарка–Сакера, при этом число вращения можно определить по аргументу мультипликатора $\omega = \arg \mu / (2\pi)$. В соответствии с (40) при $J = 1$ имеем

$$\mu = \frac{S}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{S^2}{2}}.$$

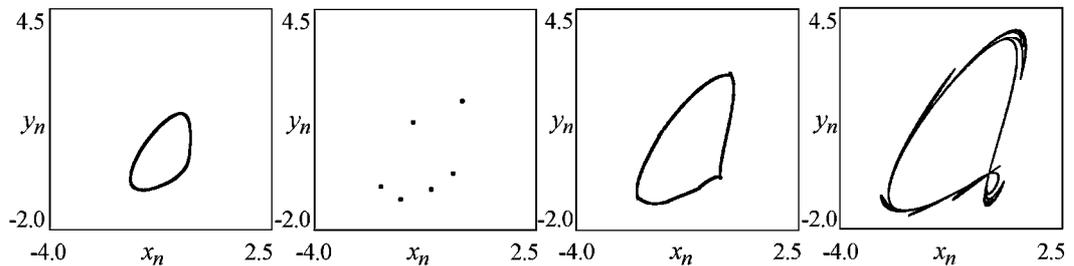


Рис. 6. Иллюстрация существования инвариантной кривой, резонансного цикла и потери гладкости инвариантной кривой в отображении (35) для $\varepsilon = 0.8$ и различных значений параметров (μ, a) , соответственно: $a - (-0.68, 0.65)$; $b - (-0.74, 0.85)$; $v - (-0.68, 0.875)$; $z - (-0.58, 0.93)$

⁵Для более детального знакомства с иллюстрациями в виде карт динамических режимов и карт показателей Ляпунова наряду с [5] рекомендуем Интернет-ресурсы [29,30].

В свою очередь, из (39) с учетом условия бифуркации Неймарка–Сакера (5) следует

$$S = 2 - 2\varepsilon^2\sqrt{a}.$$

Для аргумента мультипликатора при малых $a\varepsilon^4$ получаем оценку

$$\operatorname{tg}(\arg \mu) = \frac{\sqrt{1 - S^2/2}}{S/2} \approx \sqrt[4]{4a\varepsilon^4}.$$

Таким образом, аргумент мультипликатора вблизи точки Богданова–Тakensа близок к нулю и «управляется» фактором $a\varepsilon^4$. Это означает, что при уменьшении параметра ε в N раз картина языков будет подобна той, которая наблюдалась бы при изменении масштаба по оси параметра a в N^4 раз, а по оси μ в соответствии с (5) – в N^2 раз.

Свойство скейлинга иллюстрирует рис. 7, а, для которого по сравнению с рис. 4, б параметр ε уменьшен в $\sqrt{2}$ раз, при этом по вертикальной и горизонтальной оси масштабы изменены в $(\sqrt{2})^4$ и в $(\sqrt{2})^2$ раз, соответственно. На «визуальном» уровне картинки на рис. 7, а и рис. 4, б близки, причем наблюдается соответствие по порядку языков синхронизации, обозначенному соответствующими цифрами. Заметим, что точка резонанса 1:2 (42) также удовлетворяет описанному закону скейлинга.

Из приведенного обсуждения вытекает, что при уменьшении ε в окрестности точки Богданова–Тakensа наблюдаются языки все более и более высокого порядка. Соответственно фазовый портрет внутри языков содержит все большее число точек, а сами языки вытесняются из области квазипериодических режимов (см. увеличенный фрагмент на рис. 7, б).

Еще одно существенное отличие дискретной модели от прототипа – заметные метаморфозы верхней границы области существования предельного цикла. На смену гладкой линии G на рис. 2 приходит изломанная линия – граница области хаоса и убегания на бесконечность. На этой линии инвариантная кривая исчезает. Механизм ее исчезновения состоит в столкновении с неустойчивым многообразием седловой точки, что иллюстрирует рис. 8. Интересно, что столкновение происходит с петлей неустойчивого многообразия седловой точки, причем перед столкновением как инвариантная кривая, так и неустойчивое многообразие являются гладкими (рис. 8, а), и

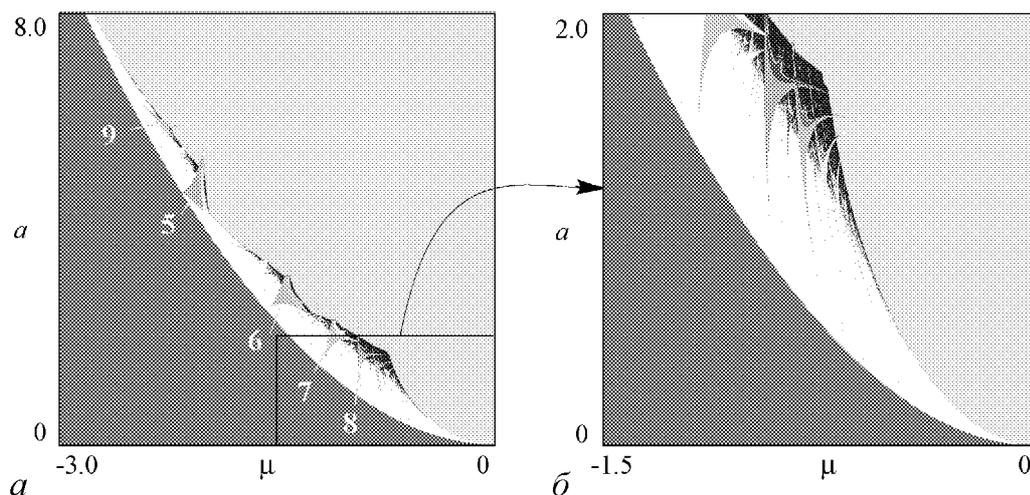


Рис. 7. Карта режимов при $\varepsilon = 0.565\dots$ в разных масштабах

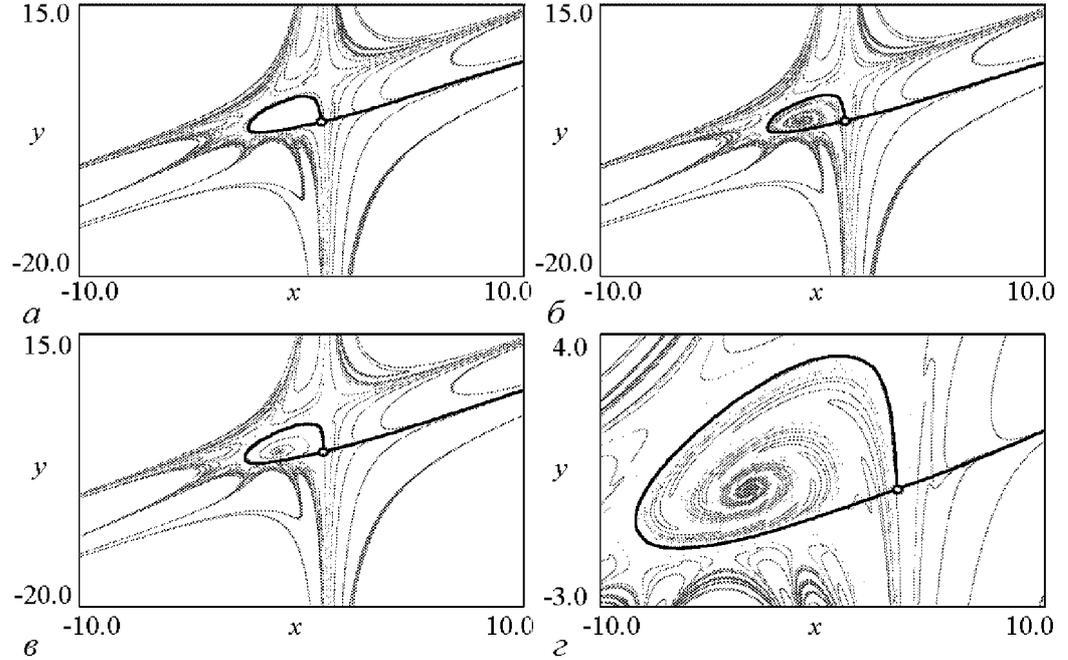


Рис. 8. Устойчивое (светло-серый) и неустойчивое (темно-серый) многообразия седловой неподвижной точки отображения (35) до момента разрушения аттрактора (а), вблизи (б) и после момента разрушения аттрактора (в) в виде инвариантной кривой при столкновении с устойчивым многообразием; г – увеличенный фрагмент рис. б. Значения управляющих параметров $\varepsilon = 0.565$, $a = 1$, $\mu = -0.66$ (а); $\mu = -0.62$ (б, г); $\mu = -0.6$ (в)

касание происходит, по-видимому, сразу по всей длине инвариантной кривой. После касания инвариантная кривая разрушается и устойчивое многообразие проникает внутрь петли неустойчивого многообразия, образуя «классическую» гомоклиническую структуру (хорошо заметную на увеличенном фрагменте, рис. 8, г), которая сильно сжимается с увеличением параметра μ (ср. рис. 8, б и в).

5. Слабодиссипативная версия осциллятора Богданова и отображение Богданова

Богданову принадлежит еще одна идея в теории бифуркаций, которая признается одной из основополагающих [1, с. 8, с. 204]. Применительно к осциллятору Богданова–Такенса (1) она выглядит следующим образом. Анализируется ситуация вдали от бифуркации седло-узел, то есть фактически только предельный цикл и петля сепаратрисы. Это позволяет в (1) провести замену переменных и параметров [1,15–17]

$$x \rightarrow 2\sqrt{ax'} - \sqrt{a}, \quad t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a}}}t', \quad \bar{\alpha} = \frac{(\mu + \sqrt{a})}{\sqrt[4]{4a}}, \quad \bar{\beta} = -\sqrt[4]{4a} \quad (45)$$

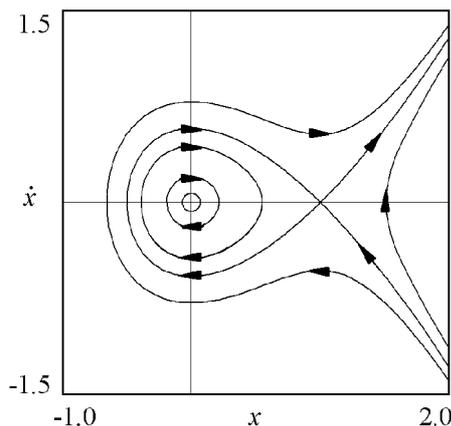
и в результате получить уравнение осциллятора следующего вида (штрихи у новых переменных опускаем)

$$\ddot{x} - (\bar{\alpha} + \bar{\beta}x)\dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0, \quad (46)$$

где потенциал задан выражением $U(x) = x^2/2 - x^3/3$.

Замены (45) оказываются некорректными непосредственно для бифуркации седло-узел при $a = 0$ и, соответственно, в точке Богданова–Такенса. Однако такая переформулировка задачи имеет важные преимущества. В предположении малых значений $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ (46) описывает слабо возмущенный консервативный осциллятор

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^2. \end{aligned} \quad (47)$$



Его фазовый портрет показан на рис. 9 и характеризуется наличием гомоклинической петли. Слабодиссипативные возмущения (46) могут приводить к появлению предельного цикла и ситуации столкновения предельного цикла с петлей сепаратрисы. Идея сопоставить с бифуркацией некоторую слабо возмущенную консервативную систему оказалась очень продуктивной⁶.

Осциллятор типа (46) также может быть использован как прототип для построения дискретного отображения по схеме (32), что было сделано D. Arrowsmith с соавторами в 1993 году [19]. Затем эта тема была развита в нескольких работах аспиранта Р.И. Богданова, В.В. Сухаревского в 2003–2005 годах [15–17]. В этих работах было предложено и исследовано отображение, которое D. Arrowsmith и его соавторы называли отображением Богданова (Bogdanov map),

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \alpha y_n + k x_n (x_n - 1) + \beta x_n y_n. \end{aligned} \quad (48)$$

Параметры α , β , x в (48) связаны с соответствующими параметрами осциллятора (46) следующим образом: $\alpha = \varepsilon \bar{\alpha}$, $\beta = \varepsilon \bar{\beta}$, $k = \varepsilon^2$ (по определению $k > 0$, а $\beta < 0$). Кроме того, в (48) выполнена перенормировка $y \rightarrow \varepsilon y$.

Представленное ранее отображение (35) по сравнению с (48) обладает тем преимуществом, что позволяет исследовать изменение «канонического» для бифуркации Богданова–Такенса устройства плоскости параметров при вариации возмущающего параметра. В то же время отображение Богданова (48) оказывается также очень интересным и привлекательным для исследования. (Достаточно сказать, что работа D. Arrowsmith с соавторами [19] занимает 40 страниц журнального текста.) Еще один показатель интереса к отображению (48) – тот факт, что к его свойствам обратился Р.И. Богданов (в соавторстве с Р.М. Богдановым) в одном из своих докладов на международной конференции «Анализ и особенности», посвященной 70-летию В.И. Арнольда в 2007 году [20]. Основное внимание в работах [15–17, 19, 20] в соответствии с упомянутыми выше принципами обращено к слабодиссипативному

⁶В предисловии к [1] известный специалист по теории бифуркаций Ю.С. Ильяшенко пишет о «новой эпохе в теории бифуркаций» и формулирует три основных принципа подхода Богданова, среди которых «ренормализация» – изменение масштаба с коэффициентами, стремящимися к бесконечности (см. соотношения (45)), и принцип исследования рождения предельных циклов на основе анализа нулей интегралов по замкнутым инвариантным кривым специально введенных гамильтоновых систем на плоскости [1, с. 8].

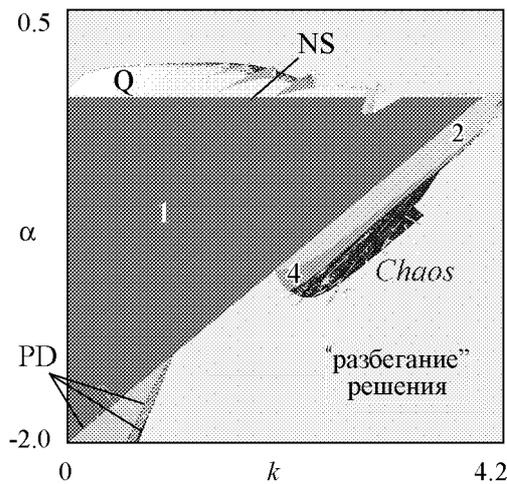


Рис. 10. Карта динамических режимов отображения Богданова (48) на плоскости (k, α) при $\beta = -1$

случаю и к достаточно амбициозной цели построения слабодиссипативной версии теории КАМ [20].

Для неподвижной точки отображения Богданова (48) $x_0 = 0, y_0 = 0$ нетрудно найти след и якобиан матрицы возмущений

$$\begin{aligned} J &= 1 + \alpha, \\ S &= 2 + \alpha - k, \end{aligned} \quad (49)$$

условия бифуркации Неймарка-Сакера

$$\alpha = 0 \quad (50)$$

и условие равенства мультипликатора минус единице

$$4 + 2\alpha - k = 0. \quad (51)$$

Таким образом, картина простейших бифуркаций, как видно из (49)–(51), не зависит от параметра β , имеющего в соответствии с (46) смысл параметра нелинейной диссипации.

Карта динамических режимов отображения Богданова (48) при $\beta = -1$ представлена на рис. 10. Компьютерное исследование указывает на возможность существования областей квазипериодической динамики и системы языков синхронизации, примыкающей к линии бифуркации Неймарка-Сакера (50). При уменьшении абсолютной величины параметра β (приближение к консервативной модели), вид карты качественно не изменяется, но область квазипериодических режимов становится уже. Иными словами, при малых β при увеличении параметра α , ответственного за отрицательное трение в осцилляторе (46), инвариантная кривая почти сразу после возникновения разрушается за счет механизма, проиллюстрированного на рис. 8.

6. Обобщенное отображение Эно

Следует отметить, что отображения представленного типа привлекают внимание и других исследователей, среди которых С.В. Гонченко, Yu.A. Kuznetsov и др., но только в ином контексте. Эти авторы опубликовали серию работ в 2004–2007 годах [21–24]⁷, посвященных отображению, которое они называют «обобщенное отображение Эно» (generalized Henon map, GHM), и которое получается введением нелинейной добавки к классическому отображению Эно. Такая добавка выводит его из класса отображений с постоянным якобианом. Мотивация введения в рассмотрение этого отображения, однако, иная: авторы указывают, что отображения такого типа возникают в трехмерных потоковых системах в ситуации с гомоклиническим касанием.

⁷См. также цитированную в [22] литературу.

Заметим, что отображение (35) можно представить и в форме обобщенного отображения Эно. Для этого произведем замену переменной $\xi = x - \varepsilon y$, в результате которой (35) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= x_n, \\ x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_n + \varepsilon^2[(x_n - \mu)y_n - a + x_n^2].\end{aligned}\tag{52}$$

Переписывая второе уравнение (48) с учетом сделанной замены, получим

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= x_n, \\ x_{n+1} &= f(x_n) - b\xi_n + \varepsilon x_n \xi_n,\end{aligned}\tag{53}$$

где $f(x)$ – квадратичная функция x . Конкретный вид ее не важен, поскольку заменами типа сдвига и изменения масштаба она приводится к любой удобной квадратичной форме, при этом структура уравнения (53) инвариантна относительно таких замен. Именно такой вид отображения исследован, например, С.В. Гонченко в докладе на уже упомянутой конференции 2007 года [25].

В более общем случае, в рамках мотивации систем с гомоклиническим касанием, авторы [21–24] используют отображение типа (53), но с еще одной возмущающей добавкой, кубической по переменной x ,

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= x_n, \\ x_{n+1} &= f(x_n) - b\xi_n + \varepsilon x_n \xi_n + s x_n^3.\end{aligned}\tag{54}$$

Понятно, что оно также может быть получено дискретизацией нелинейного осциллятора соответствующего вида: достаточно использовать в (1) кубическую нелинейность по типу осциллятора Дуффинга. Соответственно потенциал $U(x)$ будет представлен полиномом четвертой степени.

Отметим, что отображение (54) явилось одним из основных примеров в интересной диссертации Н.Г.Е. Meijer 2007 года, выполненной под руководством D. Verhulst и Yu.A. Kuznetsov. Этому отображению посвящено также почти 40 страниц текста⁸. Эта диссертация сама по себе представляет интерес, и посвящена целиком бифуркациям коразмерности два итерируемых отображений: «Codimension 2 bifurcations of iterated maps». Она доступна в Интернете [26], что немаловажно, поскольку, например, исходная работа D. Arrowsmith et al., отсутствует в свободном доступе. В этом плане мы рекомендуем также сайт Yu.A. Kuznetsov [27], где содержатся интересные материалы, касающиеся обсуждаемого круга вопросов, включая свойства «generalized Henon map». Метод карт динамических режимов и анализ поведения многообразий в системе (54) можно найти также в нашей работе 2006 года [28] в связи с обсуждением вопроса о возможности возникновения узких областей синхронизации у порога возникновения неустойчивости в связанных и автоколебательных системах.

⁸Интересно, что автор поместил это исследование в раздел Applications – Приложения.

Заключение

Авторы надеются, что представленный здесь материал позволит обратить внимание на важность в учебных курсах по теории колебаний и нелинейной динамике бифуркации Богданова–Тakens, которая, занимая существенное место в работах по теории бифуркаций и исследовательских публикациях, все же недостаточно освещается в учебной литературе. Хотелось бы обратить внимание и на прием искусственной дискретизации, причем как в учебных целях, так и с точки зрения возможного метода построения новых моделей с интересными свойствами. Хотелось бы также обратить внимание на отображения, получаемые дискретизацией осциллятора с бифуркацией Богданова–Тakens и слабо диссипативного осциллятора Богданова, на важность отображений такого типа для теории динамических систем и бифуркаций как нового класса эталонных моделей, а также на некоторые интересные публикации, включая Интернет-ресурсы, посвященные подобным отображениям.

Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ.

Библиографический список

1. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-К. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005. 416 с.
2. Kuznetsov Yuri A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998. 593 p.
3. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Ижевск: РХД, 2002. 560 с.
4. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
5. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997. 496 с.
6. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
7. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
8. Интернет-ресурс «Encyclopedia of dynamical systems», страница «FitzHugh–Nagumo model», http://www.scholarpedia.org/article/FitzHugh–Nagumo_model.
9. Barnes B., Grimshaw R. J. Analytical and numerical studies of the Bonhoeffer Van der Pol system // Austral. Math. Soc., Ser. B. 1997. Vol. 38. P. 427.
10. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
11. Постнов Д.Э. Бифуркации регулярных аттракторов. Учебное пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. 102 с.
12. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
13. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990. 240с.
14. Чириков Б.В. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1969.

15. *Сухаревский В.В.* Перерасcеяние частиц в поле сил ангармонического осциллятора со слабо-диссипативным возмущением. Автореф. дис... канд. физ.-мат.наук / МГУ, 2005.
16. *Сухаревский В.В.* Бистабильные состояния в отображении Богданова // Вестник МГУ, серия «Математика. Механика». 2003. № 5. С. 3.
17. *Сухаревский В.В.* Оценка температуры и плотности частиц в слабо-диссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера // Вестник МГУ, серия «Физика. Астрономия». 2005. №6. С. 28.
18. *Морозов А. Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах // Серия современная математика. Москва – Ижевск: РХД, 2005. 424 с.
19. *Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M.* The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 4. P. 803.
20. *Богданов Р.И., Богданов Р.М.* Турбулентность в слабо диссипативной версии КАМ // Тез. докл. Межд. Конф. «Анализ и особенности», посвященной 70-летию В.И. Арнольда. М.: МИАН, 2007. С. 35.
21. *Gonchenko V.S., Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E.* Generalized Hénon map and bifurcations of homoclinic tangencies // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2005. Vol. 4. P. 407.
22. *Гонченко С.В., Стенькин Н.В., Шильников Л.П.* О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 1. С. 3.
23. *Гонченко С.В., Гонченко А.С.* К вопросу о классификации линейных и нелинейных подков Смейла // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3, № 4. С. 423.
24. *Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E., van Veen L.* The fold-flip bifurcation // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14. P. 2253.
25. *Гонченко С.В.* Подковы Смейла и их бифуркации в обобщенных отображениях Эно // Тез. докл. Межд. Конф. «Анализ и особенности», посвященной 70-летию В.И. Арнольда. М.: МИАН, 2007. С. 43.
26. *Meijer H.G.E.* Codimension 2 bifurcations of iterated maps // Ph.D. Thesis Utrecht University. Интернет-ресурс: <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm>.
27. Интернет-страница Yuri A. Kuznetsov: www.math.uu.nl/people/kuznet/
28. *Кузнецов А.П., Савин А.В.* О возможности реализации квазипериодических режимов при переходе к неустойчивой по Лагранжу динамике // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 21. С. 18.
29. Интернет-ресурс «Карты динамических режимов», <http://sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm>.
30. Интернет-ресурс «Карты ляпуновских показателей», <http://sgtnd.narod.ru/chair/rus/index.htm>.

Поступила в редакцию 16.01.2009

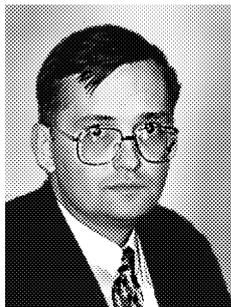
После доработки 1.04.2009

BOGDANOV–TAKENS BIFURCATION: FROM FLOWS TO DISCRETE SYSTEMS

A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, Yu.V. Sedova

The methodically important bifurcation – Bogdanov–Takens bifurcation – is discussed. For the primary model its bifurcations and evolution of phase portraits are described. The examples of nonlinear systems with such bifurcation are presented. The method of discrete models of construction that is founded on semi-explicit Euler scheme is discussed. On the base of the continuous prototype the discrete model of Bogdanov–Takens oscillator is constructed. The analytical analysis of bifurcations of a codimension one and two for discrete model is realized. With the help of method of charts of dynamical regimes the picture of synchronization tongues has been revealed and scaling has been demonstrated. The illustrations of destruction and disappearance of an invariant curve are given. One more map suitable for educational purposes – Bogdanov map is discussed. Some Internet resources interesting from methodically point of view are presented.

Keywords: Bogdanov–Takens bifurcation, discrete models.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru



Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, старший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в центральных и международных журналах. Область научных интересов – особенности поведения близких к консервативным нелинейным динамическим системам.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: savinA@info.sgu.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 10 статей в отечественной и зарубежной печати.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: sedovayv@rambler.ru