

## ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ТИПА I В ПРИСУТСТВИИ ШУМА И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ИГОЛЬНОГО УШКА

*А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов*

В настоящей работе проводится сравнительный анализ характеристик двух типов перемежающегося поведения (перемежаемости типа I в присутствии шума и перемежаемости игольного ушка), которые до настоящего времени считались различными явлениями. Как показано в работе, эти разновидности перемежающегося поведения являются одним типом динамики систем, наблюдаемым при различных условиях. Справедливость полученных выводов доказывается посредством рассмотрения различных модельных систем, таких как квадратичное отображение, осциллятор ван дер Поля и системы Ресслера.

*Ключевые слова:* флуктуации, случайный процесс, шум, синхронизация, хаотические осцилляторы, динамическая система, перемежаемость.

### Введение

Наличие перемежаемости характерно для многих нелинейных систем и наблюдается, в частности, при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1], а также вблизи границы возникновения различных режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [2–5].

Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типа I–III [1, 6], on-off перемежаемость [7], перемежаемость игольного ушка [8]. Несмотря на некоторое сходство (наличие во временном ряду двух различных режимов, чередующихся друг с другом), каждый тип перемежаемости обладает своими собственными особенностями и характеристиками (прежде всего, это зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз). Причины, приводящие к возникновению перемежающегося поведения каждого типа, также различны.

В настоящей работе сравниваются характеристики перемежаемости типа I при наличии в системе шума и перемежаемости игольного ушка, наблюдаемой вблизи границы режима фазовой синхронизации. Впервые показывается, что эти два вида перемежающегося поведения, считавшиеся до настоящего момента различными явлениями, на самом деле представляют собой один тип динамики систем.

## 1. Связь между перемежаемостью типа I в присутствии шума и перемежаемостью игольного ушка

Для начала рассмотрим кратко перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I в присутствии шума, следуя общепринятой в научной литературе концепции. Аргументы в пользу эквивалентности указанных типов перемежающегося поведения будут приведены ниже.

**1.1. Перемежаемость типа I в присутствии шума.** Известно, что перемежаемость типа I наблюдается ниже точки седло-узловой бифуркации, которая как раз совпадает с порогом установления/разрушения синхронного режима в периодическом осцилляторе под внешним гармоническим воздействием [9]. При этом средняя длительность ламинарных фаз  $T$  обратно пропорциональна квадратному корню из параметра надкритичности  $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ , то есть

$$T \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – управляющий параметр, а  $\varepsilon_c$  – его бифуркационное значение, соответствующее точке седло-узловой бифуркации [9]. Влияние шума интенсивности  $D$  на систему приводит к изменению характеристик перемежаемости [10–12], при этом перемежающееся поведение будет наблюдаться как ниже, так и выше точки седло-узловой бифуркации  $\varepsilon_c$ . В закритической области значений управляющего параметра (выше бифуркационной точки,  $\varepsilon > \varepsilon_c$ ) средняя длительность  $T$  ламинарных фаз определяется выражением

$$T = \frac{1}{k\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}} \exp\left(\frac{4(\varepsilon - \varepsilon_c)^{3/2}}{3D}\right), \quad (2)$$

в то время как распределение  $p(\tau)$  длительностей ламинарных фаз  $\tau$  подчиняется экспоненциальному закону

$$p(\tau) = T^{-1} \exp(-\tau/T). \quad (3)$$

**1.2. Перемежаемость игольного ушка.** В научной литературе описано существование двух типов перемежающегося поведения для хаотических систем, наблюдающихся при разрушении режима фазовой синхронизации в случае, когда собственные частоты осциллятора и внешнего сигнала отличаются мало [8, 13, 14], и, соответственно, выделяют два значения параметра связи  $\sigma_1 < \sigma_2$ , являющиеся характерными точками, разграничивающими различные типы динамики. Ниже границы режима фазовой синхронизации зависимость разности фаз  $\Delta\varphi$  от времени  $t$  содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), постоянно прерываемые внезапными фазовыми проскоками (турбулентные фазы), в течение которых значение  $|\Delta\varphi(t)|$  изменяется на  $2\pi$ . Проанализировав статистику ламинарных фаз, можно заключить, что ниже величины связи  $\sigma_1$  (то есть достаточно далеко от границы  $\sigma_2$  установления/разрушения режима хаотической фазовой синхронизации) наблюдается перемежаемость типа I, для средней длительности ламинарных фаз которой имеет место степенной закон  $T \sim (\sigma_1 - \sigma)^{-1/2}$ , в то время как выше критической точки  $\sigma_2$  обнаруживается режим фазовой синхронизации. Для величины связи  $\sigma \in (\sigma_1; \sigma_2)$  наблюдается сверхдлинное ламинарное поведение (так называемая «перемежаемость игольного ушка») с характеристиками, существенно отличающимися

от хорошо известных характеристик перемежаемости типа I. В предыдущих исследованиях (например, работы [8, 14]) показано, что для перемежаемости игольного ушка зависимость средней длительности  $T$  ламинарных фаз от параметра надкритичности  $(\sigma_2 - \sigma)$  выражается законом

$$T \sim \exp(k|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2}) \quad (4)$$

или

$$-\ln(1/T) = c_0 - c_1|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2}, \quad (5)$$

( $c_0$ ,  $c_1$  и  $k$  – константы), приведенным впервые в [15] для переходного процесса, предшествующего точке бифуркации слияния пары неустойчивых орбит.

Таким образом, на плоскости управляющих параметров существует область, примыкающая снизу к границе фазовой синхронизации, где система демонстрирует перемежающееся поведение, характеристики которого соответствуют перемежаемости игольного ушка. Ниже этой области (уже достаточно далеко от границы установления режима фазовой синхронизации) в системе реализуется перемежаемость I типа.

Теоретическое объяснение явления перемежаемости игольного ушка основано на граничном кризисе синхронных аттракторов, вызванном бифуркацией слияния неустойчивых орбит, одни из которых являются седловыми, а другие – неустойчивы по всем направлениям [8, 13]. Данный тип перемежающегося поведения наблюдался как при численном моделировании [8, 14], так и в эксперименте [16] для различных нелинейных систем, включая осцилляторы Ресслера.

**1.3. Эквивалентность рассматриваемых типов поведения системы.** Как показано далее, несмотря на то, что перемежаемость типа I в присутствии шума и перемежаемость игольного ушка изначально кажутся различными явлениями, они, на самом деле, являются одним и тем же типом динамики системы, наблюдаемым при различных условиях. Хорошо известно, что для слабонелинейного изохронного осциллятора, находящегося под периодическим внешним воздействием (в случае малой частотной расстройки), можно использовать метод комплексных амплитуд для нахождения решения, описывающего поведение осциллятора, в виде

$$u(t) = \operatorname{Re} a(t)e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Для комплексной амплитуды  $a(t)$  получают усредненное (укороченное) уравнение

$$\dot{a} = -i\nu a + a - |a|^2 a - i\kappa, \quad (7)$$

где  $\nu$  – расстройка частот, а  $\kappa$  – перенормированная амплитуда внешнего сигнала. При малых  $\nu$  и больших  $\kappa$  устойчивое решение

$$a(t) = Ae^{i\Phi} = \operatorname{const} \quad (8)$$

соответствует синхронному режиму, при этом разрушению синхронной динамики соответствует локальная седло-узловая бифуркация, связанная с глобальной бифуркацией рождения предельного цикла [17]. Ниже границы режима синхронизации динамика разности фаз

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \omega_e t \quad (9)$$

( $\varphi(t)$  – фаза ведущего осциллятора,  $\omega_e$  – частота внешнего гармонического сигнала) представляет собой интервалы синхронного поведения (ламинарные фазы), прерываемые фазовыми проскоками (турбулентные фазы). Средняя длительность  $T$  ламинарных фаз зависит от параметра надкритичности ( $\varepsilon_c - \varepsilon$ ) по степенному закону (1), что соответствует перемежаемости типа I [9] (см. разд. 1.1).

В то же время поведение периодических и хаотических систем вблизи границы установления синхронного режима во многих случаях очень схоже. Так, было обнаружено, что в связанных хаотических системах Ресслера и в неавтономном генераторе ван дер Поля реализуются одни и те же сценарии разрушения синхронного режима [18]. Более того, при определенных условиях динамика хаотических систем может рассматриваться как случайные возмущения [11, 19, 20], включая поведение систем вблизи границы синхронного режима. В частности, для двух связанных систем Ресслера поведение одной из условных ляпуновских экспонент в окрестности границы режима фазовой синхронизации подчиняется тем же законам, что и в случае неавтономного генератора ван дер Поля под воздействием шума [21]. Следовательно, можно ожидать, что характеристики перемежаемости типа игольного ушка, которая имеет место вблизи границы режима фазовой синхронизации в связанных хаотических осцилляторах, будут наблюдаться и в случае классической синхронизации периодических колебаний, если добавить некоторое случайное воздействие на периодический осциллятор.

В качестве дополнительных аргументов в пользу справедливости данного предположения можно упомянуть, что обнаружение режима перемежаемости игольного ушка в хаотических осцилляторах основывается, главным образом, на следующих фактах.

- Зависимость средней длительности  $T$  ламинарных фаз от управляющего параметра может быть аппроксимирована выражением (5) [8, 13, 14, 16]. Как показано далее (раздел 4), аналогичную характеристику перемежаемости типа I с шумом можно аппроксимировать тем же самым законом, несмотря на то, что средняя длительность ламинарных фаз подчиняется также закону (2).

- Когда начинается турбулентная фаза, движение по фазовой траектории близко к периодическому [13]. Данный аспект интерпретируется как доказательство бифуркации слияния пары неустойчивых орбит, когда неустойчивая периодическая орбита на аттракторе и неустойчивая орбита того же периода на границе бассейна аттрактора сливаются и исчезают. Тем не менее тот же тип движения по фазовой траектории наблюдается в начале турбулентной фазы, если речь идет о перемежаемости типа I, связанной с седло-узловой бифуркацией, равно как и в случае перемежаемости типа I с шумом.

Таким образом, если данные разновидности перемежаемости обусловлены одними и теми же механизмами и, фактически, являются одним типом динамики систем, то средняя длительность ламинарных фаз должна удовлетворять уравнениям (2) и (5) одновременно, независимо от того, классифицируется ли поведение системы как перемежаемость игольного ушка, или как перемежаемость типа I с шумом. Распределение длительностей ламинарных фаз должно удовлетворять при этом экспоненциальному закону (3).

## 2. Результаты численного моделирования

Для того чтобы подтвердить предположение об эквивалентности типов перемежающегося поведения, являющихся предметом исследования, рассмотрим системы, в которых можно наблюдать перемежаемость игольного ушка (связанные осцилляторы Ресслера) и перемежаемость типа I с шумом (квадратичное отображение и неавтономный генератор ван дер Поля).

**2.1. Две связанные системы Ресслера.** Перемежающееся поведение в двух связанных хаотических осцилляторах в окрестности границы фазовой синхронизации (при малой частотной расстройке взаимодействующих подсистем) традиционно классифицируется как перемежаемость игольного ушка [8, 13, 14], при этом теоретическое объяснение механизмов, обуславливающих данный тип перемежаемости, дается в терминах синхронизации/десинхронизации неустойчивых периодических орбит, встроенных в хаотические аттракторы взаимодействующих систем. Важно отметить, что поведение двух связанных систем Ресслера вблизи порога установления режима фазовой синхронизации было рассмотрено с точки зрения перемежаемости типа I с шумом (впервые это было сделано в работе [11]), хотя ранее та же система (при тех же значениях управляющих параметров) исследовалась с позиций перемежаемости игольного ушка в [14]. Согласно различным работам, получается, что средняя длительность ламинарных фаз удовлетворяет как уравнению (2) (работа [11]), так и выражению (5) (статья [14]). Позднее, в работе [22] было показано, что распределение длительностей ламинарных фаз для связанных систем Ресслера удовлетворяет экспоненциальному закону (3). Чтобы получить полную картину, мы проводим рассмотрение двух связанных систем Ресслера вблизи порога фазовой синхронизации при ином типе связи между системами и другом наборе значений управляющих параметров и показываем, что наблюдаемое перемежающееся поведение можно классифицировать и как перемежаемость игольного ушка, и как перемежаемость типа I с шумом.

Исследуемая система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \sigma(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c),\end{aligned}\tag{10}$$

где  $(x, y, z)$  – декартовы координаты ведущего (индекс d) и ведомого (индекс r) осцилляторов;  $\sigma$  – параметр, отвечающий за величину связи. Значения других управляющих параметров были выбраны по аналогии с предыдущими исследованиями [23, 24]:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ . Параметр  $\omega_r$ , задающий собственную частоту ведомой системы, был фиксирован ( $\omega_r = 0.95$ ), а значение аналогичного параметра ведущей системы  $\omega_d$  равнялось 0.93. При указанных значениях управляющих

параметров хаотические аттракторы обеих подсистем в отсутствие связи являются фазово-когерентными, благодаря чему мгновенная фаза хаотического сигнала может быть введена традиционным способом, как угол поворота  $\varphi_{d,r} = \arctan(y_{d,r}/x_{d,r})$  на плоскости проекции  $(x, y)$  каждой системы.

На рис. 1 один и тот же результат численного моделирования двух связанных систем Ресслера (10) проиллюстрирован различными способами для того, чтобы сравнить полученные данные с аналитическими аппроксимациями для перемежаемости игольного ушка (рис. 1, *a*) и перемежаемости типа I с шумом (рис. 1, *б*). На рис. 1, *a* зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности  $(\sigma_2 - \sigma)$ , где  $\sigma_2 = 0.042$  соответствует границе фазовой синхронизации, показана во всем диапазоне значений параметра связи, чтобы продемонстрировать отклонение численных данных от закона (5) вдали от границы фазовой синхронизации. Закономерность (5) является справедливой в диапазоне значений параметра связи  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ , где  $\sigma_1 = 0.031$ , что позволяет говорить о наличии в этой области в системе режима перемежаемости игольного ушка.

Параметр связи  $\sigma$  играет роль управляющего параметра. Заметим, однако, что критические точки  $\sigma_2$  и  $\sigma_c$ , использованные в аналитических зависимостях (5) и (2) для перемежаемости игольного ушка и перемежаемости типа I при наличии шума, соответственно, не совпадают друг с другом, и значения их различны. Критическая точка  $\sigma_2 \approx 0.042$  связана с порогом установления режима фазовой синхронизации двух связанных систем Ресслера. Точка  $\sigma_c \approx 0.0345$ , фигурирующая в (2) как  $\varepsilon_c$ , соответствует точке седло-узловой бифуркации, если хаотическая динамика рассматривается как аналог шума, который можно было бы «выключить». Значение этой точки определялось по зависимости нулевого условного показателя Ляпунова от параметра связи (см. работу [21]).

Нетрудно видеть, что перемежающееся поведение двух связанных систем Ресслера можно трактовать и как перемежаемость игольного ушка, и как перемежаемость типа I в присутствии шума, при этом в обоих случаях наблюдается отличное соответствие численных данных и теоретических зависимостей. Это позволяет утверждать, что оба эти явления представляют один тип динамики системы. Тем не

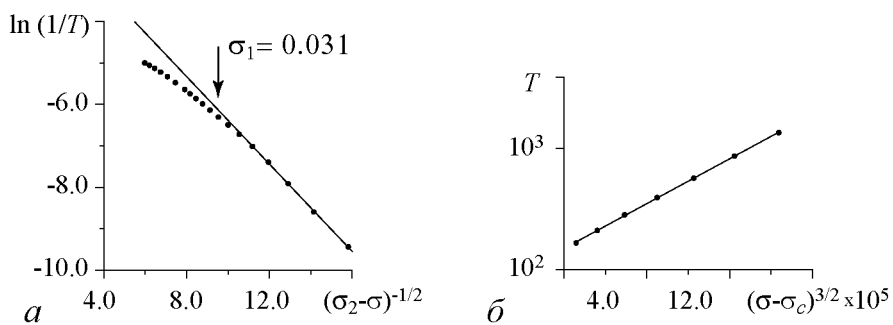


Рис. 1. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (10). Точки – численно полученные результаты. Сплошные линии – теоретические зависимости (5) и (2). *a* – перемежаемость игольного ушка ( $\sigma_2 = 0.042$ ), стрелкой отмечена граница возникновения режима перемежаемости игольного ушка  $\sigma_1 = 0.031$ . *б* – перемежаемость типа I с шумом ( $\sigma_c = 0.0345$ ), ось ординат показана в логарифмическом масштабе

менее, для того чтобы быть полностью уверенными в справедливости этого вывода, необходимо рассмотреть другой пример: систему, демонстрирующую перемежающееся поведение, которое традиционно классифицируется как перемежаемость типа I с шумом.

## 2.2. Неавтономный осциллятор ван дер Поля в присутствии шума.

В качестве второго примера рассмотрим неавтономный генератор ван дер Поля, на который оказывается некоторое случайное воздействие. Уравнение, описывающее динамику такой системы, имеет вид

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\omega_e t) + D\xi(t). \quad (11)$$

Здесь  $A$  – амплитуда внешнего гармонического сигнала с частотой  $\omega_e$ ,  $D\xi(t)$  – случайное слагаемое. Значения управляющих параметров были выбраны следующими:  $\lambda = 0.1$ ,  $\omega_e = 0.98$ . При таком наборе параметров и нулевом уровне шума ( $D = 0$ ) динамика неавтономного генератора ван дер Поля становится синхронной, когда  $A = A_c = 0.0238$ , что соответствует седло-узловой бифуркации на плоскости комплексных амплитуд. Плотность вероятности случайной величины  $\xi(t)$  есть функция

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right), \quad (12)$$

где  $\sigma^2 = 2$ . Для интегрирования (11) использовался одношаговый метод Эйлера с шагом по времени  $h = 5 \times 10^{-4}$ , значение интенсивности шума было фиксированным,  $D = 1$ .

С одной стороны, как это уже обсуждалось выше, перемежающееся поведение в этом случае классифицируется как перемежаемость типа I с шумом. Соответствующая зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности ( $A - A_c$ ) показана на рис. 2, б. Когда амплитуда  $A$  внешнего сигнала превышает критическое значение  $A_c$ , должен наблюдаться экспоненциальный закон  $T \sim \exp(\alpha(A - A_c)^{3/2})$ . Чтобы более наглядно изобразить наличие этой зависимости, абсцисса на рис. 2, б отложена в масштабе  $(A - A_c)^{3/2}$ , а ось ординат  $T$  показана в логарифмической шкале. Вновь можно видеть хорошее соответствие между численно полученными данными и теоретической зависимостью (2). Распределение

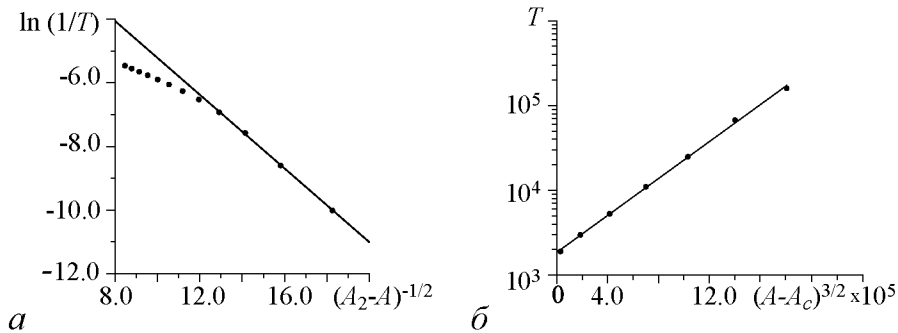


Рис. 2. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для неавтономного осциллятора ван дер Поля со случайным слагаемым (11). Точки – численно полученные результаты, сплошные линии – теоретические зависимости (5) и (2). а – перемежаемость игольного ушка ( $A_2 = 0.029$ ). б – перемежаемость типа I с шумом ( $A_c = 0.0238$ )

длительностей ламинарных фаз  $p(t)$ , полученное при  $A > A_c$  также удовлетворяет теоретическому выражению (3), см. рис. 7 в работе [12].

С другой стороны, если подобрать соответствующее значение  $A_2$  для неавтономного генератора ван дер Поля (11), то можно обнаружить, что перемежающееся поведение в этой системе может также рассматриваться как перемежаемость игольного ушка. Действительно, на рис. 2, а нетрудно видеть очень хорошее соответствие между полученной в численном счете для различных значений параметра связи средней длительностью ламинарных фаз  $T$  и теоретическим законом (5), соответствующим перемежаемости игольного ушка. Заметим также, что зависимость  $T(A_2 - A)$  в осях  $((A_2 - A)^{-1/2}, \ln(1/T))$  ведет себя таким же образом, как и соответствующая функция  $T(\sigma_2 - \sigma)$  в осях  $((\sigma_2 - \sigma)^{-1/2}, \ln(1/T))$  для двух связанных систем Ресслера (10).

**2.3. Квадратичное отображение со случайным воздействием.** Следующим примером является система с дискретным временем, квадратичное отображение

$$x_{n+1} = x_n^2 + \lambda - \varepsilon + D\xi_n, \quad \text{mod } 1, \quad (13)$$

где операция «mod 1» используется для того, чтобы обеспечить возврат системы в окрестность точки  $x = 0$ ;  $\lambda = 0.25$ , а плотность вероятности случайной величины  $\xi$  распределена равномерно в интервале  $\xi \in [-1, 1]$ . Если интенсивность шума  $D$  равна нулю, то седло-узловая бифуркация в системе наблюдается при  $\varepsilon = 0$ . Перемежающееся поведение типа I имеет место при  $\varepsilon < 0$ , в то время как для положительных  $\varepsilon$  наблюдается устойчивая неподвижная точка. Если добавить случайное воздействие ( $D > 0$ ) в (13), то можно ожидать, что перемежающееся поведение будет также наблюдаться в области положительных значений управляющего параметра  $\varepsilon$ , при этом средняя длительность ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности подчиняется закону (2).

Несмотря на то, что в этом случае мы имеем дело с перемежаемостью типа I в присутствии шума, точки, полученные численно и соответствующие средней длительности ламинарных фаз при различных значениях управляющего параметра, хорошо аппроксимируются как выражением (5), так и зависимостью (2) (см. рис. 3), что доказывает справедливость нашего утверждения об эквивалентности рассматриваемых типов перемежающегося поведения.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что построенные характеристики одни и те же, как в случае, когда перемежающееся поведение традиционно классифицируется как перемежаемость игольного ушка, так и в ситуации, когда мы имеем дело с системой, демонстрирующей перемежаемость типа I с шумом.

Два следующих подраздела посвящены рассмотрению перемежающегося поведения в другой системе и анализу того, как соотносятся между собой зависимости для перемежаемости типа I с шумом и перемежаемости игольного ушка, чтобы предоставить дополнительные аргументы в пользу сделанного предположения относительно эквивалентности этих двух типов перемежающегося поведения.



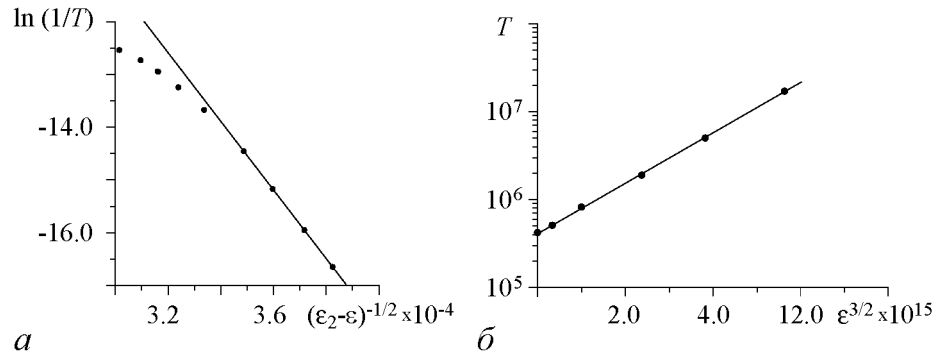


Рис. 3. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для квадратичного отображения (13). Точки – численно полученные результаты, сплошные линии – теоретические зависимости (5) и (2). *a* – перемежаемость игольного ушка ( $\epsilon_2 = 10^{-9}$ ). *б* – перемежаемость типа I в присутствии шума ( $\epsilon_c = 0$ )

### 3. Осциллятор ван дер Поля, управляемый хаотическим сигналом

В данном разделе рассмотрим осциллятор ван дер Поля, находящийся под внешним хаотическим сигналом со стороны системы Ресслера

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= \alpha(-\omega y - z), \\
 \dot{y}_d &= \alpha(\omega x + ay), \\
 \dot{z}_d &= \alpha(p + z(x - c)), \\
 \ddot{u} - (\lambda - u^2)\dot{u} + u &= \varepsilon(Dy - \dot{u}),
 \end{aligned} \tag{14}$$

где  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\omega = 0.9689$  – управляющие параметры. Вспомогательные параметры  $\alpha = 0.99$  и  $D = 0.0664$  изменяют характеристики (амплитуду и основную частоту) хаотического сигнала, оказывающего воздействие на осциллятор ван дер Поля.

С формальной точки зрения поведение системы (14) нельзя классифицировать ни как перемежаемость игольного ушка, ни как перемежаемость типа I с шумом. Действительно, поскольку ведомый осциллятор является периодическим, в его аттрактор не могут быть встроены неустойчивые периодические орбиты, которые могли бы синхронизоваться, следовательно, динамику системы нельзя трактовать как перемежаемость игольного ушка. Кроме того, благодаря наличию хаотических возмущений, говорить о чистой седло-узловой бифуркации в такой системе также нельзя, следовательно, нельзя вести речь и о перемежаемости типа I. Тем не менее, интуитивно понятно, что данный пример тесно связан со всеми случаями, рассмотренными выше, и можно ожидать, что в этой системе должны наблюдаться те же типы перемежающегося поведения. Принимая во внимание схожесть хаотических и случайных возмущений, о которой упоминалось выше, можно объяснить поведение генератора ван дер Поля, управляемого внешним хаотическим сигналом, в окрестности границы синхронного режима с позиций перемежаемости типа I в присутствии шума.

Рис. 4 иллюстрирует справедливость данного утверждения. В самом деле, численно полученные данные удовлетворяют как выражению (5) (рис. 4, *a*), так и зависимости (2) (рис. 4, *б*), что позволяет утверждать, что мы имеем здесь дело с тем

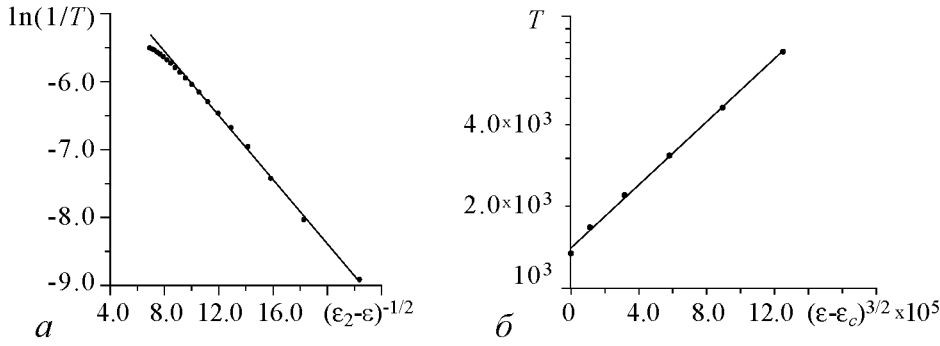


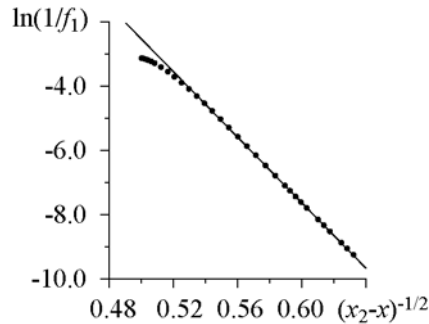
Рис. 4. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для генератора ван дер Поля под внешним хаотическим сигналом системы Ресслера (14). Точки – численно полученные результаты, сплошные линии – теоретические зависимости (5) и (2). *a* – перемежаемость игольного ушка ( $\varepsilon_2 = 0.023$ ). *б* – перемежаемость типа I с шумом ( $\varepsilon_c = 0.0185$ )

же самым типом динамики, что и в случаях неавтономного осциллятора ван дер Поля (11), квадратичного отображения (13) и двух связанных систем Ресслера (10), рассмотренных выше.

#### 4. Соотношение зависимостей средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для перемежаемости игольного ушка и перемежаемости типа I в присутствии шума

Поскольку один и тот же набор данных может быть аппроксимирован двумя различными кривыми (5) и (2), очевидно, что одна из них может быть аппроксимирована другой. Иными словами, экспоненциальный закон (2), полученный для средней длительности ламинарных фаз перемежаемости типа I с шумом, может быть также аппроксимирован зависимостью (5), соответствующей перемежаемости игольного ушка. Такая аппроксимация представлена на рис. 5. Очевидно, что, выбрав подходящее значение для критической величины  $x_2$ , можно аппроксимировать экспоненциальный закон (2) зависимостью, используемой для перемежаемости игольного ушка. Более того, в осях  $(|x_2 - x|^{-1/2}, \ln(1/f_1))$  функция  $f_1$  ведет себя таким же образом, как и аналогичные зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для квадратичного отображения (13), неавтономного осциллятора ван дер Поля (11), (14) и двух связанных систем Ресслера (10) (достаточно сравнить рис. 5 с рис. 1–4).

Рис. 5. Зависимость  $f_1(x) = C \exp(\alpha x^{3/2})$ , моделирующая теоретический экспоненциальный закон (2) и его аппроксимация кривой  $f_2(x) = c_0 - c_1|x - x_2|^{-1/2}$ , соответствующей закону (5) для перемежаемости игольного ушка. Значения параметров:  $C = 23$ ,  $\alpha = 3.33$ ,  $c_0 = 22.96$ ,  $c_1 = 50.98$ ,  $x_c = 4.0$ . Точки соответствуют зависимости  $f_1(x)$ . Зависимость  $f_2(x)$  изображена сплошной линией.



## Заклучение

Таким образом, на основании всего вышеизложенного можно сделать вывод о том, что перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I с шумом, рассматриваемые до настоящего времени как разные типы динамики, на самом деле являются одним типом поведения. Различие между данными типами перемежаемости заключается только в характере внешнего сигнала, воздействующего на систему. В случае перемежаемости типа I с шумом на систему оказывается случайное воздействие, в то время как для перемежаемости игольного ушка используется сигнал хаотической динамической системы, который влияет на динамику ведомого хаотического осциллятора. Вместе с тем, механизмы, отвечающие за поведение системы, равно как и характеристики динамики системы, одни и те же в обоих случаях.

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 08-02-00102-а, 09-02-92421-КЭ).*

## Библиографический список

1. *Dubois M., Rubio M., and Bergé P.* Experimental evidence of intermitencies associated with a subharmonic bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 51. P. 1446.
2. *Boccaletti S. and Valladares D.L.* Characterization of intermittent lag synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
3. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., and Zhou C.T.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports.* 2002. Vol. 366. P. 1.
4. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Lett.* 2005. Vol. 70, № 2. P. 169.
5. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Levin Yu.I.* Synchronization of chaotic oscillator time scales // *JETP.* 2005. Vol. 127, № 4. P. 886.
6. *Bergé P., Pomeau Y., and Vidal Ch.* L'ordre dans le chaos. Hermann, Paris, 1988.
7. *Platt N., Spiegel E.A., and Tresser C.* On-off intermittency: a mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
8. *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., and Kurths J.* Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 1. P. 47.
9. *Pomeau Y. and Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Commun. Math. Phys.* 1980. Vol. 74. P. 189.
10. *Eckmann J.P., Thomas L., and Wittwer P.* Intermittency in the presence of noise // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1981. Vol. 14. P. 3153.
11. *Kye W.-H. and Kim C.-M.* Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. P. 6304.
12. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Ovchinnikov A.A., and Boccaletti S.* Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, № 2. 026206.

13. *Rosa E., Ott E., and Hess M.H.* Transition to phase synchronization of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, № 8. P. 1642.
14. *Lee K.J., Kwak Y., and Lim T.K.* Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, № 2. P. 321.
15. *Grebogi C., Ott E., and Yorke J.A.* Fractal basin boundaries, long lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation//*Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50, № 13. P. 935.
16. *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., and Arecchi F.T.* Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic  $CO_2$  laser systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 19, 194101.
17. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J.* Phase synchronisation in regular and chaotic systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 3, 036205.
19. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., and Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // *Physica D.* 1997. Vol. 104, № 4. P. 219.
20. *Horita Takehiko, Ouchi Katsuya, Yamada T., and Fujisaka H.* Stochastic model of chaotic phase synchronization. II// *Progress of Theoretical Physics.* 2008. Vol. 119, № 2. P. 223.
21. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K.* Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78, 036212.
22. *Куровская М.К.* Распределение длительности ламинарных фаз при перемежаемости «игольного ушка» // *Письма в ЖТФ.* 2008. Т. 34, № 12. С. 483.
23. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, № 6, 067201.
24. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Generalized synchronization onset // *Europhysics Letters.* 2005. Vol. 72, № 6. P. 901.

*Саратовский государственный университет*

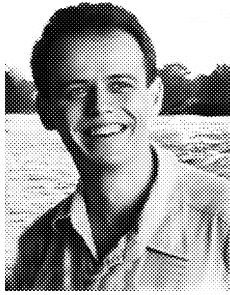
*Поступила в редакцию 18. 11.2009*

## **INTERMITTENCY OF TYPE-I WITH NOISE AND EYELET INTERMITTENCY**

*A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov*

In this article we compare the characteristics of two types of the intermittent behavior (type-I intermittency in the presence of noise and eyelet intermittency) supposed hitherto to be the different phenomena. We prove that these effects are the same type of dynamics observed under different conditions. The correctness of our conclusion is proven by the consideration of different sample systems, such as quadratic map, van der Pol oscillator and Rössler system.

*Keywords:* Fluctuation phenomena, random processes, noise, synchronization, chaotic oscillators, dynamical system, intermittency.



*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



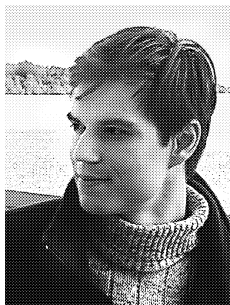
*Куровская Мария Константиновна* – родилась в г. Ташауз (1986). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2007). Награждена медалью Российской академии наук (2008). Кандидат физико-математических наук (2009). Ассистент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика, различные типы хаотической синхронизации и методы их диагностики. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: mc@nonlin.sgu.ru



*Москаленко Ольга Игоревна* – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры нелинейной физики СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 20 статей в центральных рецензируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru



*Храмов Александр Евгеньевич* – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru