



АНАЛИЗ ИНДУЦИРОВАННЫХ ШУМОМ БИФУРКАЦИЙ В СИСТЕМЕ ХОПФА

И.А. Баширцева, Т.В. Первалова, Л.Б. Ряшко

Рассматривается система Хопфа, являющаяся классической моделью бифуркации жесткого рождения цикла. В присутствии параметрических и аддитивных случайных возмущений в системе наблюдаются различные типы стохастических аттракторов. Для соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова получено решение, дающее явное представление для стационарной плотности распределения. Показано, как при вариации интенсивности мультипликативных шумов форма стохастических аттракторов системы претерпевает качественные изменения. Детально описано явление обратной стохастической бифуркации, при которой автоколебания подавляются мультипликативным шумом.

Ключевые слова: Система Хопфа, циклы, равновесия, стохастические аттракторы, обратные бифуркации.

Введение

Многие сложные явления нелинейной динамики связаны с мультистабильностью – наличием у исследуемой системы сразу нескольких аттракторов. Классическим случаем здесь является сосуществование равновесия и охватывающего его предельного цикла. Возможные переходы из бассейна притяжения одного аттрактора в бассейн притяжения другого сопровождаются возбуждением соответствующих автоколебаний или их подавлением [1]. В анализе таких переходов важную роль играет учет различных эффектов, связанных с наличием случайных возмущений. Индуцированные шумами переходы для нелинейных систем со стохастическими автоколебаниями привлекают внимание широкого круга исследователей как с теоретической, так и с практической точек зрения [2–4]. Воздействие даже малых шумов может привести к качественным изменениям в динамике системы [5, 6].

Исследование нелинейных стохастических автоколебаний было начато в [7] и продолжено в большом числе работ [8–10]. Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова дает детальное вероятностное описание динамики исследуемой системы, однако сложности его прямого анализа даже для двумерных систем заставляют обратиться к тем или иным асимптотическим методам и аппроксимациям. В настоящее время активно развивается вероятностный асимптотический анализ, использующий функцию квазипотенциала [11–15]. Новый подход, связанный с аппроксимацией квазипотенциала при помощи функции стохастической чувствительности, предложен в

работах [16–19] для количественного анализа отклика предельных циклов на случайные возмущения. Нелинейные динамические системы с индуцированными шумами переходами от равновесия к предельному циклу рассматривались многими авторами. Стохастический аналог бифуркации Андронова–Хопфа изучался для таких систем как брусселятор [20–23], осцилляторов Дуффинга [24], ван дер Поля [25] и Дуффинга–ван дер Поля [26, 27]. В ходе исследования этих моделей с помощью приближенных методов были обнаружены различные явления, связанные с воздействием случайных возмущений. Так, например, в [20, 21] описан сдвиг точки бифуркации Андронова–Хопфа в сторону больших значений бифуркационного параметра на величину, пропорциональную интенсивности возмущения.

В теории нелинейных динамических систем общеизвестна роль простых модельных примеров, допускающих точное аналитическое решение и позволяющих в силу этого получить исчерпывающее описание рассматриваемых явлений. К числу таких моделей относятся системы Хопфа – базовые примеры детерминированной теории бифуркаций, иллюстрирующие два варианта возбуждения автоколебаний (мягкое и жесткое). Явное аналитическое представление решений этих детерминированных систем позволяет достичь отчетливого понимания механизмов как мягкой, так и жесткой бифуркаций рождения цикла. Результаты анализа стохастически возмущенной модели Хопфа с мягкой бифуркацией рождения цикла представлены в [28]. Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением рассматривалось в [1], где изучались вероятности возбуждения и срыва автоколебаний.

В данной работе исследуется стохастический вариант модели Хопфа с жестким возбуждением автоколебаний. Из соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова получено явное аналитическое представление стационарной плотности распределения радиальной составляющей этой системы. Данная функция позволяет провести подробный вероятностный анализ зависимости стохастических аттракторов системы от параметров.

В статье представлены эффекты, связанные с воздействием как аддитивных, так и параметрических случайных возмущений. Показан механизм качественных изменений формы плотности распределения при вариации интенсивности параметрических шумов. Исследуются различия в реакции модели Хопфа на аддитивные и параметрические помехи в зоне перехода от равновесия к циклу. В работе исследованы соответствующие обратные стохастические бифуркации, связанные со сдвигом бифуркационных значений параметра, приводящие к подавлению автоколебаний.

1. Система Хопфа со случайными возмущениями

Будем рассматривать систему Хопфа (жесткий режим) под воздействием внешних аддитивных и параметрических шумов. Исходная детерминированная система имеет вид

$$\begin{cases} dx = (x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y)dt, \\ dy = (y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x)dt. \end{cases} \quad (1)$$

При значении параметра $\mu < -1$ единственным аттрактором системы является устойчивая точка покоя $(0, 0)$. При $\mu = -1$ наряду с существующей точкой покоя появляется полуустойчивый предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$.

При $-1 < \mu < 0$ система (1) имеет два аттрактора – равновесие $(0, 0)$ и цикл $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{1 + \mu}$, разделенных неустойчивым циклом $x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{1 + \mu}$.

При $\mu = 0$ происходит слияние внутреннего цикла с точкой покоя. В результате при $\mu > 0$ система имеет неустойчивое равновесие $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл. На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма величины $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, где для системы (1) устойчивые состояния изображены сплошными линиями, неустойчивые – штриховыми. При переходе параметра μ через значение -1 слева направо происходит жесткая бифуркация Хопфа – в системе появляется предельный цикл с радиусом $r > 1$.

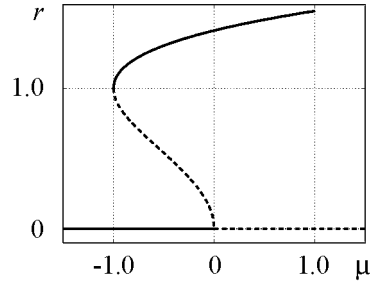


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма детерминированной системы

Добавим в систему (1) случайные возмущения. Рассмотрим соответствующую стохастическую систему уравнений Стратоновича

$$\begin{cases} dx = (x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y)dt + \sigma_1 x \circ dW_1 + \sigma_2 \circ dW_2, \\ dy = (y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x)dt + \sigma_1 y \circ dW_1 + \sigma_3 \circ dW_3, \end{cases} \quad (2)$$

где W_i ($i = 1, 2, 3$) – независимые стандартные винеровские процессы, $\sigma_1 \geq 0$ – интенсивность параметрического (мультипликативного) шума, $\sigma_2 \geq 0$ и $\sigma_3 \geq 0$ – интенсивности аддитивных шумов. Запишем для (2) эквивалентную систему уравнений Ито

$$\begin{cases} dx = \left(x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y + \frac{\sigma_1^2}{2}x \right) dt + \sigma_1 x dW_1 + \sigma_2 dW_2, \\ dy = \left(y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x + \frac{\sigma_1^2}{2}y \right) dt + \sigma_1 y dW_1 + \sigma_3 dW_3. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что обе системы имеют подобную математическую структуру и отличаются на сдвиг $\mu_{\text{Ито}} = \mu_{\text{Страт}} + \sigma_1^2/2$.

Сделаем в системе замену переменных

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x},$$

получим по формуле Ито

$$\begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} (\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2) + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} (\sigma_1^2 xy) + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} (\sigma_1^2 y^2 + \sigma_3^2) \right) dt, \\ d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (\sigma_1^2 xy) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (\sigma_1^2 y^2 + \sigma_3^2) \right) dt \end{aligned}$$

новую систему стохастических уравнений в полярных координатах

$$\begin{cases} dr = \left((\mu + 2r^2 - r^4)r + r \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \frac{1}{2r} (\sigma_2^2 \sin^2 \varphi + \sigma_3^2 \cos^2 \varphi) dt + \\ \quad + r\sigma_1 dW_1 + \sigma_2 \cos \varphi dW_2 + \sigma_3 \sin \varphi dW_3, \\ d\varphi = dt + \frac{1}{r^2} (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) \cos \varphi \sin \varphi dt + \frac{1}{r} (-\sigma_2 \sin \varphi dW_2 + \sigma_3 \cos \varphi dW_3). \end{cases} \quad (4)$$

Предположим, что интенсивность внешних аддитивных возмущений в системе уравнений (3) одинакова, то есть $\sigma_2 = \sigma_3$. При этом предположении определим два новых случайных процесса W_r и W_φ следующим образом:

$$dW_r = \cos \varphi dW_2 + \sin \varphi dW_3,$$

$$dW_\varphi = -\sin \varphi dW_2 + \cos \varphi dW_3.$$

Эти формулы представляют собой ортогональное преобразование двух винеровских процессов W_2 и W_3 , в силу чего случайные процессы W_r и W_φ также являются независимыми стандартными винеровскими процессами (см., например, [29]).

В результате систему (4) с новыми винеровскими процессами W_r и W_φ можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} dr = \left((\mu + 2r^2 - r^4)r + r \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2r} \right) dt + r\sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_r, \\ d\varphi = dt + \frac{1}{r} \sigma_2 dW_\varphi. \end{cases} \quad (5)$$

В системе (5) переменная r не зависит от φ . Решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1^2 r^2 + \sigma_2^2) \rho]'' = [((\mu + 2r^2 - r^4)r + r \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2r}) \rho]' \quad (6)$$

для стационарной плотности распределения $\rho(r)$ может быть найдено аналитически. Функция $\rho(r)$ является исчерпывающей вероятностной характеристикой стохастических аттракторов системы (5). Исследуем отдельно случаи воздействия аддитивного и мультипликативного шумов.

2. Стохастические аттракторы системы Хопфа

2.1. Влияние аддитивного шума. Рассмотрим случай, когда на систему Хопфа действует только аддитивный шум ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$). Тогда уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (6) примет вид

$$\frac{\sigma_2^2}{2} \rho'' = [((\mu + 2r^2 - r^4)r + \frac{\sigma_2^2}{2r}) \rho]'$$

и сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\mu r^2 + 4r^4 - 2r^6 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2 r} dr,$$

решением которого является функция

$$\rho(r) = Nr \exp\left(\frac{3\mu r^2 + 3r^4 - r^6}{3\sigma_2^2}\right), \quad (7)$$

где $N > 0$ – константа интегрирования. Для стационарной плотности распределения $p(x, y)$ системы Хопфа (3) в декартовых координатах x и y получим

$$p(x, y) = K \exp\left(\frac{3\mu(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3}{3\sigma_2^2}\right) \quad (8)$$

с константой интегрирования $K > 0$.

На рис. 2 представлены графики функции $p(x, 0)$ для пяти значений параметра μ и при различных значениях интенсивности аддитивного шума σ_2 .

Проведем анализ функции плотности распределения $p(x, y)$ в зависимости от параметров μ и σ_2 . Экстремумы функции $p(x, y)$ удовлетворяют следующим равенствам:

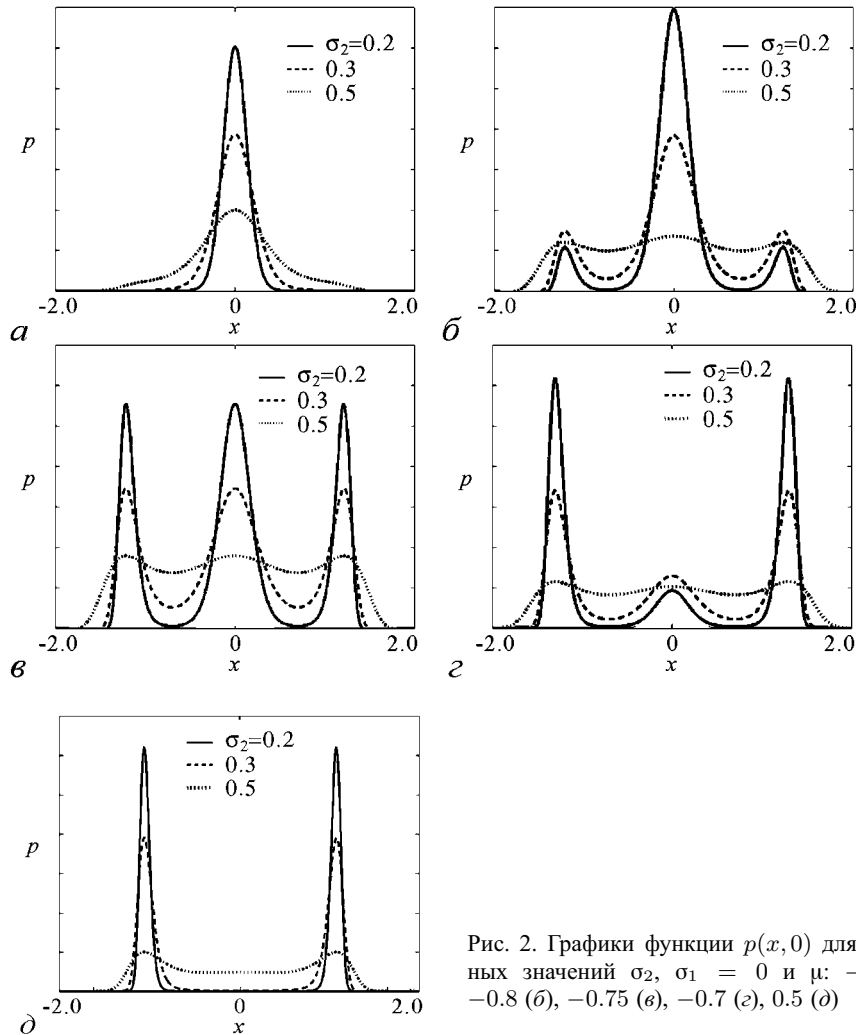


Рис. 2. Графики функции $p(x, 0)$ для различных значений σ_2 , $\sigma_1 = 0$ и μ : -1.2 (а), -0.8 (б), -0.75 (в), -0.7 (г), 0.5 (д)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2K}{\sigma_2^2} e^{\beta} x [\mu + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2] = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2K}{\sigma_2^2} e^{\beta} y [\mu + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2] = 0,$$

где $\beta = 1/(3\sigma_2^2)(3\mu(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3)$.

Экстремумы достигаются в следующих точках фазовой плоскости:

$$x = y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}, \quad x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{\mu + 1}.$$

Анализ этих множеств приводит к следующим результатам.

При $\mu \leq -1$ функция $p(x, y)$ имеет единственный максимум в точке $(0, 0)$. Случайные траектории системы Хопфа под воздействием аддитивных помех концентрируются вблизи точки $(0, 0)$. Соответствующий аттрактор будем называть *стохастической точкой покоя* (рис. 2, а).

При $\mu \geq 0$ функция $p(x, y)$ достигает максимума в точках детерминированного цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ и имеет единственный минимум в точке $(0, 0)$. Случайные траектории системы Хопфа под воздействием аддитивных помех концентрируются вблизи точек окружности $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. Такой аттрактор будем называть *стохастическим предельным циклом* (рис. 2, д).

При $-1 < \mu < 0$ функция $p(x, y)$ имеет три экстремума. Локальный минимум функции достигается при $x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ и два локальных максимума достигаются при $x = y = 0$, $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. Случайные состояния системы Хопфа под воздействием аддитивных помех распределяются между точкой $(0, 0)$ и детерминированным циклом $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. В этом случае наблюдается комбинированный аттрактор, объединяющий стохастическое равновесие и предельный цикл (рис. 2, б-з).

На интервале $\mu \in (-1, 0)$ в графиках сечений плотности $p(x, 0)$ наблюдаются три пика. Средний пик связан с повышенной концентрацией случайных состояний вблизи равновесия, а крайние – в окрестности цикла. При $\mu = -0.75$ максимальные значения плотности распределения $p(x, y)$ для равновесия $(0, 0)$ и цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ совпадают (см. рис. 2, в). На интервале $-1 < \mu < -0.75$ в стационарной плотности распределения доминирует стохастическое равновесие. Чем ближе μ к -1 , тем вес стохастического равновесия больше (см. рис. 2, б). На интервале $-0.75 < \mu < 0$ уже доминирует стохастический цикл. При стремлении μ к 0 вес стохастического равновесия уменьшается (см. рис. 2, з). При изменении параметра μ от -1 до 0 высота P_e пика плотности $p(x, 0)$, соответствующего равновесию, уменьшается и одновременно увеличивается высота P_c крайних пиков, характеризующих стохастический цикл.

Величина $k = (P_c - P_e)/(\max(P_c, P_e))$ позволяет оценить вес равновесия и цикла в общем распределении. На рис. 3 представлены графики весовой функции $k(\mu, \sigma_2)$ на интервале $-1 < \mu < 0$ при разных значениях σ_2 ($\sigma_1 = 0$). Для $\mu = -0.75$ при всех σ_2 имеем $k = 0$ ($P_c = P_e$) – концентрации состояний вблизи равновесия и цикла одинаковы. При $-1 < \mu < -0.75$ знак у k отрицательный – домини-

рует стохастическое равновесие; при $-0.75 < \mu < 0$, где знак у k положительный, доминирует цикл. При увеличении σ_2 значение k для каждого фиксированного μ стремится к нулю – пики плотности распределения равновесия и цикла выравниваются по высоте.

Изменение интенсивности σ_2 аддитивного шума не меняет положение локальных экстремумов функции плотности распределения. Увеличение аддитивного шума приводит к увеличению разброса случайных траекторий системы Хопфа вблизи детерминированных аттракторов: вокруг устойчивой точки покоя $(0, 0)$ при $\mu \leq 1$; вокруг устойчивой точки покоя $(0, 0)$ и устойчивого предельного цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ при $-1 < \mu < 0$; вокруг устойчивого предельного цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ при $\mu \geq 0$. Заметим, что бифуркационные значения $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = 0$ детерминированной системы Хопфа являются точками, при которых форма графика $p(x, y)$ претерпевает качественные изменения – в стохастической системе Хопфа происходит так называемая Р-бифуркация [30]. Таким образом, в отсутствие параметрических шумов точки бифуркации детерминированной системы являются одновременно точками бифуркации и системы с аддитивными помехами. Иными словами, аддитивный шум не меняет расположения точек бифуркации.

2.2. Влияние мультипликативного шума. Рассмотрим случай, когда на систему действует невырожденный мультипликативный шум ($\sigma_1 \neq 0$). В этом случае решение уравнения (6) имеет вид

$$\rho(r) = Nr \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}r^4 + \left(\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^4}\right)r^2\right) (\sigma_1^2 r^2 + \sigma_2^2)^\alpha \quad (9)$$

для полярных координат и

$$p(x, y) = K \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x^2 + y^2)^2 + \left(\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^4}\right)(x^2 + y^2)\right) (\sigma_1^2(x^2 + y^2) + \sigma_2^2)^\alpha \quad (10)$$

в декартовых координатах. Здесь

$$\alpha = \frac{\mu}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1^4} - \frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^6} - 1,$$

$K > 0$ и $N > 0$ – константы интегрирования.

Для локальных экстремумов функции $p(x, y)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2Ke^\gamma (\sigma_1^2(x^2 + y^2) + \sigma_2^2)^{\alpha-1} x [\mu + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 - \sigma_1^2] = 0,$$

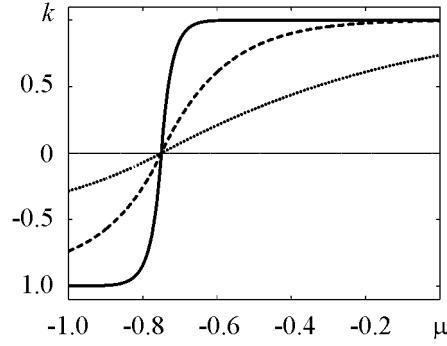


Рис. 3. Вес при различных значениях σ_2 : 0.2 (сплошная линия), 0.5 (штриховая линия), 1.0 (пунктирная линия)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2Ke^\gamma(\sigma_1^2(x^2 + y^2) + \sigma_2^2)^{\alpha-1}y[\mu + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 - \sigma_1^2] = 0,$$

где $\gamma = -1/(2\sigma_1^2)(x^2 + y^2)^2 + (2/\sigma_1^2 + \sigma_2^2/\sigma_1^4)(x^2 + y^2)$. Экстремумы могут достигаться в следующих точках фазовой плоскости

$$x = y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}, \quad x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}.$$

Анализ этих множеств приводит к следующим результатам.

При $\mu \leq -1 + \sigma_1^2$ функция $p(x, y)$ имеет единственный максимум в точке $(0, 0)$. В этом случае аттрактором системы Хопфа (3) является стохастическая точка покоя $(0, 0)$.

При $-1 + \sigma_1^2 < \mu \leq \sigma_1^2$ функция $p(x, y)$ имеет три экстремума одновременно. Локальный минимум функции достигается при $x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}$. Два локальных максимума достигаются при $x = y = 0$, $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}$. Случайные состояния системы Хопфа (3) концентрируются вблизи точки $(0, 0)$ и вблизи окружности радиуса $r_s = \sqrt{1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}}$. Параметры системы, при которых значения соответствующих локальных максимумов функции $p(x, y)$ совпадают, могут быть найдены из уравнения

$$\begin{aligned} &(\sigma_1^2(1 + \sqrt{1 + \mu - \sigma_1^2}) + \sigma_2^2)^\alpha \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\sqrt{1 + \mu - \sigma_1^2} + 1)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^4}\right)(\sqrt{1 + \mu - \sigma_1^2} + 1)\right) = (\sigma_2^2)^\alpha, \end{aligned}$$

где $\alpha = \mu/\sigma_1^2 - (2\sigma_2^2)/\sigma_1^4 - \sigma_2^4/\sigma_1^6 - 1$.

При $\mu > \sigma_1^2$ функция $p(x, y)$ достигает максимума в точках стохастического цикла $x^2 + y^2 = r_s^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}$ и имеет единственный минимум в точке $(0, 0)$. Тип аттрактора – стохастический предельный цикл радиуса r_s .

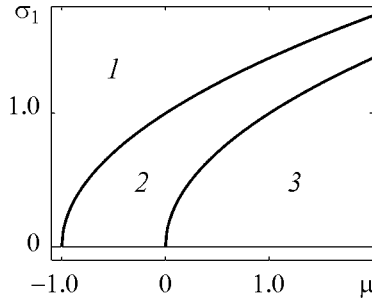


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма возмущенной системы. Зона 1 – «стохастическое равновесие»; зона 2 – комбинированный аттрактор «стохастическое равновесие и предельный цикл»; зона 3 – «стохастический предельный цикл»

Как видим, расположение экстремумов функции $p(x, y)$ не зависит от аддитивного шума и определяется исключительно интенсивностью σ_1 мультипликативного шума и параметром μ .

Изменение интенсивности σ_1 параметрического шума сдвигает точки экстремума функции плотности распределения на величину σ_1^2 . Таким образом, присутствие мультипликативного шума изменяет точки бифуркации от $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = 0$ к $\mu_1 = -1 + \sigma_1^2$ и $\mu_2 = \sigma_1^2$. На рис. 4 показана бифуркационная диаграмма возмущенной системы Хопфа. Кривые $\mu = -1 + \sigma_1^2$ и $\mu = \sigma_1^2$ являются границами между зонами: зона 1 – область параметров $\mu < -1 + \sigma_1^2$,

где наблюдается стохастическая точка покоя; зона 2 – область $-1 + \sigma_1^2 \leq \mu \leq \sigma_1^2$ сосуществования стохастической точки покоя и стохастического предельного цикла; зона 3 – область $\mu > \sigma_1^2$, где система имеет лишь стохастический предельный цикл.

Очевидно, что для каждого фиксированного значения параметра $\mu > 0$ увеличение σ_1 приводит к переходу от стохастического предельного цикла ($0 < \sigma_1 < \sqrt{\mu}$) к комбинированному аттрактору, объединяющему стохастический цикл и равновесие ($\sqrt{\mu} < \sigma_1 < \sqrt{\mu + 1}$), а затем к стохастическому равновесию ($\sigma_1 > \sqrt{\mu + 1}$). Таким образом, в точках $\sigma_1 = \sqrt{\mu}$ и $\sigma_1 = \sqrt{\mu + 1}$, где происходит качественное изменение динамики системы, наблюдаются *обратные стохастические бифуркации*.

Особенности в поведении функции плотности распределения $p(x, y)$ при изменении параметров σ_1 и μ демонстрируются на рис. 5.

На рис. 5, а представлен график функции $p(x, 0)$ для $\mu = -1.1, \sigma_2 = 0.2$ и трех значений интенсивности мультипликативного шума σ_1 . Увеличение интенсивности мультипликативного шума ведет к уменьшению разброса случайных траекторий вокруг точки покоя $(0, 0)$.

На рис. 5, б представлен график функции $p(x, 0)$ для $\mu = -0.5, \sigma_2 = 0.2$ и трех значений интенсивности мультипликативного шума σ_1 . Увеличение интенсивности мультипликативного шума ведет к уменьшению плотности вероятности случайных траекторий вокруг стохастического предельного цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}$ и к повышению их концентрации в окрестности точки покоя $(0, 0)$.

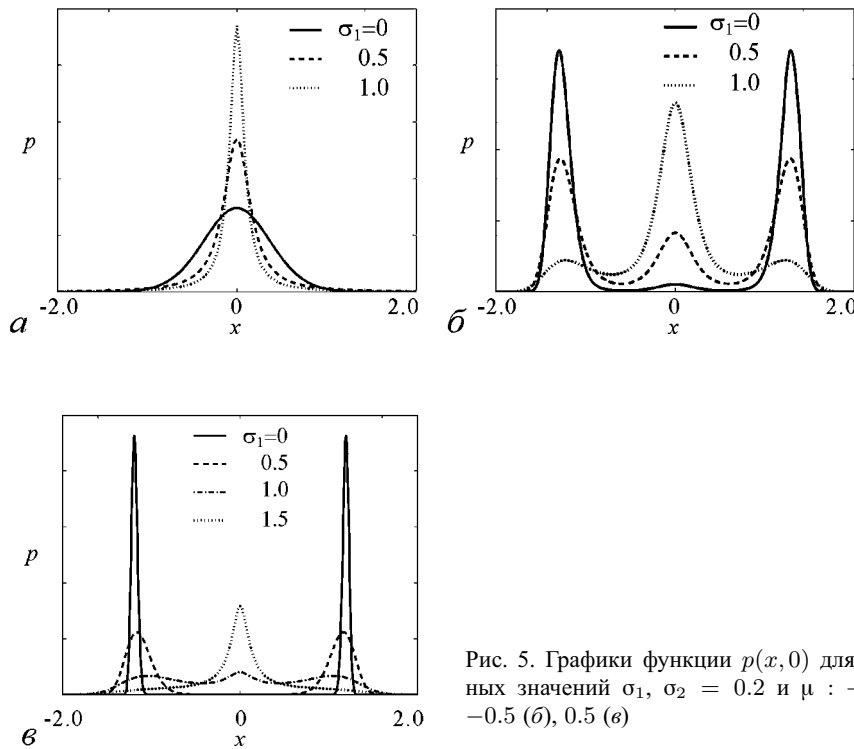


Рис. 5. Графики функции $p(x, 0)$ для различных значений $\sigma_1, \sigma_2 = 0.2$ и μ : -1.1 (а), -0.5 (б), 0.5 (в)

На рис. 5, в представлен график функции $p(x, 0)$ для $\mu = 0.5, \sigma_2 = 0.2$ и четырех значений интенсивности мультипликативного шума σ_1 . Увеличение интенсивности мультипликативного шума сопровождается затуханием автоколебаний и приводит к увеличению концентрации случайных траекторий вокруг точки покоя $(0, 0)$. При этом наблюдается стадия сосуществования стохастической точки покоя и стохастического предельного цикла.

Качественные изменения формы графика функции плотности распределения $p(x, y)$, соответствующие описанным выше стохастическим бифуркациям, представлены на рис. 6. Здесь график функции $p(x, y)$ имеет три характерных формы: «кратер», «кратер+пик», «пик».

Для фиксированного значения $\mu = 0.1$ стохастические бифуркации происходят в точках $\sigma_1 = \sqrt{0.1} \approx 0.316$ и $\sigma_1 = \sqrt{1.1} \approx 1.049$. При увеличении интенсивности мультипликативного шума от $\sigma_1 = 0.3$ (рис. 6, а) к $\sigma_1 = 0.8$ (рис. 6, б) форма графика функции $p(x, y)$ преобразуется из «кратер» в «кратер+пик». Увеличение σ_1 от $\sigma_1 = 0.8$ (см. рис. 6, б) к $\sigma_1 = 1.0$ (рис. 6, в) преобразует форму графика из «кратер+пик» в «пик». Дальнейшее увеличение σ_1 приводит лишь к увеличению высоты пика (рис. 6, з).

На рис. 7 представлены случайные состояния системы Хопфа для фиксированных значений параметров $\mu = 0.1, \sigma_2 = 0.2$ при различных значениях интенсивности σ_1 мультипликативного шума. Легко заметить, что при увеличении интенсивности σ_1 концентрация случайных состояний перераспределяется от предельного цикла к точке покоя.

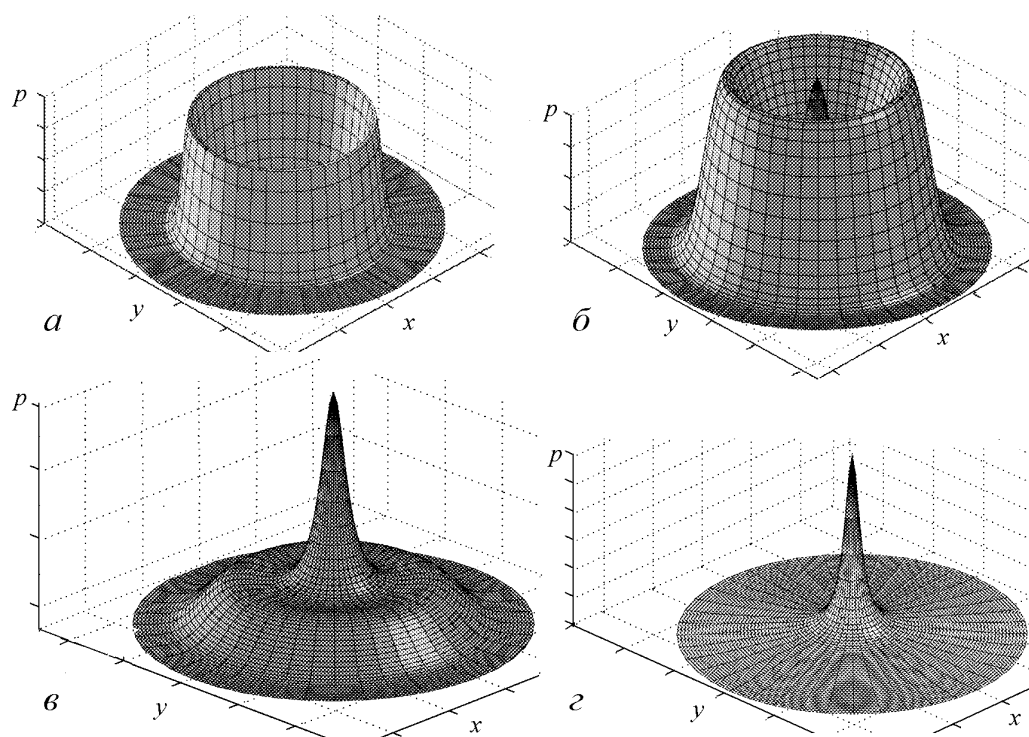


Рис. 6. Графики функции $p(x, y)$ при $\mu = 0.1, \sigma_2 = 0.2$ для различных значений σ_1 : 0.3 (а), 0.8 (б), 1.0 (в), 1.5 (з)

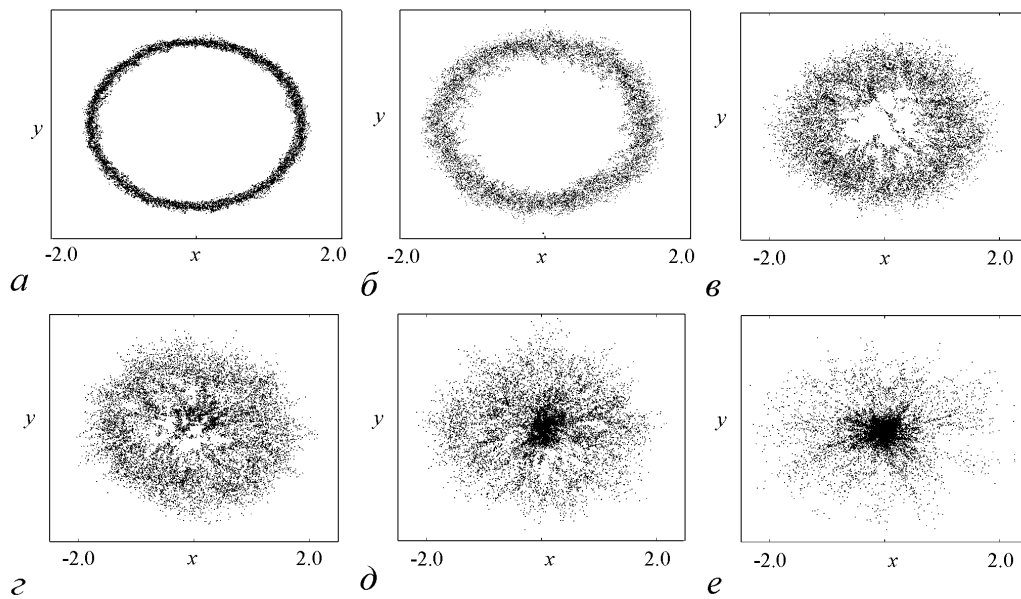


Рис. 7. Случайные состояния системы Хопфа при $\mu = 0.1$, $\sigma_2 = 0.2$ для различных значений σ_1 : 0.0 (а), 0.3 (б), 0.7 (в), 0.8 (г), 1.0 (д), 1.5 (е)

Заключение

Исследована стохастически возмущенная система Хопфа в зоне жесткой бифуркации рождения цикла. В присутствии параметрических и аддитивных случайных возмущений в системе наблюдаются различные типы стохастических аттракторов. Детальное описание этих аттракторов может быть получено с помощью стационарной плотности распределения $p(x, y)$. Для функции $p(x, y)$ – решения соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова – получено явное параметрическое представление.

Исследованы эффекты, связанные с воздействием как аддитивных, так и параметрических случайных возмущений. Вариация интенсивности аддитивных шумов (в отсутствие параметрических) приводит лишь к количественному изменению формы $p(x, y)$. Максимумы этой функции всегда достигаются на детерминированных аттракторах (равновесие, цикл) невозмущенной системы.

При вариации интенсивности параметрических шумов форма стохастических аттракторов системы претерпевает качественные изменения. Построены явные формулы для сдвигов бифуркационных значений параметров. Полученные результаты позволяют детально описать явление обратной стохастической бифуркации, при которой стохастические автоколебания подавляются мультипликативным шумом.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ N09-01-00026, N09-08-00048, РФФИ 10-01-96022 урал, Федерального агентства по образованию 2.1.1/2571, ФЦП 02.740.11.0202.

Библиографический список

1. *Стратонович Р.Л., Ланда П.С.* Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением // Радиофизика. 1959. Т. 2, № 1. С. 37.
2. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 400 с.
3. *Неймарк Ю.Н., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
4. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol. 323. P. 1.
5. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic analysis of a non-normal dynamical system mimicking a laminar-to-turbulent subcritical transition // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 066310.
6. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic analysis of subcritical amplification of magnetic energy in a turbulent dynamo // Phys. A. 2004. Vol. 342. P. 491.
7. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
8. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
9. *Ibrahim R.A.* Parametric Random Vibration. New York: John Wiley and Sons, 1985.
10. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random Vibration of Mechanical and Structural Systems. New Jersey: RTL Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.
11. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
12. *Dembo M., Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1995.
13. *Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z.* A direct approach to the exit problem // SIAM J. Appl. Math. 1990. Vol. 50. P. 595.
14. *Roy R.V.* Asymptotic analysis of first passage problem // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1997. Vol. 32. P. 173.
15. *Smelyanskiy V.N., Dykman M.I., Maier R.S.* Topological features of large fluctuations to the interior of a limit cycle // Physical Review E. 1997. Vol. 55. P. 2369.
16. *Башикурцева И.А., Ряшко Л.Б., Стихин П.В.* Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 32.
17. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and Computers in Simulation. 2004. Vol. 66. P. 55.
18. *Ryagin M., Ryashko L.* The analysis of the stochastically forced periodic attractors for Chua's circuit // Int. J. Bifurcation Chaos. 2004. Vol. 14, № 11. P. 3981.
19. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 26. P. 1437.

20. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // In *Fluctuations and Sensitivity in Equilibrium Systems* / ed. by W. Horsthemke and D.K. Kondepudi. Berlin: Springer, 1984. P. 143.
21. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
22. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. A.* 1987. V. 36. P. 834.
23. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* The stochastic Brusselator: Parametric noise destroys Hopf bifurcation // In *Stochastic Dynamics*. Bremen, 1997. P. 71. New-York: Springer, 1999.
24. *Malick K., Marcq P.* Stability analysis of noise-induced Hopf bifurcation // *Eur. Phys. J.* 2003. Vol. 36. P. 119.
25. *Leung H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model // *Physica A.* 1998. Vol. 254. P. 146.
26. *Namachchivaya N.Sri.* Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitations // *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 110. P. 923.
27. *Schenk-Hoppe K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear dynamics.* 1996. Vol. 11. P. 255.
28. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances// *Chaos, Solitons and Fractals.* 2009. Vol. 39. P. 7.
29. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
30. *Arnold L.* *Random Dynamical Systems.* Berlin: Springer, 1998.

*Уральский государственный
университет*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*9.03.2009
20.05.2009*

ANALYSIS OF NOISE-INDUCED BIFURCATIONS FOR THE HOPF SYSTEM

I.A. Bashkirtseva, T.V. Perevalova, L.B. Ryashko

We consider the Hopf system as a classical model of a stiff birth of a cycle. In the presence of parametrical and additive random disturbances, various types of the stochastic attractors are observed. The solution of the corresponding Fokker–Planck–Kolmogorov equation is found. The qualitative changes of the form for stochastic attractors under multiplicative noise are shown. The phenomenon of backward stochastic bifurcations is described in details.

Keywords: Hopf system, cycles, equilibria, stochastic attractors, backward bifurcations.



Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru



Перевалова Татьяна Владимировна – родилась в 1981 году, окончила Уральский госуниверситет (2004), ассистент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – аттракторы нелинейных систем, анализ стохастической чувствительности, компьютерное моделирование динамических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: tatyana.perevalova@usu.ru



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: lev.ryashko@usu.ru