



РОЖДЕНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ В НЕОБРАТИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Ж.Т. Жусубалиев, О.О. Яночкина

В статье обсуждается новый феномен, открытый авторами совсем недавно в двумерных эндоморфизмах, демонстрирующих переход к хаосу через разрушение замкнутой инвариантной кривой. Как известно, при рациональном числе вращения на этой кривой имеется четное число периодических орбит, половина из которых устойчивые, а половина – седловые, а сама кривая образована замыканием неустойчивых многообразий седловых циклов. Как оказалось, если отображение необратимо, то седловая периодическая орбита, лежащая на замкнутой инвариантной кривой, обычно претерпевает бифуркацию удвоения периода или бифуркацию вилки. В результате этого на инвариантной кривой мягко рождаются два новых «слоя», образованные неустойчивыми многообразиями седлового цикла удвоенного периода или неустойчивыми многообразиями двух седловых циклов того же периода в случае бифуркации вилки.

Ключевые слова: Двумерные эндоморфизмы, «многослойная» замкнутая инвариантная кривая, квазипериодическая динамика.

Введение

Возникновение хаотических колебаний через разрушение двумерного тора, на котором число вращения рационально, – широко распространенное явление. В.С. Афраймович и Л.П. Шильников доказали теорему о разрушении замкнутой инвариантной кривой в сечении тора с резонансной структурой и указали возможные пути хаотизации колебаний [1, 2]. Общий характер выводов этой теоремы был подтвержден численно и экспериментально для широкого класса дискретных и потоковых систем (см., например, [3] и цитируемую там литературу).

В последние годы теория Афраймовича–Шильникова была существенно дополнена некоторыми модификациями, характерными для необратимых отображений (эндоморфизмов) [4, 5] и для кусочно-гладких динамических систем [6, 7]. Так например, в работах [4, 5] показано, что разрушение инвариантной кривой может быть связано с особой нелокальной бифуркацией, приводящей к бесконечному числу самопересечений неустойчивых многообразий седловой периодической орбиты с образованием «петель» на этой кривой [8–10].

В недавней нашей работе [11] при анализе динамики трехмерной системы кусочно-гладких дифференциальных уравнений впервые была обнаружена «двухслойная» замкнутая инвариантная кривая в сечении резонансного тора. Такая кривая

является объединением неустойчивых многообразий двух седловых периодических орбит с устойчивым циклом. В последующих исследованиях [12–14] было установлено, что это явление – типичное свойство двумерных эндоморфизмов, причем число «слоев» замкнутой инвариантной кривой может быть и больше двух. Такую кривую мы назвали «многослойной».

В данной статье мы преследуем цель описать это явление на простейшем примере необратимого отображения.

1. Рождение и разрушение «многослойной» замкнутой кривой

Рассмотрим двумерное необратимое отображение [15, 16]

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ by - cx + x^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

принадлежащее к классу $(Z_0 - Z_2)$.

Фазовая плоскость отображения (1) делится на две открытые области Z_0 и Z_2 такие, что точка $X = (x, y)^T$, принадлежащая Z_2 , имеет два разных прообраза $f^{-1}(X)$ ранга один, а точка $X = (x, y)^T$ из области Z_0 – ни одного. Границей указанных областей является линия LC (ligne critique [15]), которая есть геометрическое место точек X , имеющих два совпадающих прообраза $f^{-1}(X)$, расположенных на так называемой кривой сливающихся прообразов LC_{-1} (curve of merging pre-images [15]). Если отображение непрерывно и непрерывно дифференцируемо, то LC_{-1} включена во множество, определяемое условием

$$|J(X)| = 0,$$

где $|J(X)|$ – определитель матрицы Якоби.

Для рассматриваемого отображения определитель матрицы Якоби обращается в нуль вдоль вертикальной прямой

$$LC_{-1} = \{(x, y) : x = c/2\}.$$

Если отображение недифференцируемо, как в случае кусочно-гладких систем, то роль LC_{-1} обычно играет кривая недифференцируемости, на которой определитель матрицы Якоби меняет знак [15]. Кривую LC , удовлетворяющую $f(LC_{-1}) = LC$ и $f^{-1}(LC) \supseteq LC_{-1}$, называют критической линией ранга один [15]. Для отображения (1) уравнение критической линии имеет вид

$$LC = f(LC_{-1}) = \{(x, y) : y = bx - c^2/4\}.$$

Образ ранга k кривой LC называется критической линией ранга $k + 1$: $LC_k = f^k(LC)$ [15]. Следует отметить, что отображения типа $(Z_0 - Z_2)$ составляют класс необратимых отображений, обладающих простейшими свойствами. Мы не будем здесь обсуждать вопрос о роли критических линий при бифуркациях инвариантных кривых. Заинтересованных читателей отсылаем к источникам [9, 10, 15, 16].

Отображение (1) имеет две неподвижные точки $O_1 = (0, 0)^T$ и $O_2 = (1 - b + c, 1 - b + c)^T$. На линии $N_\varphi = \{(b, c) : c = 1\}$ плоскости параметров (b, c) неподвижная точка $O_1 = (0, 0)^T$ теряет устойчивость, когда комплексносопряженная пара мультипликаторов выходит на границу единичного круга. При этом из неподвижной точки рождается квазипериодический режим через суперкритическую бифуркацию Неймарка–Саккера.

На рис. 1 приведена карта динамических режимов, рассчитанная в плоскости параметров (b, c) . Области периодичности, расположенные выше бифуркационной границы N_φ , соответствуют резонансным языкам (языкам Арнольда). Белая часть рисунка, обозначенная через Π_∞ , относится к области квазипериодичности и хаоса. На рис. 1 выделен резонансный язык 1 : 5.

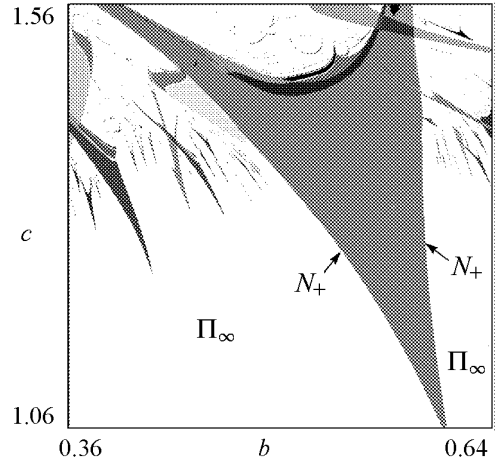


Рис. 1. Карта динамических режимов в плоскости управляющих параметров (b, c)

В классическом случае внутри каждого клюва на замкнутой инвариантной кривой, отвечающей рациональному значению числа вращения, устойчивый цикл сосуществует с седловым того же периода или сосуществуют несколько пар устойчивых и неустойчивых периодических орбит. Сама кривая является объединением неустойчивых многообразий седловых периодических орбит с устойчивыми циклами.

Оказывается, если отображение необратимое, то седловая периодическая орбита, лежащая на замкнутой инвариантной кривой, может претерпевать бифуркацию удвоения периода или бифуркацию вилки [12–14]. В результате на этой кривой появляются два новых «слоя», образованные неустойчивыми многообразиями седловой периодической орбиты удвоенного периода или неустойчивыми многообразиями двух седловых циклов того же периода в случае бифуркации вилки [12–14].

На рис. 2, а приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая основные стадии рождения «трехслойной» замкнутой кривой в отображении (1). В точке

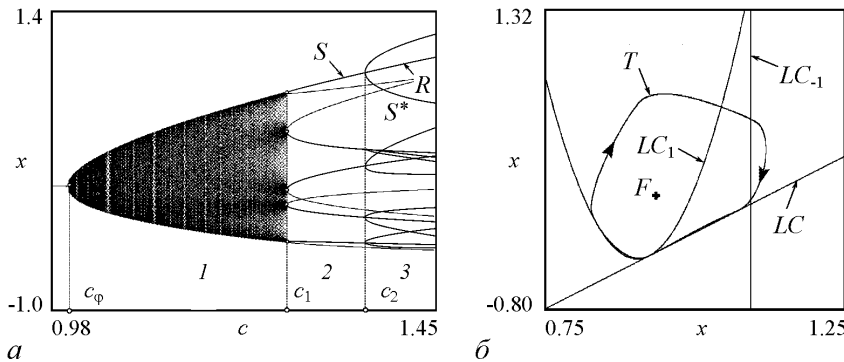


Рис. 2. а – бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая рождение замкнутой инвариантной кривой с «трехслойной» структурой ($b = 0.54$). 1 – область квазипериодической динамики; 2 – область существования «однослойной» замкнутой кривой отвечающей рациональному значению числа вращения; 3 – область существования «трехслойной» инвариантной кривой. б – инвариантная кривая T с иррациональным числом вращения, отвечающая квазипериодическому режиму ($b = 0.54, c = 1.25$). Здесь F – неустойчивый фокус

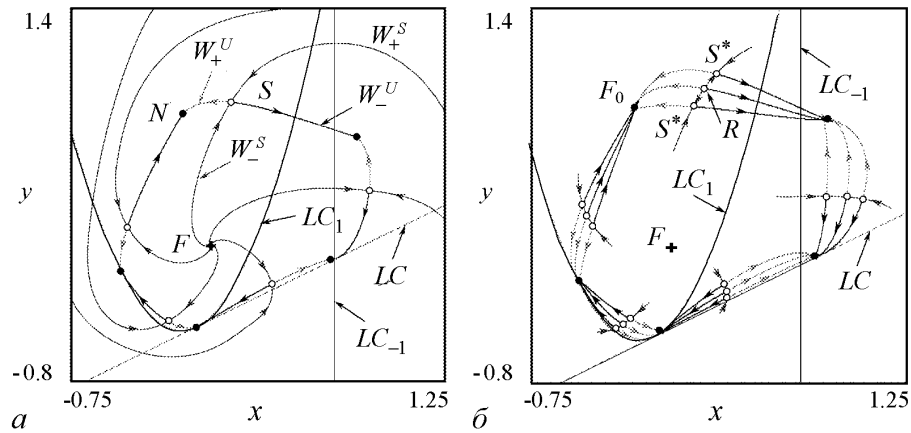


Рис. 3. *a* – «однослойная» замкнутая кривая ($b = 0.54$, $c = 1.32$); N, S – соответственно устойчивый и седловой резонансные циклы; W_{\pm}^S, W_{\pm}^U – устойчивые и неустойчивые многообразия седловой периодической орбиты S . *б* – «трехслойная» инвариантная кривая ($b = 0.54$, $c = 1.375$); F_0 – устойчивый резонансный цикл; R – неустойчивый узловой 5-цикл (репеллер); S^* – седловой 10-цикл, возникающий через бифуркацию удвоения периода

$c = c_{\varphi}$, лежащей на линии N_{φ} , из неподвижной точки O_1 рождается инвариантная кривая T с иррациональным числом вращения, отвечающая квазипериодическому режиму (рис. 2, б).

На рис. 3, *a* изображен фазовый портрет отображения (1) после седло-узловой бифуркации, при которой возникает «однослойная» замкнутая кривая. При дальнейшем увеличении параметра c резонансный цикл сначала переходит из устойчивого узла N в устойчивый фокус F_0 , когда мультипликаторы становятся комплексносопряженными. При этом инвариантный тор теряет гладкость вблизи точек устойчивого цикла. Затем в точке $c = c_2$, как это видно на рис. 2, *a*, мягко возникает неустойчивый 10-цикл через бифуркацию удвоения периода, а седловой 5-цикл становится

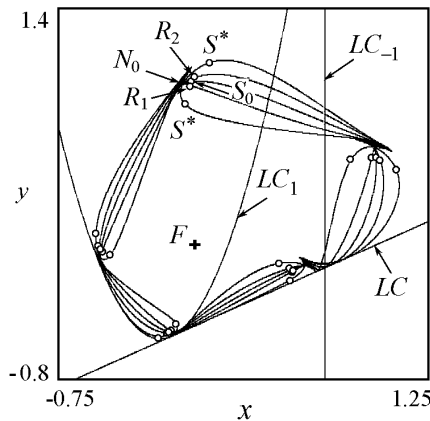


Рис. 4. «Пятислойная» замкнутая кривая ($b = 0.4905$, $c = 1.379$). S_0 – седловой цикл периода 5; N_0 – устойчивый резонансный цикл; R_1, R_2 – неустойчивые циклы периода 5 (репеллеры), возникающие через бифуркацию вилки неустойчивого узла R

неустойчивым узлом R (репеллером). В результате такого перехода из «однослойной» замкнутой инвариантной кривой мягко рождается «трехслойная» (рис. 3, б). Внешние два слоя являются притягивающими и образованы неустойчивыми многообразиями седлового 10-цикла S^* , а внутренний слой – многообразиями неустойчивого узла R , соответствующими большему по модулю мультипликатору.

При изменении параметров «трехслойная» замкнутая кривая может перейти в «пятислойную» следующим образом (рис. 4). При движении по параметрам к левой границе N_+ резонансного языка неустойчивый 5-цикл R претерпевает бифуркацию вилки, в резуль-

тате которой он становится седловым S_0 , а в окрестности R мягко рождается пара неустойчивых симметричных цикла R_1 и R_2 . После этой бифуркации центральный слой вновь становится притягивающим, но возникают два новых «отталкивающих» слоя (рис. 4).

При дальнейшем изменении параметров наблюдается сложная последовательность бифуркаций, приводящая к разрушению инвариантной кривой и возникновению хаотических колебаний. Мы не будем детально обсуждать механизмы разрушения «многослойной» замкнутой инвариантной кривой, а ограничимся рассмотрением лишь двух сценариев, связанных с бифуркацией седло-узел и гомоклинической бифуркацией.

Рис. 5 и рис. 6 иллюстрируют случай, связанный с седло-узловой бифуркацией. Этот переход наблюдается при выходе из резонансного языка через левую границу N_+ . В этом случае сначала «пяцислойная» замкнутая кривая (см. рис. 4) переходит в «трехслойную», когда неустойчивые узлы R_1, R_2 , лежащие на центральном

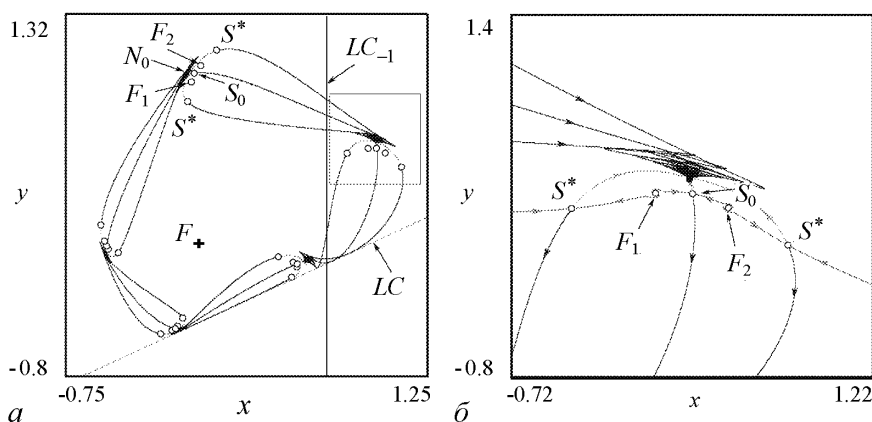


Рис. 5. Переход от «пяцислойной» к «трехслойной» инвариантной кривой. Средние два слоя (см. рис. 4) исчезают, когда неустойчивые узлы R_1 и R_2 становятся неустойчивыми фокусами F_1, F_2

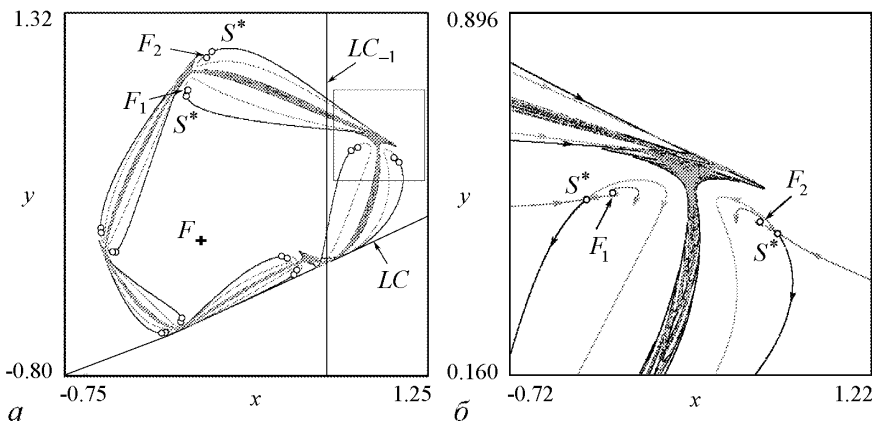


Рис. 6. Фазовый портрет отображения (1) после седло-узловой бифуркации

слое, становятся неустойчивыми фокусами F_1, F_2 . Эта бифуркация проиллюстрирована на рис. 5. Затем седловой цикл S_0 , лежащий на центральном слое, «подтягивается» к устойчивому узловому 5-циклу N_0 , сливается с ним и исчезает на линии N_+ . В результате этого центральный слой «трехслойной» замкнутой кривой исчезает, а неустойчивые многообразия внешних слоев формируют «хаотическое множество», причем, связанные с ними седловая орбита S^* и неустойчивые фокусы F_1, F_2 продолжают существовать (см. рис. 6).

При изменении параметров в направлении правой границы резонансного языка, «пятислойная» инвариантная кривая сначала переходит в «трехслойную» через бифуркацию вилки, а затем реализуются две гомоклинические бифуркации, в результате которых сначала разрушается внешний слой, а затем внутренний.

На рис. 7 изображен момент гомоклинического касания устойчивого и неустойчивого многообразий седловой периодической орбиты S^* . Дальнейшие изменения параметров приводят к рождению гомоклинических точек трансверсального пересечения многообразий (рис. 8, а и рис. 8, б). Как можно видеть из рис. 8 и рис. 9, а, после этой бифуркации внешний слой превращается в довольно сложное множество с фрактальной структурой [4], однако центральный слой продолжает существовать. На рис. 8, в показан отдельно увеличенный фрагмент центрального слоя после гомоклинической бифуркации. Затем седловой 10-цикл S^* претерпевает «обратную» бифуркацию удвоения периода, что приводит к исчезновению внешнего слоя. На рис. 9, а изображен фазовый портрет перед бифуркацией удвоения периода. Рис. 9, б иллюстрирует фазовый портрет после «обратной» бифуркации удвоения периода. На рис. 9, в приведен увеличенный фрагмент «однослойной» замкнутой кривой.

Далее реализуется вторая гомоклиническая бифуркация, приводящая к разрушению «однослойной» инвариантной кривой. После бифуркации седло-узел на границе N_+ резонансного языка движение становится хаотическим. На рис. 10, а показан фазовый портрет после гомоклинической бифуркации, а на рис. 10, б – увеличенный фрагмент фазового портрета.

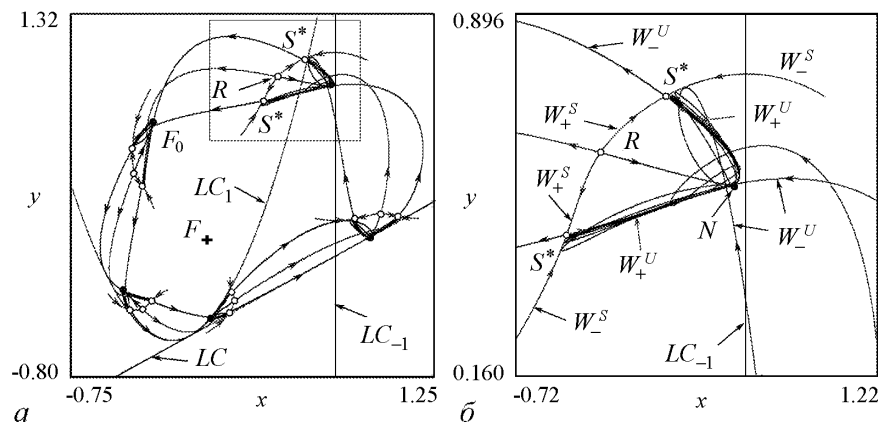


Рис. 7. Разрушение внешнего слоя через гомоклиническую бифуркацию: а – фазовый портрет отображения вблизи гомоклинического касания; б – увеличенный фрагмент фазового портрета, выделенного прямоугольником

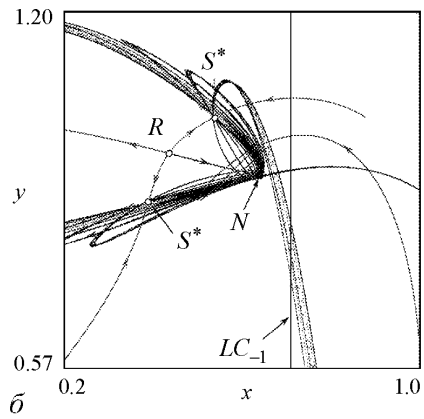
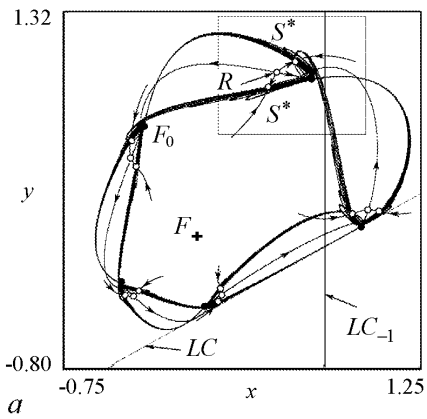


Рис. 8. *a* – фазовый портрет после разрушения внешнего слоя. *б* – увеличенный фрагмент фазового портрета, изображенного на рис. 8, *a*. *в* – центральный слой после гомоклинической бифуркации

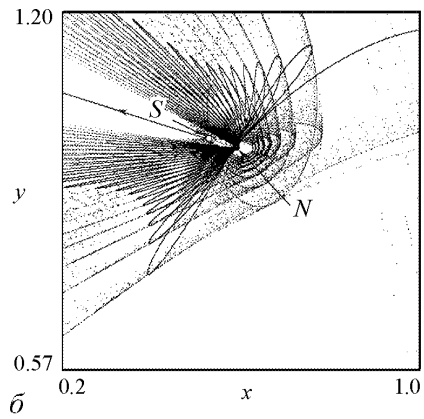
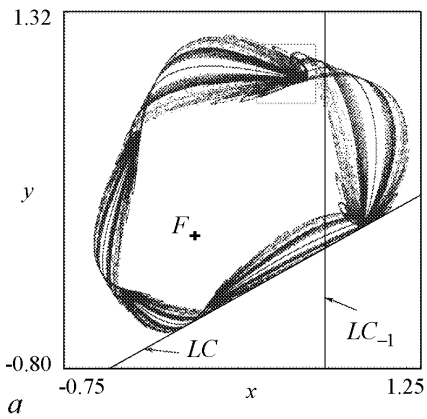
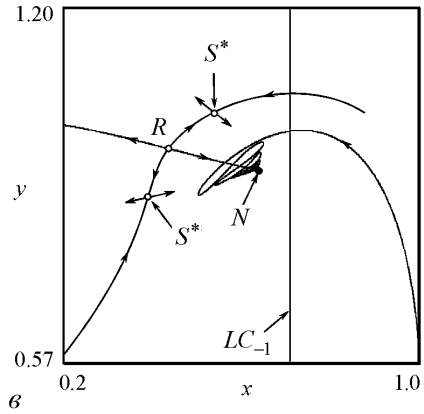
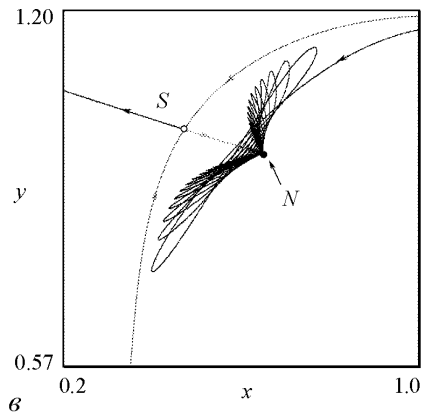


Рис. 9. *a* – фазовый портрет перед «обратной» бифуркацией удвоения периода. *б* – фазовый портрет после бифуркации удвоения периода седлового 10-цикла. *в* – увеличенный фрагмент «однослойной» замкнутой кривой



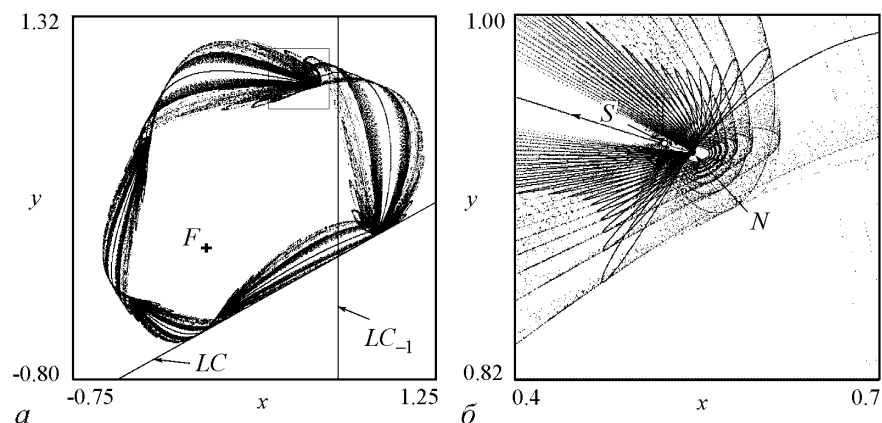


Рис. 10. Разрушение «однослойной» замкнутой кривой через гомоклиническую бифуркацию

Заключение

Представленная статья, как и предыдущие [12–14], посвящена обсуждению бифуркаций замкнутой инвариантной кривой с «многослойной» структурой в двумерных эндоморфизмах. В качестве конкретного примера приведены результаты бифуркационного анализа квадратичного необратимого отображения. В плоскости параметров выделены области с различным динамическим поведением. Показано, что при изменении параметров в пределах резонансного языка, седловая периодическая орбита, лежащая на замкнутой инвариантной кривой, претерпевает бифуркацию удвоения периода, становясь неустойчивым узлом (репеллером). В результате такой бифуркации на этой кривой мягко рождаются два новых «слоя», образованные неустойчивыми многообразиями седлового цикла удвоенного периода. Неустойчивый узловой цикл (репеллер), лежащий на центральном слое, может претерпевать бифуркацию вилки, при которой возникает «пятислойная» замкнутая кривая. При изменении параметров инвариантная кривая разрушается, и при выходе из резонансного языка через линию седло-узловой бифуркации, движение становится хаотическим. Детальное обсуждение механизмов разрушения «многослойной» замкнутой инвариантной кривой требует отдельной статьи. Поэтому, мы ограничились анализом лишь двух сценариев, связанных с гомоклинической бифуркацией и бифуркацией седло-узел.

Вопрос, связан ли описанный феномен в общем случае с необратимостью отображения, остается открытым. Во всяком случае, нам пока не удается доказать это строго и найти примеры диффеоморфизмов, демонстрирующих такое явление.

Библиографический список

1. *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность //Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1983. С. 3.
2. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций //Современные проблемы математики: фундаментальные направления /Под ред. В. И. Арнольда. М.: ВИНТИ, 1986.

3. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Berlin: Springer, 2007.
4. *Maistrenko V., Maistrenko Yu., Mosekilde E.* Torus breakdown in noninvertible maps // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 046215.
5. *Frouzakis C. E., Kevrekidis I. G., Peckham B. B.* A route to computational chaos revisited: noninvertibility and breakup of an invariant circle // *Physica D.* 2003. Vol. 177. P. 101.
6. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise- Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.
7. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., De S., Banerjee S.* Transition from phase-locked dynamics to chaos in a piecewise-linear map // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77. P. 026206.
8. *Lorenz E. N.* Computational chaos – a prelude to computational instability // *Physica D.* 1989. Vol. 35. P. 299.
9. *Krauskopf B., Osinga H. M., Peckham B. B.* Unfolding the cusp-cusp bifurcation of planar endomorphisms // *SIAM J. Applied Dynamical Systems.* 2007. Vol. 6(2). P. 403.
10. *England J. P., Krauskopf B., Osinga H. M.* Bifurcations of stable sets in noninvertible planar maps // *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 2005. Vol. 15. P. 891.
11. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Birth of bilayered torus and torus breakdown in a piecewise-smooth dynamical system // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 351. P. 167.
12. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Formation and destruction of multilayered tori in coupled map systems // *Chaos.* 2008. Vol. 18. P. 037124.
13. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Multilayered tori in a system of two coupled logistic maps // *Phys. Lett. A.* 2009. Vol. 373. P. 946.
14. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Novel routes to chaos through torus breakdown in noninvertible maps // *Physica D.* 2009. Vol. 283. P. 589.
15. *Mira C., Gardini L., Barugols A., Cathala J. C.* Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps. Singapore: World Scientific, 1996.
16. *Frouzakis C. E., Gardini L., Kevrekidis I. G., Millerioux G., Mira C.* On some properties of invariant sets of two-dimensional noninvertible maps // *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 1997. Vol. 7. P. 1167.

*Курский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 15.03.2009
После доработки 04.06.2009*

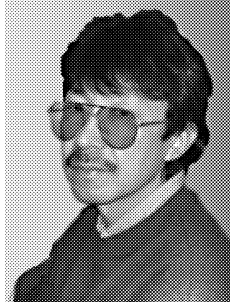
FORMATION AND BREAKDOWN OF A MULTILAYERED CLOSED CURVE IN NONINVERTIBLE MAPS

Z.T. Zhusubaliyev, O.O. Yanochkina

The paper describes the mechanism for the formation of closed invariant curves that are formed as layered structures of several sets of interlacing manifolds each with their associated stable or unstable resonance modes. Such invariant curves can arise, for instance, if the saddle cycle on a «simple resonance curves» undergoes period-doubling or pitchfork bifurcations transversely to the circumference of the closed curve.

Keywords: Two-dimensional endomorphisms, multilayered closed invariant curve, quasi-periodic dynamics.

Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – доктор технических наук, профессор. Окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР) в 1982 г. После окончания института работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. В 1989 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 2002 г. – диссертацию доктора технических наук в области исследования нелинейной динамики и хаоса в импульсных системах автоматического управления. Профессор кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Область научных интересов – теория бифуркаций и динамического хаоса; сложная динамика и хаос в кусочно-гладких динамических системах, импульсных системах управления и вибрационной механике. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати, является соавтором 5 монографий и одного учебного пособия, включая монографию «Zhanybai T. Zhusubaliyev and Erik Mosekilde, Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. World Scientific, 2003». Член Международного общества физики и управления (IPACS).



305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94
Курский государственный технический университет
E-mail: zhanybai@mail.kursk.ru, zhanybai@hotmail.com

Яночкина Ольга Олеговна – окончила машиностроительный факультет Курского государственного технического университета (КурскГТУ) в 2001 г. Инженер кафедры вычислительной техники КурскГТУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория бифуркаций, математическое моделирование импульсных систем автоматического управления. Имеет 11 научных публикаций.



305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94
Курский государственный технический университет
E-mail: yanoolga@gmail.com