



**ХАОС В РАДИОТЕХНИЧЕСКОМ УСТРОЙСТВЕ  
С КВАДРАТИЧНЫМ ФАЗОВЫМ МОДУЛЯТОРОМ  
И ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМ УСИЛЕНИЕМ  
КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА:  
МОДЕЛЬ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ**

*И.В. Измайлов, Б.Н. Пойзнер*

Предпринята попытка выделить класс источников колебаний или волн, принцип действия которых основан на интерференционном усилении сигнала обратной связи входным сигналом. Прецедентом здесь служит оптическая система Икеды. Предложен радиоэлектронный аналог нелинейного кольцевого интерферометра и его модификация. Построены структурные схемы и математические модели. Проведено компьютерное моделирование. Обнаружены перемежаемость, хаотические, регулярные, статические режимы.

*Ключевые слова:* Интерференционное усиление, запаздывающая обратная связь, бифуркация, хаос, перемежаемость, статическое состояние.

### Введение

В 2009 году исполнилось 30 лет публикации статьи К. Икеды с коллегами [1], посвященной описанию неустойчивости (позднее получившей имя Икеды), которая способна возникать в кольцевом интерферометре, содержащем нелинейную поглощающую среду, если через интерферометр распространяется лазерное излучение. Это устройство и его математическая модель составили один из «эталонных» («канонических») сюжетов теории хаотических автоколебаний [2, с. 367–472; 3, с. 317–318; 4, с. 71–73], причем дискретное отображение, описывающее динамику комплексной амплитуды поля в кольцевом интерферометре с нелинейной (керровской, то есть проявляющей зависимость показателя преломления от среднего квадрата напряженности светового поля) средой, также носит имя К. Икеды [4, с. 71–73].

Теоретическое и экспериментальное изучение сложной динамики в нелинейном кольцевом интерферометре (НКИ) развернулось в 1990-е годы (например, [5]). Многообразие нелинейных феноменов в НКИ, дополненное в цепи обратной связи

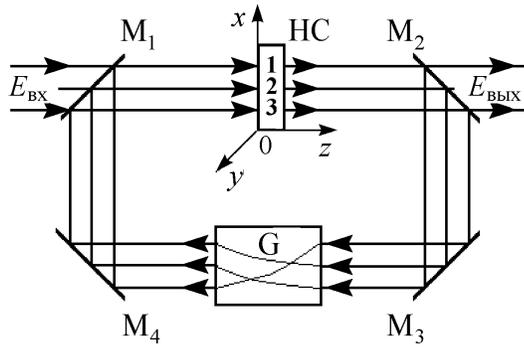


Рис. 1. Схематическое изображение нелинейного кольцевого интерферометра. Ход лучей в НКИ показан для случая поворота пучка (элементом G) в плоскости  $xOy$  на  $120^\circ$ . Приняты следующие обозначения: НС – нелинейная среда; G – линейный элемент, производящий крупномасштабное преобразование поля;  $M_i$  – зеркала

важной проблемы управления детерминированным хаосом в «двухконтурной» системе Икеды [9, 10]. Вопросам применения хаоса в НКИ с насыщающимся поглотителем посвящена работа [11]. Самоорганизацию в НКИ при некогерентном освещении (например, упорядочение пространственных солитонов в поперечной плоскости фоторефрактивного кристалла) обсуждают авторы статей [12–14]. Хаос в НКИ Икеды, модифицированном С.А. Ахмановым и М.А. Воронцовым, стал содержанием вычислительных экспериментов в книге [15]. В ней также рассмотрен двухконтурный НКИ, который более перспективен как основа устройства шифрования [16].

Во многих отмеченных выше работах показано, что кольцевой интерферометр (см. рис. 1) с керровской нелинейной средой (НС) способен формировать в поперечном сечении лазерного пучка различные статические или динамические структуры, а также (при определенных условиях) – детерминированный хаос: оптическую турбулентность либо «пространственный» хаос. Модель динамики нелинейного фазового набегу  $U$  лазерного пучка в керровской НС в кольцевом интерферометре имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_n dU(\mathbf{r}, t)/dt &= D_e \Delta_{xy} U(\mathbf{r}, t) - U(\mathbf{r}, t) + K A_{\text{НС}}^2(\mathbf{r}, t)/(1 - R), \\ A_{\text{НС}}^2(\mathbf{r}, t) &= (1 - R) A^2(\mathbf{r}, t) + 0.25 \gamma^2 A_{\text{НС}}^2(\mathbf{r}', t - \tau) + \\ &+ (1 - R)^{0.5} \gamma A(\mathbf{r}, t) A_{\text{НС}}(\mathbf{r}', t - \tau) \cos[\omega\tau + \varphi(\mathbf{r}, t) - \varphi_{\text{НС}}(\mathbf{r}', t - \tau)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r} \equiv (x, y)$  – радиус-вектор поперечного сечения  $xOy$ ;  $\tau_n$  – время релаксации нелинейной части показателя преломления нелинейной среды протяженностью  $L$ ;  $D_e$  – нормированный коэффициент диффузии молекул нелинейной среды;  $K = (1 - R)n_2 L k A_{\text{макс}}(x, y, t)$  – параметр, определяющий силу нелинейных эффектов;  $n_2$  – параметр нелинейной рефракции;  $|k| = \omega/c$  – волновое число;  $A_{\text{макс}}(x, y, t)$  – максимальное значение амплитуды входного поля;  $A_{\text{НС}}$ ,  $A$  – амплитуды поля на входе НС и НКИ, соответственно, нормированные к значению  $A_{\text{макс}}(x, y, t)$ ;  $\varphi_{\text{НС}}$ ,  $\varphi$  – фазы поля на входе НС и НКИ, соответственно;  $\tau \equiv \tau(\mathbf{r}', t) = t_e(\mathbf{r}', t) + U(\mathbf{r}', t - t_e(\mathbf{r}', t))/\omega$ ;  $t_e$  – эквивалентное время запаздывания в НКИ;  $\gamma$  – удвоенный коэффициент передачи поля (по амплитуде) за один обход НКИ полем через контур обратной связи.

линейным элементом крупномасштабного пространственного преобразования светового пучка (G на рис. 1), исследовалось оптиками из МГУ, когда изменение светового поля в НКИ моделировалось преимущественно в приближении больших потерь (например, [6, 7]). Многосторонний анализ физических аспектов устойчивости и оптической бистабильности в НКИ выполнен Н.Н. Розановым в монографии [8]. Связанные отображения Икеды исследовались Н.М. Рыскиным с коллегами применительно к случаям многочастотного и двухчастотного внешнего воздействия на НКИ, что способствовало решению

Несмотря на многолетнее внимание к оптической системе, предложенной К. Икедой, и ее модификациям, в литературе, насколько известно авторам, не ставился вопрос о переносе принципов функционирования НКИ в радиодиапазон. Иначе говоря, предлагается рассмотреть вопрос о более низкочастотных (радиотехнических, СВЧ) аналогах этих систем. Не исключено, что такой перенос принципов приведет к появлению отдельного класса устройств, способных генерировать регулярные и хаотические режимы динамики.

### 1. Математическое описание функционального аналога нелинейного кольцевого интерферометра и его модификации

В качестве прототипа выберем НКИ с керровской нелинейной средой. В приближении, когда входной пучок однороден, отсутствуют диффузия молекул в нелинейной среде и крупномасштабное преобразование поля в НКИ [15], функциональным аналогом НКИ служит радиофизическое устройство (рис. 2) [17]. Блок « $A, A^2$ » представляет собой комбинацию амплитудного детектора и схему возведения в квадрат, а блок « $t_e$ » есть линия задержки с малой дисперсией. Блоки « $A, A^2$ », «ФНЧ», « $\alpha$ » и «Фазовый модулятор» образуют аналог керровской среды в НКИ. Динамика сдвига фазы  $\theta$  (в блоке «Фазовый модулятор») в устройстве на рис. 2 имеет вид

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a (A/A_{\text{вх макс}})^2, \quad (2)$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V(t - \tau),$$

где  $K_a = \alpha\beta A_{\text{вх макс}}^2$  – коэффициент нелинейности;  $V$  – напряжение на выходе сумматора;  $V_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}}(t) \cos(\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t))$  – входной сигнал;  $\tau \equiv \tau(t) = t_e + \theta(t - t_e)/\omega$ ;  $\gamma_a$  – амплитудный коэффициент передачи сигнала за один обход системы (например, от входа фазового модулятора – через контур обратной связи – до его же входа);  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий эффективность выпрямителя и коэффициент передачи умножителя;  $\beta$  – крутизна преобразования электрического напряжения в сдвиг фазы (размерность – рад/В);  $t_e$  – эквивалентное время запаздывания сигнала.

Наша практическая реализация функционального аналога НКИ отличается от устройства на рис. 2 наличием между блоками « $A$ » и « $A^2$ » фильтра высоких частот ( $CR$ -фильтра) с постоянной времени  $\tau_{\text{ФВЧ}}$ . Такая конструкция позволяет уменьшить вероятность выхода управляющего сигнала фазового модулятора за динамический

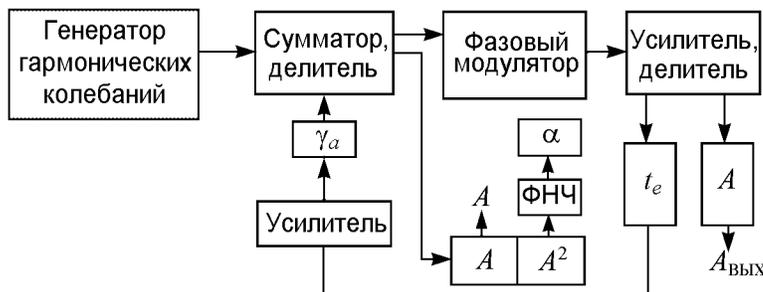


Рис. 2. Блок-схема источника регулярных и хаотических колебаний, генетически восходящего к НКИ

диапазон. Следовательно, модель динамики сдвига фазы  $\theta$  в построенном устройстве отличается от модели (2)

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a[(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}]^2,$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V(t - \tau), \quad (3)$$

$$\tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + A,$$

где  $U_c$  – напряжение на конденсаторе  $CR$ -фильтра.

Чтобы яснее описать отличие модели (3) от (2), упростим модель (3). Пусть в системе установился процесс с неизменными характеристиками и пусть существует  $\Delta t$  такое, что  $\tau_{\text{ФВЧ}} \gg \Delta t \gg \tau_n$ , или даже  $\tau_{\text{ФВЧ}} \gg \Delta t \gg (\tau_n + t_e)$ .

Усредним дифференциальное уравнение для  $U_c$  по промежутку времени  $\Delta t$  и получим:  $\tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + \langle A \rangle_{\Delta t}$ , где  $\langle A \rangle_{\Delta t} \equiv \int_t^{t+\Delta t} A(t') dt' / \Delta t$ . В силу условия  $\Delta t \gg \tau_n$  можно принять, что  $\langle A \rangle_{\Delta t} = \text{const} \equiv \langle A \rangle$ . Тогда  $\tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + \langle A \rangle$  и, следовательно, при  $t \gg \tau_{\text{ФВЧ}}$  верно равенство  $U_c = \langle A \rangle = \text{const}$ . Модель (3) преобразуется к виду

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a[(A - \langle A \rangle)/A_{\text{вх макс}}]^2,$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V(t - \tau).$$

В рассматриваемом случае сдвиг фазы можно представить в виде суммы постоянной и переменной составляющих  $\theta = \theta_- + \theta_{\sim}$ . Тогда окончательно получим

$$\tau_n d\theta_{\sim}/dt = -\theta_{\sim} + K_a(A/A_{\text{вх макс}})^2 - 2K_a A \langle A \rangle / A_{\text{вх макс}}^2,$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V(t - \tau), \quad (4)$$

$$\theta = \theta_- + \theta_{\sim}, \quad \theta_- = K_a(\langle A \rangle / A_{\text{вх макс}})^2.$$

Заметим, что, если бы не член  $(-2K_a A \langle A \rangle / A_{\text{вх макс}}^2)$ , то динамика  $\theta_{\sim}$  в этой модели (4) совпала бы с динамикой  $\theta$  в модели (2), если в последней увеличить значение времени запаздывания  $t_e$  на величину  $\theta_- = K_a(\langle A \rangle / A_{\text{вх макс}})^2 / \omega$ . Следует помнить, что модель (4) не описывает процесс установления режима в системе. Поскольку значение  $\langle A \rangle$  априори не известно, то для проведения вычислительного эксперимента удобнее использовать модель (3).

Однако, если в модели (4) величину  $\langle A \rangle$  рассчитывать (оценивать) по формуле  $\langle A \rangle \equiv \int_0^t A(t') dt' / t$ , и если предел  $\langle A \rangle$  при  $t \rightarrow \infty$  существует, то, очевидно, установившийся режим в модели (4) должен соответствовать некоторому установившемуся режиму в модели (3). Иными словами, фазовые траектории в моделях (3) и (4) принадлежат одному и тому же аттрактору. В этом случае (4) вполне пригодна для моделирования процессов в предлагаемом устройстве – вместо (3). Вероятно, в ряде случаев величину  $\langle A \rangle$  можно оценить как  $\langle A_{\text{вх}} \rangle$ .

Продолжая анализ отличий модели (3) от (2), обратим внимание на несходство структур бифуркационных диаграмм статических состояний ( $d\theta/dt = 0$  для модели (2),  $dU_c/dt = 0$  и  $d\theta/dt = 0$  для модели (3)). Бифуркационная диаграмма для

модели (2) подобна изображенной на рис. 3 – всего лишь подобна, но не идентична, так как диаграмма для НКИ на рис. 3 построена в приближении больших потерь. На ней присутствуют разрывные бифуркации числа решений и бифуркация потери устойчивости (обозначены на рис. цифрами 1, 2 и 3, соответственно).

В модели же (3) всегда существует лишь единственное статическое решение:  $\theta = 0$ ,  $U_c = 0$ . Следовательно, бифуркаций числа статических решений в ней быть не может. Тогда логично выяснить, возможны ли бифуркации устойчивости этого статического состояния ( $\theta = 0$ ,  $U_c = 0$ )?

Для простоты рассмотрим модель (3) в приближении малых  $\gamma_a$  ( $\gamma_a \gg \gamma_a^2 \approx 0$ ):  $V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a [V_{\text{вх}}(t - \tau) + \gamma_a V(t - \tau(t) - \tau(t - \tau(t)))] \approx V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V_{\text{вх}}(t - \tau)$ . Следовательно, (3) преобразуется к модели

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a [(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}]^2,$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V_{\text{вх}}(t - \tau), \quad (5)$$

$$\tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + A.$$

По аналогии со случаем НКИ [15] модель (5) можно назвать моделью в приближении *одного прохода* поля в контуре обратной связи. Преобразуя (5) к более простому виду, возведем в квадрат выражение для  $V(t)$  и получим

$$\begin{aligned} A^2(t) \cos^2[\omega t + \varphi(t)] &= A_{\text{вх}}^2(t) \cos^2[\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t)] + \\ &+ 2\gamma_a A_{\text{вх}}(t) A_{\text{вх}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t)] \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_{\text{вх}}(t - \tau)] + \\ &+ \gamma_a^2 A_{\text{вх}}^2(t - \tau) \cos^2[\omega(t - \tau) + \varphi_{\text{вх}}(t - \tau)] \approx A_{\text{вх}}^2(t) \cos^2[\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t)] + \\ &+ 2\gamma_a A_{\text{вх}}(t) A_{\text{вх}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t)] \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_{\text{вх}}(t - \tau)]. \end{aligned}$$

Здесь выражение после символа « $\approx$ » соответствует приближению больших потерь, накладывающему более сильное условие на  $\gamma_a$ , чем это было в приближении одного прохода (см. запись до символа « $\approx$ »).

Усредним эти равенства по отрезку времени, равному периоду высокочастотных колебаний  $T = 2\pi/\omega$ . При этом используем приближение медленного изменения

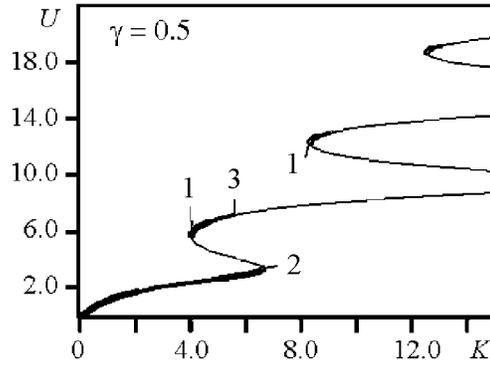


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы статических состояний нелинейного фазового набегания в нелинейной среде НКИ в приближении больших потерь при  $t_e = \tau_n$ . Жирные линии отображают состояния, устойчивые при любых  $t_e$ , линии средней толщины – состояния, устойчивые при данном  $t_e$ , тонкие линии – неустойчивые состояния [15]

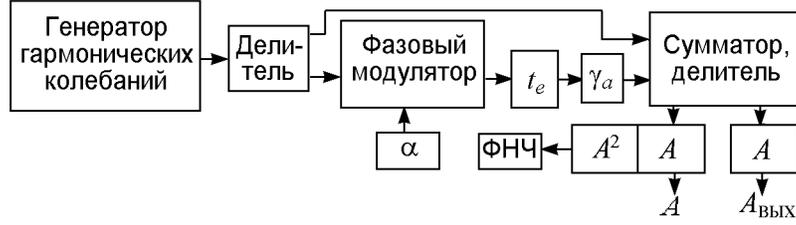


Рис. 4. Блок-схема источника регулярных и хаотических колебаний, реализующего приближение одного прохода в модели (6)

амплитуды, фазы входного поля и сдвига фазы  $\theta$ . Получим, что

$$\begin{aligned} A^2(t) &= A_{\text{ВХ}}^2(t) + 2\gamma_a A_{\text{ВХ}}(t) A_{\text{ВХ}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \\ &\quad - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)] + \gamma_a^2 A_{\text{ВХ}}^2(t - \tau) \approx \\ &\approx A_{\text{ВХ}}^2(t) + 2\gamma_a^2 A_{\text{ВХ}}(t) A_{\text{ВХ}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)]. \end{aligned}$$

Следовательно, (5) примет вид

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a[(A - U_c)/A_{\text{ВХ МАКС}}]^2, \quad \tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + A,$$

$$\begin{aligned} A^2(t) &= A_{\text{ВХ}}^2(t) + 2\gamma_a A_{\text{ВХ}}(t) A_{\text{ВХ}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \\ &\quad - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)] + \gamma_a^2 A_{\text{ВХ}}^2(t - \tau) \approx \\ &\approx A_{\text{ВХ}}^2(t) + 2\gamma_a^2 A_{\text{ВХ}}(t) A_{\text{ВХ}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Напомним, что здесь  $\tau \equiv \tau(t) = t_e + \theta(t - t_e)/\omega$ ,  $t_e$  – эквивалентное время запаздывания сигнала. Подчеркнем, что приближению одного прохода в модели (6) строго соответствует устройство, построенное согласно блок-схеме на рис. 4.

Линеаризуем систему уравнений (6) около траектории  $\{\theta_0(t), U_{c0}(t)\}$ . Для этого, пренебрегая членами при множителях  $(A_{\text{ВХ}})'_t/\omega$ ,  $(\varphi_{\text{ВХ}})'_t/\omega$ , найдем производные

$$\tau_n \partial[d\theta/dt]/\partial\theta = -1 + 2K_a[(A - U_c)/A_{\text{ВХ МАКС}}^2] \partial A/\partial\theta,$$

$$\tau_n \partial[d\theta/dt]/\partial U_c = -2K_a(A - U_c)/A_{\text{ВХ МАКС}}^2,$$

$$\tau_{\text{ФВЧ}} \partial[dU_c/dt]/\partial\theta = \partial A/\partial\theta,$$

$$\tau_{\text{ФВЧ}} \partial[dU_c/dt]/\partial U_c = -1, \quad (7)$$

$$\partial A/\partial\theta = |A = (A^2)^{0.5}| =$$

$$= -\gamma_a [A_{\text{ВХ}}(t) A_{\text{ВХ}}(t - \tau)/A(t)] [\partial\theta(t - t_e)/\partial\theta(t)] \times$$

$$\times \sin[\omega t_e + \theta(t - t_e) + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)].$$

С учетом полученных выражений линеаризованная около траектории  $\{\theta_0(t), U_{c0}(t)\}$  система примет вид

$$\begin{aligned}\tau_n d\theta/dt &= -\{1 - 2K_a[(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2] \partial A/\partial \theta\}[\theta(t) - \theta_0(t)] - \\ &\quad - 2K_a(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2 [U_c(t) - U_{c0}(t)], \\ \tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt &= (\partial A/\partial \theta)[\theta(t) - \theta_0(t)] - [U_c(t) - U_{c0}(t)].\end{aligned}$$

Тогда имеем уравнение для собственных значений  $\lambda$ :

$$\begin{vmatrix} -\{1 - 2K_a[(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2] \partial A/\partial \theta\} - \lambda & -2K_a(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2 \\ \partial A/\partial \theta & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или, вводя обозначение  $W \equiv K_a \cdot [(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2] \partial A/\partial \theta$ , перепишем его

$$\begin{vmatrix} 1 - 2W + \lambda & 2W/(\partial A/\partial \theta) \\ -\partial A/\partial \theta & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda\{1 - 2W + 1\} + 1 - 2W + 2W = 0.$$

Отсюда имеем

$$\lambda = W - 1 \pm [W(W - 2)^{0.5}]. \quad (8)$$

Обратимся к статическому решению  $\theta = 0, U_c = A$ . Будем считать неизменными во времени все параметры входного сигнала устройства и параметры самого устройства. Подставим значения  $\theta = 0, U_c = A$  вместо  $\theta_0(t), U_{c0}(t)$  в выражение для  $W$  и получим:  $W = 0$ . Тогда из (8) следует, что  $\lambda = -1$  – исследуемое решение *всегда устойчиво*.

## 2. Численное исследование поведения модификации функционального аналога НКИ

Для изучения особенностей процессов в устройствах на рис. 2 и 4 предпринято компьютерное моделирование, данные которого приводятся ниже.

Моделирование подтверждает наличие устойчивого статического состояния:  $\theta = 0, U_c = A$  (при любых значениях параметров модели) не только для системы (6), но и для системы (3). Если в вычислительном эксперименте выбором должных начальных условий «поместить» систему в это состояние, то она не покидает его со временем; если же «поместить» ее в малую окрестность состояния  $\theta = 0, U_c = A$ , то система сходится к нему. При этом с ростом коэффициента нелинейности  $K_a$  размеры бассейна притяжения статического состояния уменьшаются.

Если начальные условия достаточно сильно отличаются от состояния  $\theta = 0, U_c = A$ , то, начиная с некоторого значения коэффициента нелинейности  $K_a$  (при заданных величинах амплитудного коэффициента передачи сигнала  $\gamma_a$ , времени запаздывания  $t_e$  и фазовой задержки  $\omega t_e$  в контуре обратной связи), наблюдаются динамические режимы. Их отображают рис. 5 – 13, где  $\tau_{\text{ФВЧ}} = 300\tau_n, \gamma_a = 0.25, \omega t_e = 0, A_{\text{вх}} = 0.5^{0.5} \approx 0.7$ .

Влияние нелинейности, запаздывания, числа проходов сигнала в системе и числа ее идентичных подсистем на динамику в модификации функционального аналога НКИ демонстрируют серии экспериментов. Их результаты представлены на рис. 5 – 19, содержащих временные реализации и фазовые портреты. На них – при наличии градаций серого цвета – более темные участки соответствуют более длительному пребыванию системы в окрестности данной точки (в фазовом пространстве).

Моделирование показывает: при относительно низких значениях  $K_a$  (50... 81.847) модификация функционального аналога НКИ с учетом многих проходов (3) сходится к состоянию  $\theta = 0$ ,  $U_c = A$ . Но уже при  $K_a = 81.85$  наступает хаос, который выглядит как перемежаемость без ламинарной фазы (см. рис. 5). Подобный вид аттрактора сохраняется до значений  $K_a = 85.5$ , а при  $K_a = 86.0$  возникает предельный цикл (рис. 6, а), который сохраняет свои черты до  $K_a = 100.0$ , затем претерпевает ряд бифуркаций (утроения и удвоения) периода (рис. 6). Далее, при  $K_a = 129.0$  возникает режим, который можно назвать «хаосом смещающегося предельного цикла» (см. рис. 7). Эта ассоциация возникает при наблюдении за построением фазового портрета на рис. 7. Ее подкрепляет и вид временной динамики  $U_c$ : медленный дрейф среднего значения  $U_c$  диктует *смещения* первоначально существовавшего предельного цикла. Затем структура этого аттрактора сложным образом меняется с ростом  $K_a$ .

На наш взгляд, нетривиальное следствие роста запаздывания  $t_e$  демонстрирует рис. 8: в отличие от рис. 6, б наблюдается хаос с «квазиламинарными» стадиями (см. центр рис. 8), характерными для режимов с перемежаемостью (intermittency) [18]. Ограничение же одним проходом сигнала через контур обратной связи (см. рис. 9) – несмотря на уменьшение  $t_e$  – повышает вероятность «квазиламинарных» стадий.

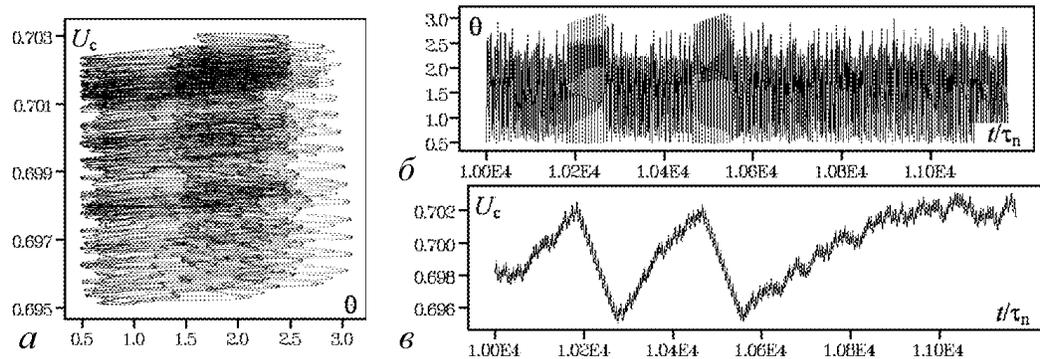


Рис. 5. Хаотическая динамика с чертами перемежаемости в системе (3) при  $K_a = 81.9$  и  $t_e = \tau_n$ . Фазовый портрет (а), временные реализации (б, в)

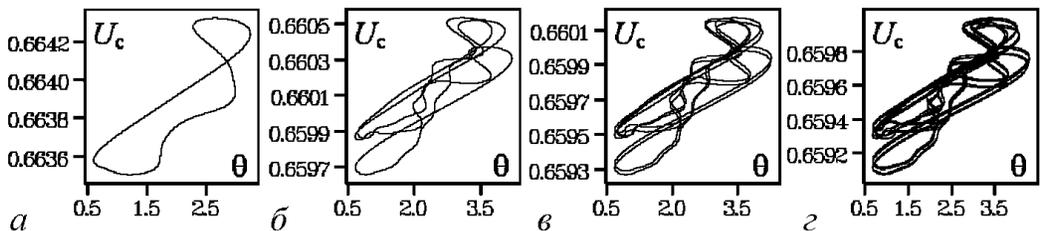


Рис. 6. Последовательность бифуркаций предельных циклов в системе (3) с ростом  $K_a$ : 86.0 (а), 125.0 (б), 127.0 (в), 128.0 (г) при  $t_e = \tau_n$

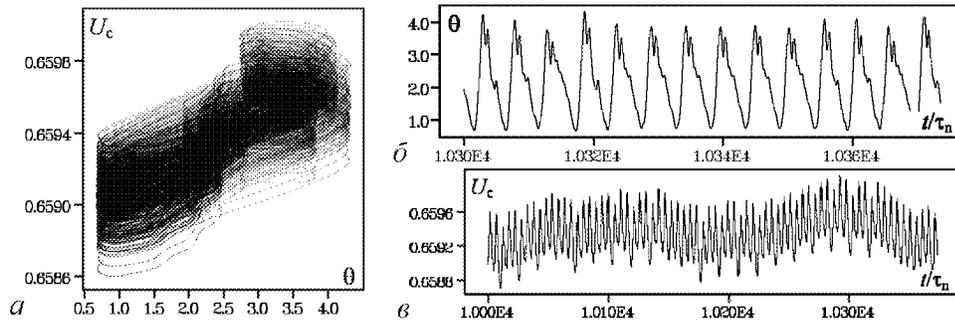


Рис. 7. «Хаос смещающегося предельного цикла» в системе (3) при  $K_a = 129.0$  и  $t_e = \tau_n$ . Фазовый портрет (а), временные реализации (б, в)

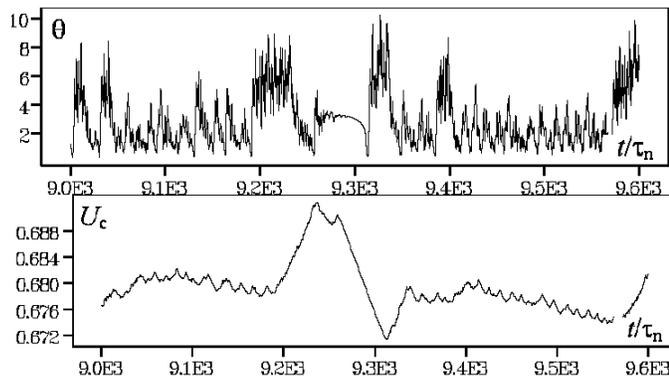


Рис. 8. Хаотическая динамика в системе (3) при  $K_a = 125.0$  и  $t_e = 2\tau_n$ . В центре графиков расположена «квазиламинарная» стадия

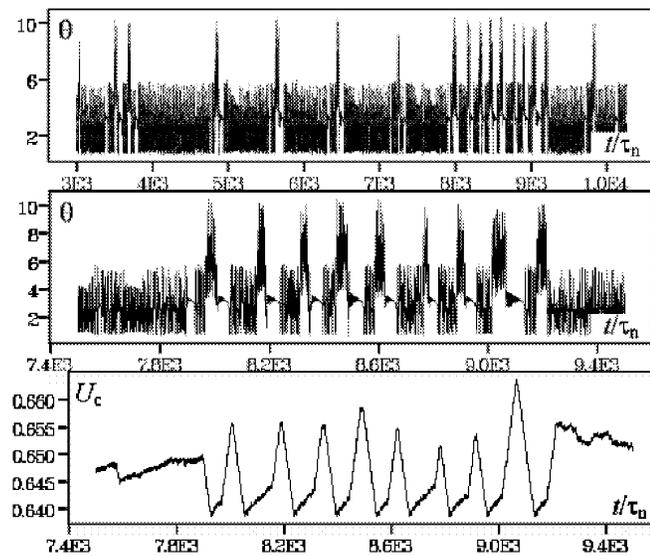


Рис. 9. Хаотическая динамика в системе (3) в приближении одного прохода при  $K_a = 125.0$  и  $t_e = \tau_n$ . «Квазиламинарные» стадии идут спорадически: и по отдельности, и нерегулярными сериями. На среднем и нижнем графиках серия показана в увеличенном виде

Рис. 10–19 отражают моделирование явлений в «двухточечной» модификации системы (3) при  $K_a = 250$ , построенной по аналогии с НКИ, в котором реализуется поворот оптического поля на  $180^\circ$  [4, с. 52]. Прилагательное «двухточечная» означает наличие двух систем типа изображенных на рис. 2, причем сигнал с выхода первой системы поступает – через линию задержки – на вход сумматора второй системы (а не первой) и vice versa. Характерно, что при  $t_e \leq 0.002\tau_n$  наблюдается «каскадная» (иначе говоря, «многостадийная») периодическая динамика (рис. 10). Строение фазовых портретов (а) и временных реализаций (б, в) позволяет предположить: здесь предельный цикл образован – в отличие от классической петли сепаратрисы седло-фокуса [15, с. 103] – каскадом восьми петель. Период составляет около  $1500\tau_n$ .

Рост запаздывания ( $t_e = 0.01\tau_n$ ) приводит к уменьшению устойчивости седло-фокусов. А это увеличивает долю времени, приходящуюся на затухающие высокочастотные колебания (рис. 11). Дальнейший рост запаздывания ( $t_e = 0.027\tau_n$ ) влечет перекрытие областей затухающих высокочастотных колебаний. Временная реализация на рис. 12 ( $t_e = 0.02782\tau_n$ ) демонстрирует (неравномерностью оттенков серого цвета) усложнение формы релаксационных колебаний за счет автомодуляции. Незначительное увеличение запаздывания ( $t_e = 0.027823\tau_n$ ) оборачивается разрушением предельного цикла, построенного на петлях (рис. 12), и возникновением более простого (рис. 13), но наследующего некоторые морфологические черты его предшественника. Фазовый портрет  $\theta_2(\theta_1)$  на рис. 13 воспроизводит фрагмент контура половины портрета  $\theta_2(\theta_1)$  на рис. 12, расположенной выше диагонали  $\theta_2 = \theta_1$ . Заметим, что соображения симметрии заставляют предположить существование «комплементарного» ему цикла ниже диагонали  $\theta_2 = \theta_1$ .

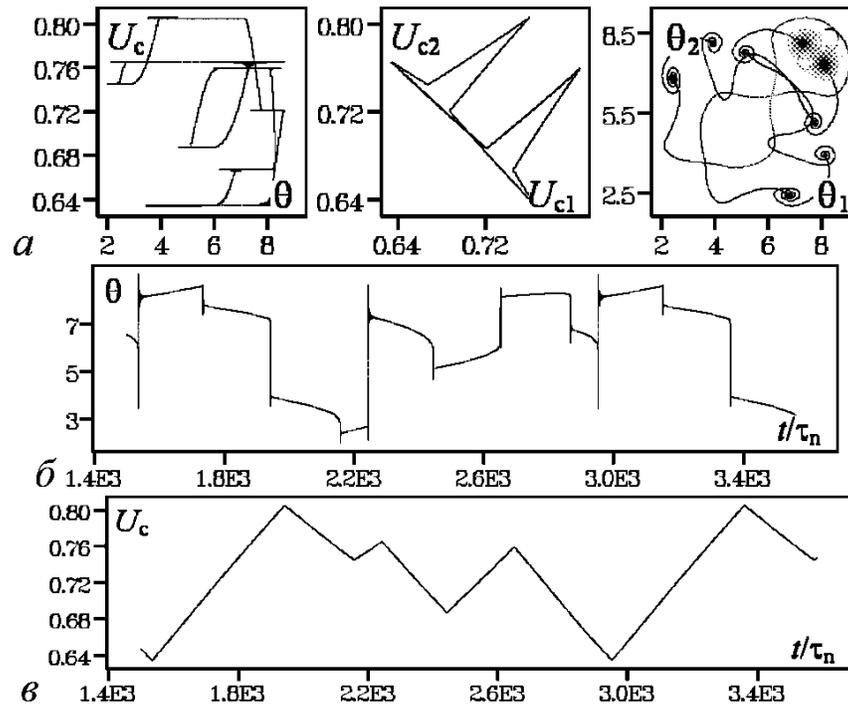


Рис. 10. «Каскадная» периодическая динамика в «двухточечной» модификации системы (3) при  $K_a = 250.0$  и  $t_e = 0.002\tau_n$ : фазовые портреты (а), временные реализации (б, в)

Дальнейший рост запаздывания ( $t_e = 0.0295\tau_n$ ) рождает режим, названный выше «хаосом смещающегося предельного цикла» (рис. 14). Такой образ навеяют – подобно рис. 7 – как наблюдения (и на промежутке времени  $3980\tau_n - 4100\tau_n$ , и на промежутке  $4100\tau_n - 14000\tau_n$ ) за построением фазовых портретов  $U_c(\theta)$  и  $U_{c2}(U_{c1})$ , так и их окончательный вид. Казалось бы, режим мог представлять собой эргодический тор, но сечение этого предельного цикла неизменно, что препятствует отождествлению его с тором. Судя по временной реализации, здесь динамика  $\theta_1, \theta_2$  весьма близка к регулярной; поведение же  $U_{ci}$  вносит хаотический ритм. В частности,

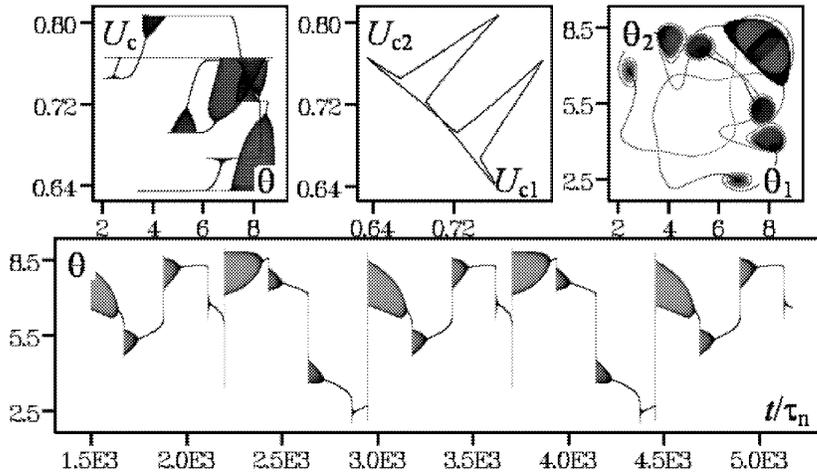


Рис. 11. «Каскадная» периодическая динамика в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 10 здесь  $t_e = 0.01\tau_n$

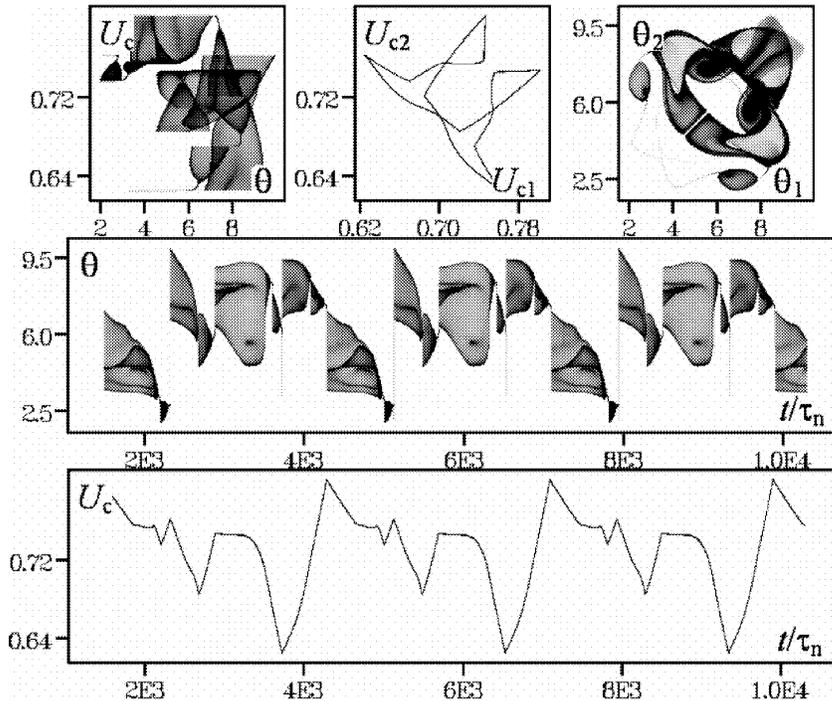


Рис. 12. «Каскадная» периодическая динамика в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 11 здесь  $t_e = 0.02782\tau_n$

это выражается в нерегулярной скорости движения фазовой точки по проекции на плоскости  $\theta_1 O \theta_2$ .

Динамика при  $t_e = 0.03\tau_n$  побуждает аттестовать режим неологизмом «хаос прыгающего и смещающегося предельного цикла». Как явствует из рис. 15, на сохранившееся «блуждание» накладываются нерегулярные всплески напряжения  $U_c$ , влияющие, в свою очередь, на  $\theta$  et vice versa. Визуально это выражается в прыжках предельного цикла  $U_c(\theta)$ , а на портрете  $\theta_2(\theta_1)$  формируется относительно редко посещаемая дуга, примыкающая к диагонали  $\theta_2 = \theta_1$  (см. рис. 15). Степень струк-

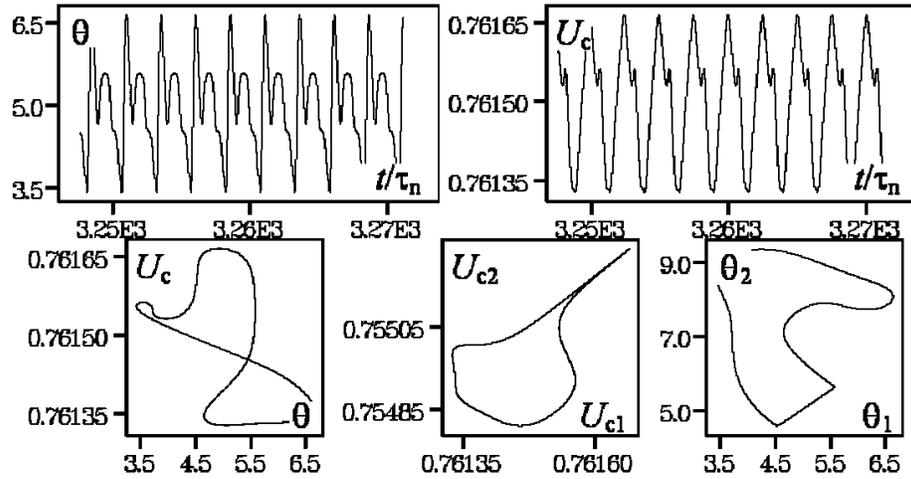


Рис. 13. Периодическая динамика в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 12 здесь  $t_e = 0.027823\tau_n$

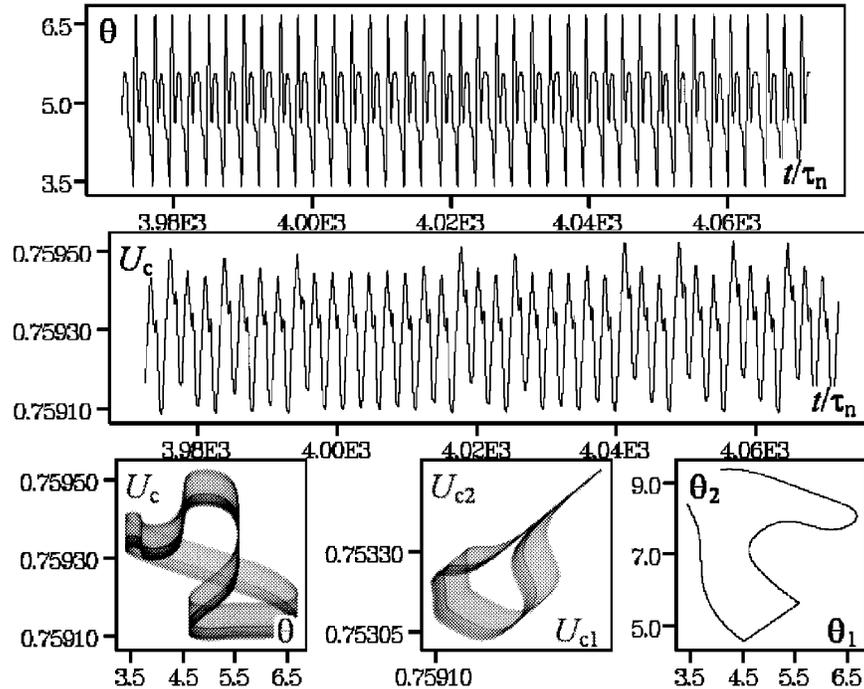


Рис. 14. «Хаос смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 13 здесь  $t_e = 0.0295\tau_n$

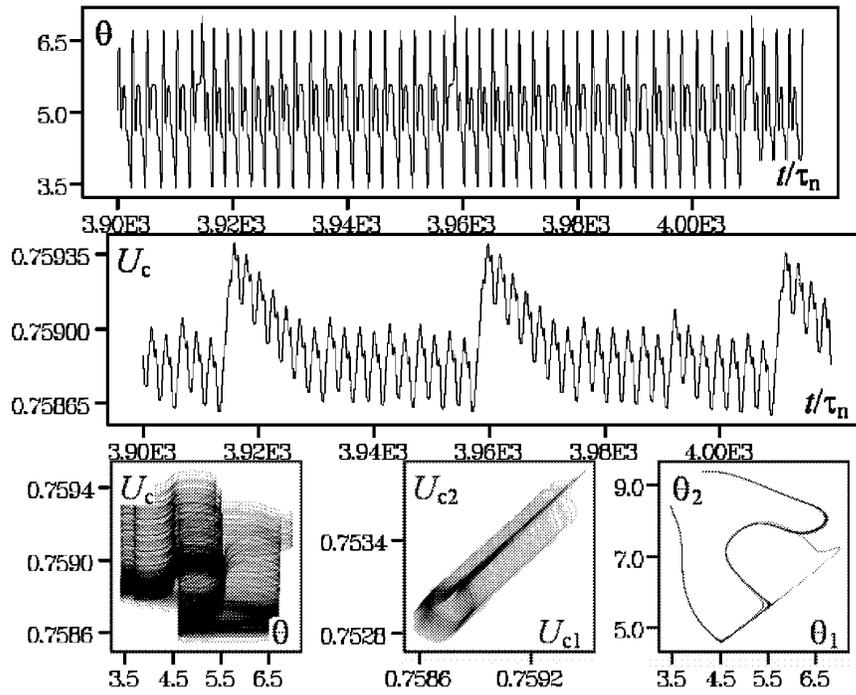


Рис. 15. «Хаос прыгающего и смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 14 здесь  $t_e = 0.03\tau_n$

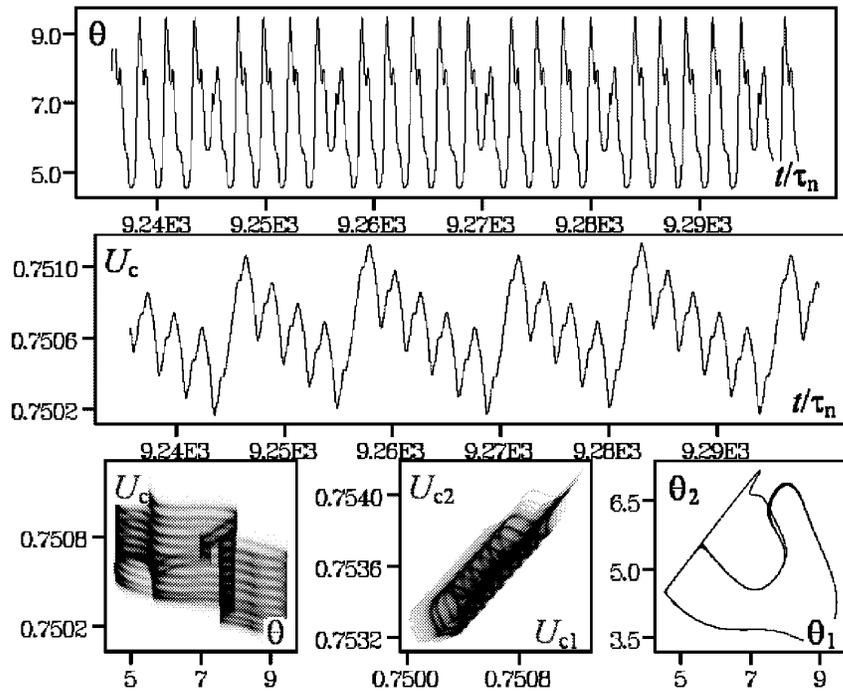


Рис. 16. Рост степени структурности аттрактора типа «хаоса прыгающего и смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 15 здесь  $t_e = 0.035\tau_n$

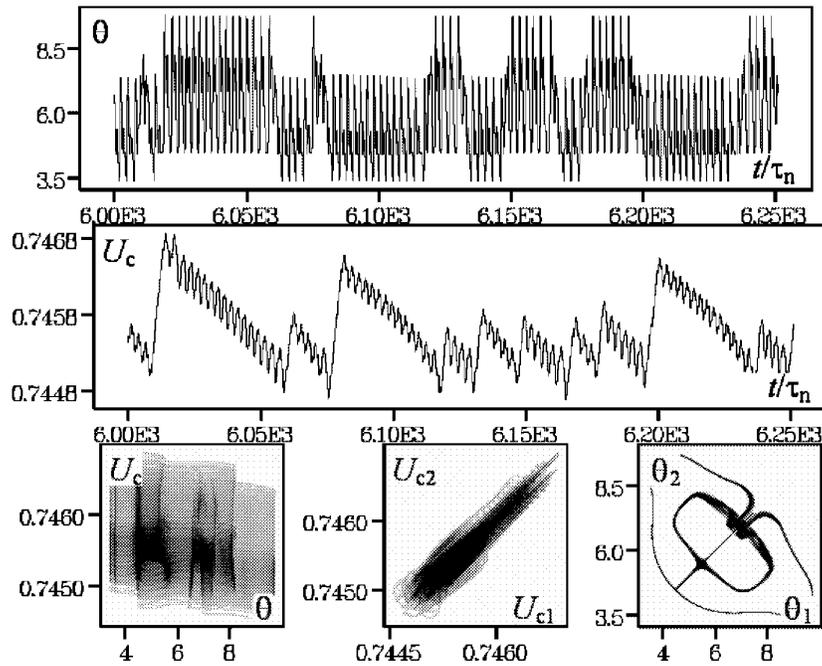


Рис. 17. Утрата структурности аттрактора типа «хаос прыгающего и смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 16 здесь  $t_e = 0.05\tau_n$

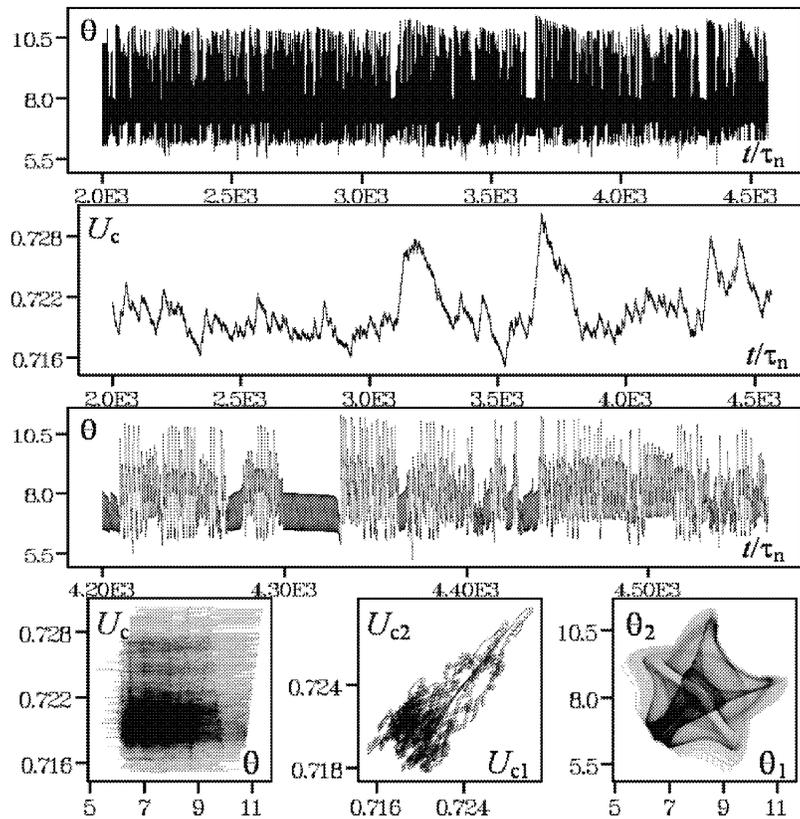


Рис. 18. Пережимаемость, сменившая «хаос прыгающего и смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). Третья временная реализация есть увеличенный фрагмент первой реализации. В отличие от рис. 17 здесь  $t_e = 0.1\tau_n$

турности данного аттрактора растет с увеличением запаздывания ( $t_e = 0.035\tau_n$ ). Об этом свидетельствует сокращение числа и укрупнение деталей фазовых портретов  $U_c(\theta)$  и  $U_{c2}(U_{c1})$  на рис. 16. Регуляризация ритмики заметна и на временных реализациях. Портрет  $\theta_2(\theta_1)$  теперь располагается ниже диагонали  $\theta_2 = \theta_1$ , причем дуга, примыкающая к ней, становится чаще посещаемой.

Однако еще больший рост запаздывания ( $t_e = 0.05\tau_n$ ) вызывает утрату структурности аттрактора. Она вызвана объединением двух зеркально-симметричных аттракторов, разделенных (в четырехмерном фазовом пространстве) плоскостью  $\theta_2 = \theta_1$ . Такой факт нетрудно видеть, сопоставляя фазовые портреты  $\theta_2(\theta_1)$  на рис. 15 – 17. А временная реализация  $\theta(t)$  на рис. 17 убеждает: появляются хаотические переходы (то есть переключения) системы из одного полупространства в другое, ему зеркально симметричное. Здесь напрашивается параллель с аттрактором Лоренца.

Судя по временным реализациям (рис. 18), удвоение – по отношению к рис. 17 – запаздывания ( $t_e = 0.1\tau_n$ ) вызывает режим перемежаемости. Амплитуда колебаний  $U_c$  увеличивается примерно в 6 раз. Существенно изменяется структура аттрактора. Так, строение его проекции на плоскость  $\theta_2(\theta_1)$ , оставаясь симметричным относительно диагонали  $\theta_2 = \theta_1$ , становится почти «зооморфной» и уже совершенно не создает впечатления периодической динамики. Структура проекции на плоскость  $U_{c2}(U_{c1})$  выглядит «мелко витой линией» (спиралью), хаотически блуждающей по этой плоскости.

С ростом запаздывания ( $t_e = 0.15\tau_n$ ) перемежаемость сохраняется, но доля времени, приходящаяся на квазипериодические стадии, по-видимому, уменьшается (рис. 19). Амплитуда колебаний  $U_c$  (впрочем, как и  $\theta$ ) еще более увеличивается, а «зооморфный» фазовый портрет  $\theta_2(\theta_1)$  заметно обновляется.

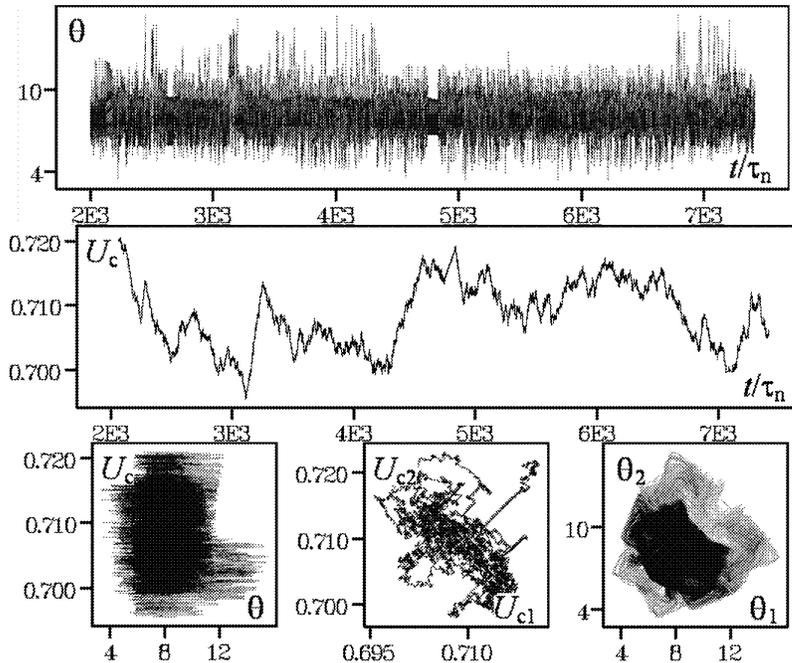


Рис. 19. Перемежаемость с доминированием хаотических стадий в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 18 здесь  $t_e = 0.15\tau_n$

**Заключение. К понятиям «интерференционное усиление»,  
«интерференционный усилитель» и «автомодуляционный»  
источник колебаний**

Представленные выше результаты моделирования динамики огибающей высокочастотного сигнала в радиоэлектронном аналоге и в его модификации указывают на возможность регулярных и хаотических режимов динамики в устройстве на рис. 2.

Показано как сходство между моделями НКИ (1) и его радиоэлектронного аналога (2), так и существенные различия между последней и моделями (3), (6) модификации радиоэлектронного аналога НКИ. Приведенные данные моделирования демонстрируют многообразие рабочих режимов предложенного устройства и качественно подтверждаются результатами пилотного эксперимента [17]. Обнаруженные особенности сложного поведения потребовали (и, возможно, потребуют далее) некоторых терминологических нововведений. В целом авторы ожидают, что радиотехническая система на рис. 2 послужит прецедентом нелинейно-динамического устройства, располагающего к диверсификации, а тем самым – к порождению разнообразных по своим свойствам источников регулярных и хаотических режимов динамики.

Теперь уместно задуматься о квалификации предложенного устройства. Общеизвестно, что автогенератором называют усилитель, снабженный положительной обратной связью. При этом подразумевают, что рост амплитуды колебаний ограничен из-за нелинейности усилителя, либо благодаря специальным мерам стабилизации. Модулятор же, как известно, изменяет (согласно характеру *внешнего* управляющего воздействия) параметры колебательного процесса. Модулятор – в отличие от автогенератора – является пассивной системой. Естественно задуматься: возможна ли техническая автоколебательная система, совмещающая свойства автогенератора и модулятора? Иначе говоря, возможен ли модулятор, обладающий автономией поведения? Либо заострить так: возможен ли генератор без активного элемента?

По мнению авторов, на эти вопросы следует ответить положительно. Прецедентом служат описанные нами оптическое и радиофизические устройства, наследующие принцип действия системы Икеды.

Действительно, для функционирования устройства на рис. 2 нет нужды в усилителе, поскольку достаточно, чтобы выполнялось условие  $\gamma_a < 1$ . Следовательно, предлагаемое устройство есть *пассивная* система? Но, по определению [3, с. 17, 223], усилители и генераторы – активные системы. Предположим, в рассматриваемом устройстве имеет место *положительная* обратная связь ( $\omega t_e + \theta(t - t_e) = 2\pi N$ ). Тогда, по отношению к сигналу  $V(t)$ , циркулирующему в системе, сумматор вкупе с входным сигналом  $V_{вх}(t)$  окажется «интерференционным усилителем» [19]. Его коэффициент усиления, вводимый как  $A_{вых\ ус}/A_{вх\ ус}$ , является скалярной (вещественной) величиной и равен  $1 + [A_{вх}(t)/(\gamma_a A(t - \tau))] \geq 1$ . Если обратная связь является отрицательной, то имеем  $1 - [A_{вх}(t)/(\gamma_a A(t - \tau))] \leq 1$ . При этом эффективный коэффициент передачи за один проход равен, соответственно,  $\pm\gamma_a + (A_{вх}(t)/A(t - \tau))$ .

При  $A_{вх}(t) = \text{const}$  в указанных двух предельных случаях (для положительной и отрицательной обратной связи) амплитуда сигнала на выходе «интерференционного усилителя» с течением времени ( $t \rightarrow \infty$ ) неизбежно стремится к  $A_{вх}/(1 - \pm\gamma_a)$ , а коэффициент усиления и коэффициент передачи – соответственно к  $\pm 1/\gamma_a$  и к 1.

В этих случаях «интерференционный усилитель», действительно, ведет себя как (не)инвертирующий усилитель с модулем коэффициента усиления  $1/\gamma_a > 1$ . В общем случае коэффициент усиления – комплексная величина (в терминах метода комплексных амплитуд), а его модуль может и не превосходить единицы. На языке векторных диаграмм работа этого усилителя описывается вектором, соответствующим комплексной амплитуде внешнего сигнала  $V_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}}(t) \cos(\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t))$ , поступающего на вход сумматора. Поэтому логично говорить также о «векторном усилителе».

Подчеркнем: в устройстве на рис. 2 нет усилителя как такового. Но *есть усиление*. А его коэффициент (нелинейно) зависит от величины усиливаемого сигнала  $V(t)$ , циркулирующего в системе. Коэффициент усиления еще и неявно зависит от  $A(t)$ : через зависимость от фазового набег  $\theta$  в (2). Очевидно, что сочетание нелинейности (усиления) и запаздывания есть предпосылка хаотической динамики, то есть реализации *пассивного* (иначе говоря, «автомодуляционного») источника детерминированного хаоса.

Предлагаемые понятия нуждаются в методологической разработке. Так, в классификации динамических систем [3, с. 17, 233] следует определить место устройства на основе «интерференционного усиления». Предстоит выяснить преимущества интерпретации и описания кольцевой системы с воздействием внешнего поля как автоколебательной системы, снабженной нелинейным «усилителем» и цепью обратной связи. Необходим анализ, позволяющий оптимизировать предложенное устройство с учетом классических требований радиофизики [3], а также специфических запросов теории детерминированного хаоса [3, 4, 8, 18, 20] и его приложений [9–11, 16, 21].

В последующей статье авторы приведут материалы эксперимента с радиотехническим устройством, реализующим модель (3).

Авторы благодарны профессору Саратовского государственного университета С.П. Кузнецову за полезные замечания.

## Библиографический список

1. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30, № 2. P. 257.
2. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
5. Adachi-hara H., Faid H. Two-dimensional nonlinear-interferometer pattern analysis and decay of spirals // Opt. Soc. Am. 1993. Vol. 10, № 7. P. 1242.
6. Новые физические принципы оптической обработки информации: сб. ст. / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990.
7. Chesnokov S.S., Rybak A.A. Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems // Laser Physics. 2000. Vol. 10, №5. P. 1.

8. *Розанов Н.Н.* Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997.
9. *Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Управление хаосом в системе Икеды: упрощенная модель в виде точечного отображения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, №2. С. 66.
10. *Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Управление хаосом в системе Икеды: пространственно-временная модель // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, №2. С. 87.
11. *Garcia-Ojalvo J., Roy R.* Spatiotemporal communication with Synchronized Optical Chaos // <http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0011012>. 2000. 6 Nov. 4 p., 6.
12. *Carmon T., Buljan H., Segev M.* Spontaneous pattern formation in a cavity with incoherent light // Optics Express. 2004. Vol. 12, №15. P. 3481.
13. *Schwartz T., Fleischer J.W., Cohen O. et al.* Pattern formation in a ring cavity with temporally incoherent feedback // J. Opt. Soc. Am. B. 2004. Vol. 21, №12. P. 2197.
14. *Smirnov E., Stepić M., Shandarov V., Kip D.* Pattern formation by spatially incoherent light in a nonlinear ring cavity // Appl. Phys. B. 2006. Vol. 85. P. 135.
15. *Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н.* Детерминированный хаос в моделях нелинейного кольцевого интерферометра. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
16. *Владимиров С.Н., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Нелинейно-динамическая криптология: радиофизические и оптические системы / Под ред. С.Н. Владимирова. М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 208 с.
17. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Радиоаналог оптического генератора хаоса: модель и экспериментальная реализация // Тезисы докладов XIV Междунар. зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. Саратов: ИЦ «РАТА», 2009. С. 48.
18. *Тимашев С.Ф.* Фликкер-шум как индикатор «стрелы времени». Методология анализа временных рядов на основе теории детерминированного хаоса // Рос. хим. журнал. 1997. Т. 41. №3. С. 17.
19. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* О понятии интерференционного усиления в контексте генерации детерминированного хаоса // Синергетика в естественных науках: Пятые Юбилейные Курдюмовские чтения: Материалы Международной междисциплинарной научной конференции (16 – 18 апреля 2009 г., г. Тверь). Тверь: Твер. гос. ун-т, 2009. Ч. 1. С. 80.
20. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
21. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

*Томский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 16.06.2009  
После доработки 5.09.2009*

**CHAOS IN RADIO DEVICE WITH SQUARE-LAW PHASE  
MODULATOR AND INTERFERENCE AMPLIFICATION  
OF QUASI-HARMONIC SIGNAL:  
A MODEL AND SIMULATION**

*I.V. Izmailov, B.N. Poizner*

The attempt is undertaken to define a class of oscillations or waves sources, the operation principle of which is based on interference amplification of feedback signal by an input signal. The precedent here is the optical Ikeda's system. The radio-electronic analog of a nonlinear ring interferometer and its modification are offered, the block diagrams and mathematical models are constructed. The computer simulation is performed. An intermittency, chaos, regular, static modes are detected.

*Keywords:* Interference amplification, delayed feedback, bifurcation, chaos, intermittency, static state.

*Измайлов Игорь Валерьевич* – родился в Алма-Ате (1976), окончил Томский государственный университет (ТГУ, 1999). Учился в аспирантуре (1999–2002) и докторантуре (2006–2009) ТГУ. Работает в ТГУ старшим научным сотрудником радиофизического факультета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТГУ (2002). Ведёт исследования, ориентированные на выявление новых синергетических феноменов и закономерностей нелинейной динамики в системах различной природы, на применение их в радиофизических и оптических устройствах (обработки и защиты информации, адаптивной, сингулярной оптики, функциональной электроники). Опубликовал три монографии и одно учебное пособие с грифом УМО (в соавторстве). Автор 85 научных статей по направлениям, указанным выше (из них 35 – в рецензируемых журналах).

634050, Томск, пр. Ленина, 36  
ТГУ, РФФ, каф. квантовой электроники и фотоники  
E-mail: izmi@elefot.tsu.ru



*Поизнер Борис Николаевич* – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), профессор кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, лазерной технике, основам синергетики, социальной информатике. Автор и соавтор более 400 публикаций, 10 изобретений, 17 учебных пособий и монографий по физике лазеров, процессам самоорганизации и хаотизации в оптических, радиофизических, социокультурных системах, проблемам вузовской педагогики и (само)образования, науковедению и культурологии. Заслуженный работник высшей школы РФ (2005). Учёный секретарь диссертационного совета Д 212.267.04 при ТГУ. Действительный член Организации российских библиофилов.

634050, Томск, пр. Ленина, 36  
ТГУ, РФФ, каф. квантовой электроники и фотоники  
E-mail: pznr@elefot.tsu.ru

