



РЕКОНСТРУКЦИЯ АНСАМБЛЕЙ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

М.Д. Прохоров, В.И. Пономаренко

Предложены методы реконструкции модельных дифференциальных уравнений с запаздыванием для ансамблей связанных систем с задержкой по их временным рядам. Эффективность методов продемонстрирована на примере хаотических и периодических временных рядов цепочек диффузионно связанных модельных и экспериментальных систем с запаздыванием для случаев однонаправленной и взаимной связи элементов.

Ключевые слова: Реконструкция уравнений, анализ временных рядов, динамическое моделирование, запаздывающая обратная связь.

Введение

Автоколебательные системы с запаздывающей обратной связью очень широко распространены в природе [1–3] и технике [4–6]. Обычно они моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Динамика модельных систем с задержкой достаточно подробно исследована [7,8]. Не менее важной является задача восстановления модельных уравнений систем с запаздыванием по экспериментальным временным рядам. Решение этой задачи позволяет не только предсказать поведение исследуемых систем при изменении параметров, но и оценить адекватность заложенных в модели представлений об объекте, осуществить классификацию систем и режимов их функционирования, определить значения параметров, недоступных непосредственному измерению в эксперименте.

Так как даже простые системы с запаздыванием могут демонстрировать хаотические колебания очень высокой размерности, универсальные методы реконструкции оказываются неэффективными, и для восстановления уравнений систем с задержкой требуется разрабатывать специальные подходы. Большинство из них основано на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности. При этом используются такие критерии качества реконструкции системы с запаздыванием, как минимальная ошибка прогноза построенной модели [9–11], минимальная величина информационной

энтропии [12] или различные меры сложности спроецированного временного ряда [13–15]. Известны также методы восстановления параметров систем с запаздыванием, основанные на применении регрессионного анализа [16–18], метода множественной стрельбы [19], нейронных сетей [20] и статистического анализа экстремумов временного ряда [21,22].

Однако почти все эти подходы ориентированы на восстановление изолированных систем с запаздыванием по их хаотическим временным рядам. Вместе с тем ситуация, когда несколько систем с запаздыванием взаимодействуют между собой, является типичной в ряде практически важных задач [23–26]. Достаточно распространена ситуация, когда системы с запаздыванием функционируют в периодических или близких к периодическим режимам [2,8,27]. Ранее нами был предложен метод восстановления двух линейно связанных систем с запаздыванием по их хаотическим временным рядам [28] и метод реконструкции изолированных систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических колебаний [29]. В настоящей работе нами исследована возможность применения этих методов для реконструкции произвольного числа связанных между собой систем с запаздыванием и определены границы применимости методов. С помощью этих методов по хаотическим и периодическим временным рядам проведена реконструкция модельных уравнений для цепочек связанных систем с задержкой при различных способах связи элементов цепочки.

1. Описание методов

Рассмотрим цепочки, состоящие из диффузионно связанных систем с запаздыванием, описываемые уравнениями

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i)) + k_i [x_{i+1}(t) - x_i(t)], \quad (1)$$

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i)) + k_i [x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)], \quad (2)$$

где τ_i – времена запаздывания; ε_i – параметры, характеризующие инерционные свойства элементов системы; f_i – нелинейные функции; k_i – коэффициенты связи. Граничные условия выбраны периодическими $x_1 = x_{J+1}$, где J – число элементов в цепочке. Модельное уравнение (1) описывает однонаправленно связанные системы с запаздыванием. Такой способ связи систем с запаздыванием и возникающая в этом случае синхронизация колебаний элементов цепочки исследовались в [23,30]. Уравнение (2) описывает динамику цепочек взаимно связанных систем с запаздыванием. Исследование синхронизации таких систем проводилось в [31].

Ранее нами было установлено, что во временных реализациях изолированных ($k_i = 0$) систем с запаздыванием вида (1) и (2) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания [21]. Если такая система совершает хаотические колебания, то экстремумы в ее временном ряде расположены нерегулярно и расстояние между ними принимает различные значения. На основе этого свойства нами был предложен метод определения времени задержки τ_i , использующий статистический анализ временных интервалов между экстремумами хаотического временного ряда системы с запаздыванием. Сначала определяем для

различных значений τ число N_i ситуаций, при которых точки временного ряда, разделенные интервалом времени τ , одновременно являются экстремальными. Затем, построив зависимость $N_i(\tau)$, легко найти время задержки τ_i как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [21].

Рассмотрим, как скажется на эффективности метода наличие связи между системами с запаздыванием. Воздействие на систему со стороны соседних элементов ансамбля возмущает траекторию ее движения, приводя к исчезновению одних экстремумов временного ряда и появлению других. Особенно заметно этот эффект проявляется при линейной связи систем с запаздыванием, рассмотренной нами в [28]. Чем больше величина линейной связи, тем большее возмущение испытывает элемент цепочки со стороны соседних элементов и тем менее выражена его собственная динамика. В результате абсолютный минимум зависимости $N_i(\tau)$, наблюдающийся при истинном времени задержки τ_i , становится менее выраженным и, начиная с некоторых значений коэффициентов линейной связи, перестает наблюдаться при $\tau = \tau_i$. Таким образом, в случае линейной связи метод позволяет восстановить время задержки при условии, что связь между элементами ансамбля не слишком велика. Критические значения коэффициентов связи зависят от конкретной системы. Исследования показывают, что в случае линейной связи метод, как правило, перестает работать при амплитуде воздействия, составляющей более 20% от амплитуды собственных колебаний изолированной системы с запаздыванием.

В случае диффузионной связи систем с запаздыванием, описываемой уравнениями (1) и (2), метод, основанный на статистическом анализе экстремумов хаотического временного ряда системы, тоже можно использовать для восстановления времени задержки, причем метод остается эффективным при существенно более высоких значениях коэффициентов связи. Поясним это на примере уравнения (2), продифференцировав его по t ,

$$\varepsilon_i \ddot{x}_i(t) = -\dot{x}_i(t) + \frac{df_i(x_i(t - \tau_i))}{dx_i(t - \tau_i)} \dot{x}_i(t - \tau_i) + k_i [\dot{x}_{i+1}(t) - 2\dot{x}_i(t) + \dot{x}_{i-1}(t)]. \quad (3)$$

Если при $\dot{x}_i(t) = 0$ в типичном случае квадратичных экстремумов $\ddot{x}_i(t) \neq 0$, то при $\varepsilon_i \neq 0$ должно выполняться условие

$$\frac{df_i(x_i(t - \tau_i))}{dx_i(t - \tau_i)} \dot{x}_i(t - \tau_i) + k_i [\dot{x}_{i+1}(t) + \dot{x}_{i-1}(t)] \neq 0. \quad (4)$$

Для выполнения условия (4) необходимо, чтобы $\dot{x}_i(t - \tau_i) \neq 0$ или/и

$$k_i [\dot{x}_{i+1}(t) + \dot{x}_{i-1}(t)] \neq 0. \quad (5)$$

Условие (5) никогда не выполняется в случае отсутствия связи ($k_i = 0$) и в случае сильной связи, обеспечивающей синхронизацию элементов, так как при этом $\dot{x}_{i+1}(t) = \dot{x}_{i-1}(t) = \dot{x}_i(t)$, а $\dot{x}_i(t) = 0$ при выводе условия (4). Следовательно, в этих пограничных случаях первое слагаемое в (4) отлично от нуля, а значит, производные $\dot{x}_i(t)$ и $\dot{x}_i(t - \tau_i)$ одновременно в нуль не обращаются, то есть на удалении τ_i от квадратичного экстремума во временном ряде $x_i(t)$ не должно быть другого экстремума. В промежуточных ситуациях слабой и умеренной связи существует вероятность обнаружения пары экстремумов на расстоянии τ_i друг от друга. Однако, как показывают исследования, в общем случае эта вероятность меньше, чем вероятность

встретить пару экстремумов на расстоянии $\tau \neq \tau_i$. В результате число экстремумов, разделенных интервалом времени τ_i , будет меньше, чем число экстремумов, разделенных другими значениями времени τ , и, следовательно, график $N_i(\tau)$ будет иметь минимум при $\tau = \tau_i$. То есть качественные особенности зависимости $N_i(\tau)$ сохраняются для систем (1) и (2) в широком диапазоне значений коэффициентов связи. Отметим, что такой метод определения времени запаздывания обладает высоким быстродействием, поскольку использует только операции сравнения и сложения, не требуя вычисления каких-либо мер сложности движения [13–15] или ошибки аппроксимации данных [9–11].

Однако, если система с запаздыванием совершает периодические колебания, такой подход оказывается неработоспособным, так как экстремумы во временном ряде расположены регулярным образом. Для изолированных систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических автоколебаний, нами недавно был предложен метод восстановления времени задержки, основанный на возмущении системы внешним воздействием и анализе отклика [29]. Если на переменную $x_i(t)$ изолированной системы с запаздыванием подействовать внешним сигналом $y_i(t)$, представляющим собой прямоугольные импульсы, и построить взаимную корреляционную функцию

$$C_i(s) = \frac{\langle |\dot{y}_i(t)| |\ddot{x}_i(t+s)| \rangle}{\sqrt{\langle |\dot{y}_i(t)|^2 \rangle \langle |\ddot{x}_i(t)|^2 \rangle}}, \quad (6)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени, то $C_i(s)$ будет иметь четко выраженный максимум при $s = \tau_i$. Недостатком такого подхода по сравнению с рассмотренным выше методом является необходимость активного воздействия на систему. Однако метод позволяет использовать импульсы малой амплитуды, что позволяет свести воздействие на систему к минимуму [29].

Исследуем возможность применения такого метода для определения времен задержки в ансамбле связанных систем с запаздыванием первого порядка. Вид модельного уравнения системы определяется способом внесения в нее возмущения. Рассмотрим такой способ возбуждения элементов цепочки внешними сигналами $y_i(t)$, при котором модельные уравнения для однонаправлено и взаимно диффузионно связанных систем с запаздыванием имеют, соответственно, следующий вид:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i) + y_i(t - \tau_i)) + k_i [x_{i+1}(t) - x_i(t)], \quad (7)$$

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i) + y_i(t - \tau_i)) + k_i [x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)]. \quad (8)$$

Воздействия $y_i(t)$ представляют собой прямоугольные импульсы с амплитудой A_i , периодом T_i и длительностью M_i . Для восстановления времени задержки τ_i только одного i -го элемента цепочки достаточно подействовать возмущающим сигналом только на этот i -й элемент. Как уже было отмечено выше, наличие взаимодействия между системами с запаздыванием приводит к возмущению траекторий их движения. Эти возмущения могут препятствовать выявлению отклика системы на прямоугольное импульсное воздействие $y_i(t)$ и снижать чувствительность взаимной корреляционной функции (6) как характеристики для определения времени запаздывания. Например, чем сильнее линейная связь между элементами ансамбля, тем большая амплитуда внешнего воздействия в виде прямоугольных импульсов $y_i(t)$ требуется

для восстановления τ_i . Если в отсутствие связи для восстановления времени запаздывания τ_i изолированной системы достаточно взять импульсное воздействие $y_i(t)$ с амплитудой A_i на два порядка меньшей амплитуды собственных колебаний системы $x_i(t)$ [29], то при сильной линейной связи, такой что воздействие со стороны соседних элементов сравнимо по амплитуде с собственными колебаниями изолированной системы, для восстановления τ_i требуется на порядок увеличить амплитуду воздействия A_i . Зато, метод определения времени запаздывания, основанный на анализе отклика системы на воздействие прямоугольными импульсами, можно использовать при любых значениях коэффициентов связи k_i , в том числе при сильной линейной связи, когда предыдущий метод не работает. Кроме того, метод может быть применен не только к системам, находящимся в режиме периодических колебаний, но и к системам, совершающим хаотические колебания. Еще одним достоинством метода является то, что он остается эффективным при высоких уровнях шума.

Определив тем или иным способом время задержки i -го элемента ансамбля связанных систем с запаздыванием, мы можем восстановить его параметр ε_i , коэффициент связи k_i и нелинейную функцию f_i по временным рядам колебаний i -го и связанных с ним элементов. Для этого будем использовать следующий подход. Запишем уравнения (1) и (2) в виде

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k_i [x_{i+1}(t) - x_i(t)] = f_i(x_i(t - \tau_i)), \quad (9)$$

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k_i [x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)] = f_i(x_i(t - \tau_i)), \quad (10)$$

соответственно. Из уравнения (9) следует, что если построить на плоскости множество точек с координатами $(x_i(t - \tau_i), \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k_i [x_{i+1}(t) - x_i(t)])$, то оно воспроизведет функцию f_i . Поскольку заранее величины ε_i и k_i неизвестны, будем строить зависимости $\varepsilon \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k [x_{i+1}(t) - x_i(t)]$ от $x_i(t - \tau_i)$ для различных значений ε и k , добиваясь однозначного соответствия на плоскости $(x_i(t - \tau_i), \varepsilon \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k [x_{i+1}(t) - x_i(t)])$, которая возможна лишь при $\varepsilon = \varepsilon_i$, $k = k_i$. А из уравнения (10) следует, что функцию f_i можно восстановить, построив на плоскости множество точек с координатами $(x_i(t - \tau_i), \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k_i [x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)])$. Так как значения ε_i и k_i неизвестны, будем перебирать их из некоторого интервала, добиваясь однозначности на выбранной плоскости, которое возможно лишь при правильном выборе параметров.

В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске ε_i и k_i будем использовать минимальную длину $L_i(\varepsilon, k)$ линии, последовательно соединяющей точки на перебираемых плоскостях вложения, упорядоченные по величине абсциссы. Минимум зависимости $L_i(\varepsilon, k)$ будет наблюдаться при правильном выборе параметров, а построенное при этом значении множество точек на плоскости воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать. При ошибочном выборе значений ε_i и k_i получаем на плоскости набор точек, не связанных между собой функционально. Чем менее точно определены параметры, тем более беспорядочно расположены точки, а соединяющая их ломаная линия имеет большую длину, чем в случае, когда множество точек ложится на одномерную кривую. Похожий подход использовался нами в [28] при реконструкции двух линейно связанных систем с запаздыванием. Для уменьшения времени счета началь-

ный шаг изменения параметров ε и k можно выбрать большим, а затем уменьшить его в окрестности минимума $L_i(\varepsilon, k)$.

В случае синхронизации диффузионно связанных систем с запаздыванием (1) и (2) предложенный подход позволяет восстановить параметры локальных элементов, но коэффициенты связи определить не удается.

2. Применение методов

2.1. Восстановление цепочки однонаправлено связанных уравнений Икеды. Рассмотрим в качестве примера цепочку однонаправлено связанных уравнений Икеды, описываемую уравнением

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \mu_i \sin(x_i(t - \tau_i) - x_{0i}) + k_i [x_{i+1}(t) - x_i(t)], \quad (11)$$

где $i = 1, \dots, J$, $J = 10$. Уравнение Икеды описывает сдвиг x фазы электрического поля в нелинейной поглощающей среде кольцевого резонатора. Параметр μ характеризует интенсивность лазерного излучения, подаваемого на вход резонатора; τ – время запаздывания; x_0 – постоянный фазовый сдвиг. Использовано кольцевое граничное условие $x_1 = x_{J+1}$. Параметры всех уравнений Икеды выбраны одинаковыми: $\mu_i = 20$, $\tau_i = 2$, $x_{0i} = \pi/3$, а начальные условия различными. При этих параметрах элементы системы демонстрируют движение на хаотическом аттракторе высокой размерности [32]. Для уравнения (11) $\varepsilon_i = 1$. Коэффициенты связи между элементами цепочки различны. Они выбраны произвольным образом и принимали значения от 0.5 до 2.0. Во все связанные системы добавлен динамический гауссов белый шум с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением, составляющим 20% от среднеквадратичного отклонения временного ряда без шума (отношение сигнал/шум около 14 дБ).

На рис. 1, *a* приведен фрагмент временного ряда колебаний в пятом элементе цепочки при $k_5 = 1.5$. Масштабы таковы, что 200 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки. Весь ряд состоял из 20000 точек и содержал около 800 экстремумов.

Подсчитав число N_5 одновременных обращений в нуль $\dot{x}_5(t)$ и $\dot{x}_5(t - \tau)$ для различных значений τ , перебираемых с шагом, равным шагу интегрирования $h = 0.01$, построим зависимость $N_5(\tau)$, введя нормировку N_5 на общее число экстремумов в ряде (рис. 1, *b*). Для оценки производной по временному ряду мы использовали локальную параболическую аппроксимацию. Отметим, что для сглаживания временного ряда и уменьшения числа обусловленных шумом экстремумов при оценке производной использовалось 7 соседних точек в процедуре локальной аппроксимации. Несмотря на высокий уровень шума, зависимость $N_5(\tau)$ демонстрирует четко выраженный минимум при $\tau = \tau_5 = 2.00$, что в точности соответствует времени запаздывания.

При построении зависимости $L_5(\varepsilon, k)$ шаг изменения ε и k также выбирался равным 0.01. Длина $L_5(\varepsilon, k)$ линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки на плоскости $(x_5(t - \tau_5), \varepsilon \dot{x}_5(t) + x_5(t) - k[x_6(t) - x_5(t)])$, минимальна при $\varepsilon = 0.99$ и $k = 1.45$ (рис. 1, *в*), что достаточно близко к истинным значениям $\varepsilon_5 = 1$ и $k_5 = 1.5$.

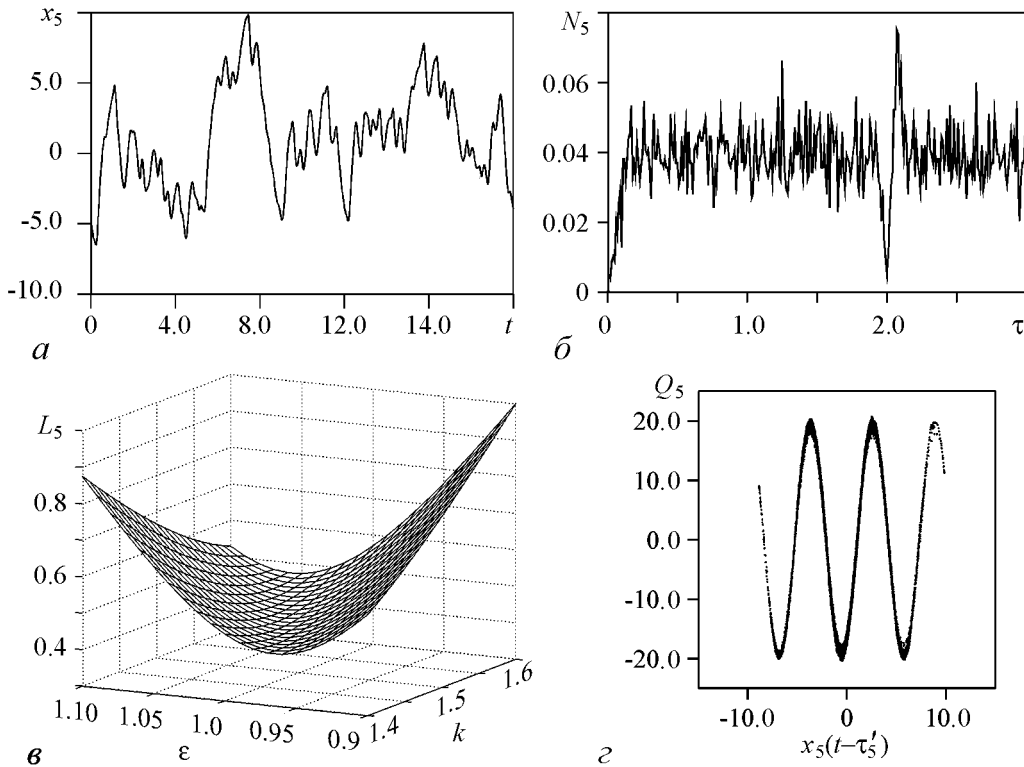


Рис. 1. Восстановление элемента цепочки однонаправлено связанных уравнений Икеды (11) в присутствии 20% гауссова белого шума: *a* – временной ряд переменной $x_5(t)$; *b* – число N_5 пар экстремумов временного ряда переменной $x_5(t)$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде, $N_{5\min}(\tau) = N_5(2.00)$; *в* – зависимость $L_5(\varepsilon, k)$, нормированная на максимальную длину $L_{5\max}(\varepsilon, k) = L_5(0.90, 1.60)$ в исследуемом интервале параметров, $L_{5\min}(\varepsilon, k) = L_5(0.99, 1.45)$; *г* – восстановленная нелинейная функция f_5 при $\tau'_5 = 2.00$, $\varepsilon'_5 = 0.99$, $k'_5 = 1.45$. $Q_5 = \varepsilon'_5 \dot{x}_5(t) + x_5(t) - k'_5(x_5(t) - x_5(t-\tau'_5))$

На рис. 1, *г* приведена восстановленная нелинейная функция f_5 , построенная при найденных значениях параметров. Она хорошо совпадает с истинной функцией уравнения Икеды. Амплитуда синусоиды (см. рис. 1, *г*) позволяет определить параметр μ_5 , а значение функции при $x_5(t-\tau_5) = 0$ – найти параметр x_{05} . Аппроксимация восстановленной нелинейной функции полиномом 12-й степени позволила нам получить следующую оценку параметров: $\mu'_5 = 19.68$ и $x'_{05} = 1.01$, то есть близко к $x_{05} = \pi/3 \approx 1.05$.

При $\mu_i = 5$, $\tau_i = 0.5$, $x_{0i} = \pi/3$, $k_i = 1$ элементы цепочки (11) демонстрируют периодические колебания. На рис. 2, *a* приведен фрагмент временного ряда колебаний в пятом элементе цепочки. В этом случае метод, основанный на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами временного ряда, не позволяет восстановить время задержки. Для определения времени запаздывания τ_5 подействуем на переменную $x_5(t)$ слабым внешним сигналом $y_5(t)$, представляющим собой прямоугольные импульсы, таким образом, что динамика возбуждаемого элемента описывается уравнением (7). На рис. 2, *б* построена взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду $A_5 = 0.1$, период $T_5 = 2.3$ и длительность $M_5 = T_5/2$. При шаге изменения s , равном 0.01, $C_5(s)$ имеет высокий максимум при $s = 0.50$, то есть время запаздывания восстанавливается точно. Так же как и рис. 1, *б*, график построен по 20000 точек,

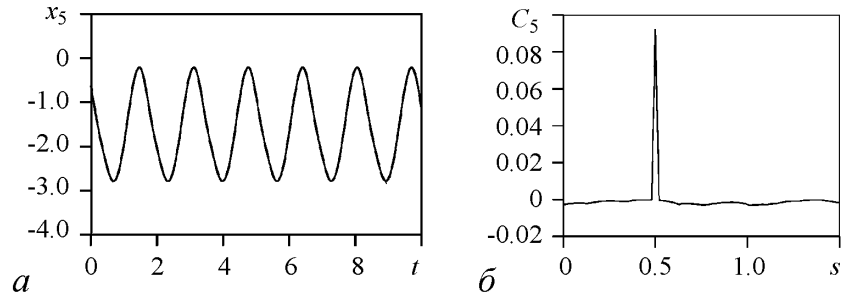


Рис. 2. *a* – временной ряд переменной $x_5(t)$ системы (11); *б* – взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда элементы цепочки (11) совершают периодические в отсутствие внешнего воздействия колебания, $C_{5\max}(s) = C_5(0.50)$

однако метод позволяет использовать более короткие ряды. Аналогичным образом можно восстановить времена запаздывания τ_i остальных элементов, подействовав на них внешними сигналами $y_i(t)$. Определив времена запаздывания τ_i , можно восстановить параметры ε_i и k_i и нелинейные функции f_i описанным выше способом.

2.2. Восстановление цепочки взаимно связанных систем Маккея–Гласса.

Рассмотрим теперь цепочку диффузионно связанных систем с запаздыванием, моделируемую уравнением (2), элементы которой описываются уравнениями Маккея–Гласса [2]. В этом случае функции f_i в уравнении (2) имеют вид

$$f_i(x_i(t - \tau_i)) = \frac{a_i x_i(t - \tau_i)}{b_i(1 + x_i^{c_i}(t - \tau_i))}, \quad (12)$$

а параметры инерционности $\varepsilon_i = 1/b_i$.

Как и в предыдущем примере, рассмотрим цепочку, состоящую из 10 элементов с периодическими граничными условиями $x_1 = x_{J+1}$, $J = 10$. Однако в отличие от рассмотренного выше случая, элементы цепочки выберем неидентичными. Пусть времена запаздывания τ_i принимают случайные целые значения от 300 до 400, а a_i – случайные значения от 0.20 до 0.30. Остальные параметры одинаковы для всех элементов: $b_i = 0.1$ ($\varepsilon_i = 10$), $c_i = 10$, $k_i = 0.1$. При выбранных значениях параметров элементы цепочки демонстрируют хаотические колебания высокой размерности. К временным рядам всех 10 систем Маккея–Гласса добавлен 10% гауссов белый шум (отношение сигнал/шум равно 20 дБ).

На рис. 3, *a* приведен фрагмент временного ряда колебаний в пятом элементе цепочки при $\tau_5 = 330$, $a_5 = 0.25$. Масштабы таковы, что 330 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки. Весь ряд состоял из 10000 точек и содержал 660 экстремумов. На рис. 3, *б* приведена зависимость $N_5(\tau)$, построенная по временному ряду переменной $x_5(t)$ при шаге изменения τ , равном 1. Несмотря на присутствие шума, отчетливый минимум зависимости $N_5(\tau)$ наблюдается при $\tau = \tau_5 = 330$. Зависимость $L_5(\varepsilon, k)$, построенная при шаге изменения ε , равном 0.1, и шаге изменения k , равном 0.01, демонстрирует минимум при $\varepsilon = 10.2$ и $k = 0.10$ (рис. 3, *в*). На рис. 3, *г* приведена восстановленная при найденных значениях параметров нелинейная функция f_5 . Заметим, что для построения $L_5(\varepsilon, k)$ и восстановления нелинейной функции мы использовали лишь по 2000 точек временных

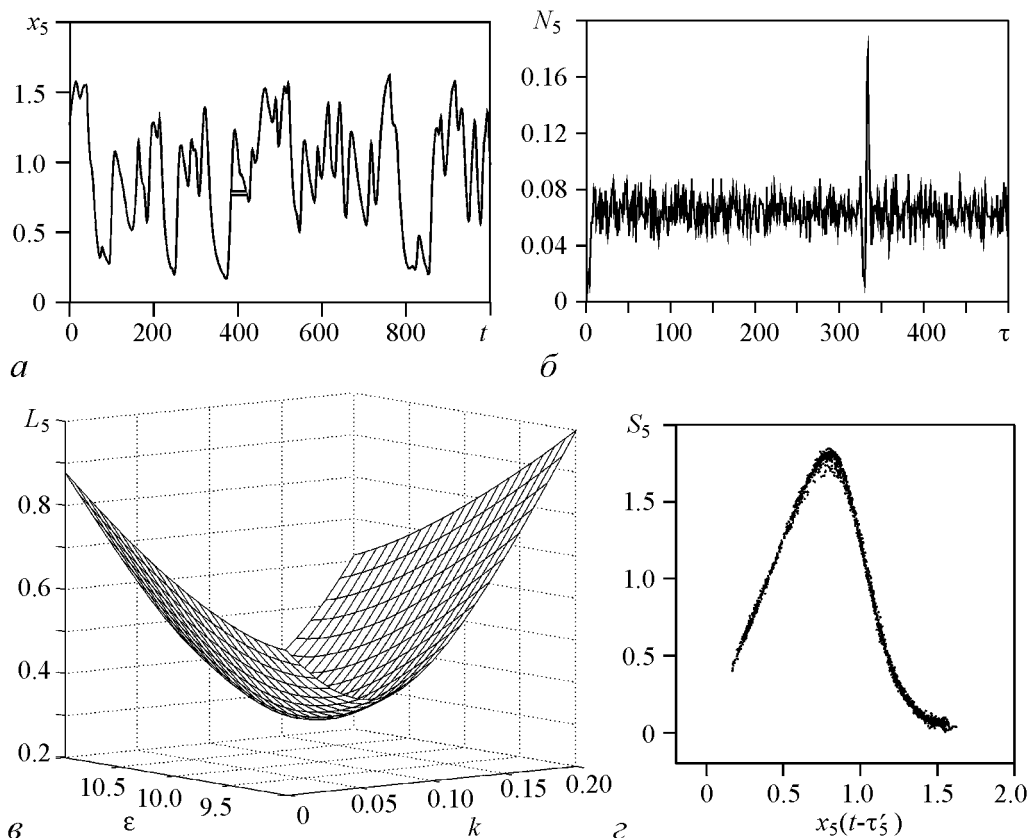


Рис. 3. Восстановление элемента цепочки взаимно связанных уравнений Маккея–Гласса в присутствии 10% аддитивного гауссова белого шума: *a* – временной ряд переменной $x_5(t)$; *б* – число N_5 пар экстремумов временного ряда переменной $x_5(t)$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде, $N_{5\min}(\tau) = N_5(330)$; *в* – зависимость $L_5(\epsilon, k)$, нормированная на максимальную длину $L_{5\max}(\epsilon, k) = L_5(9.0, 0.20)$ в исследуемом интервале параметров, $L_{5\min}(\epsilon, k) = L_5(10.2, 0.10)$; *г* – восстановленная нелинейная функция f_5 при $\tau'_5 = 330$, $\epsilon'_5 = 10.2$, $k'_5 = 0.10$. $S_5 = \epsilon'_5 \dot{x}_5(t) + x_5(t) - k'_5(x_6(t) - 2x_5(t) + x_4(t))$

реализаций $x_4(t)$, $x_5(t)$ и $x_6(t)$. Аналогичным образом удается получить высокое качество восстановления остальных элементов цепочки.

Использованный нами метод восстановления времени запаздывания, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда системы, хорошо работает, если уровень измерительного и динамического шума не слишком высок. С увеличением уровня шума растет количество экстремумов во временном ряде. Эти экстремумы не связаны с собственной динамикой системы и временные интервалы между ними носят случайный характер. В результате, абсолютный минимум зависимости $N_i(\tau)$ при $\tau = \tau_i$ становится менее выраженным с увеличением шума и начиная с некоторого уровня шума исчезает совсем. Например, в рассмотренном примере взаимно связанных систем Маккея–Гласса метод не позволяет точно восстановить τ_i , если вместо 10% шума добавить к временным рядам элементов цепочки 30% гауссов белый шум (отношение сигнал/шум около 10 дБ).

В этом случае для восстановления τ_i можно использовать метод, основанный на возмущении системы внешним воздействием и анализе ее отклика. Подействуем на переменную $x_5(t)$ внешним сигналом $y_5(t)$, представляющим собой прямоуголь-

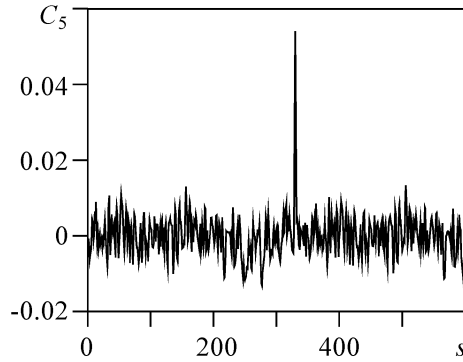


Рис. 4. Взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда взаимно связанные системы Маккея–Гласса (2) совершают хаотические колебания при высоком уровне шума, $C_{5\max}(s) = C_5(330)$

ные импульсы, таким образом, что динамика возбуждаемого элемента описывается уравнением (8). На рис. 4 построена взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду $A_5 = 0.2$, период $T_5 = 700$ и длительность $M_5 = T_5/2$. При шаге изменения s , равном 1, график $C_5(s)$ имеет максимум при $s = 330$, то есть время запаздывания восстанавливается точно. Метод остается эффективным и при более интенсивном шуме, но с увеличением уровня шума требуется увеличить амплитуду импульсного воздействия.

3. Реконструкция цепочки связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью

Мы применили метод к экспериментальным временным рядам цепочки связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 5. Она состоит из трех связанных между собой кольцевых генераторов, каждый из которых состоит из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC -фильтра первого порядка. Нелинейные элементы и линии задержки выполнены на цифровых элементах, а фильтры на аналоговых. Аналоговые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Связь генераторов осуществляется с помощью резисторов R_c . Модельное уравнение для второго элемента цепочки имеет следующий вид:

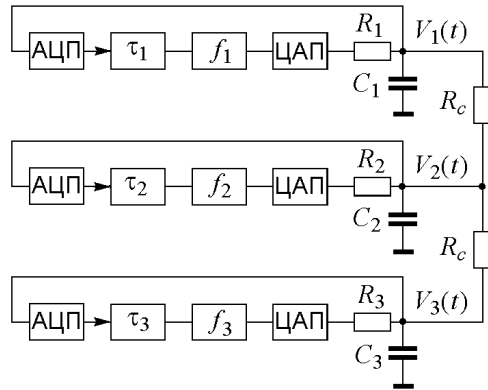


Рис. 5. Блок-схема экспериментальной установки. Линии задержки генераторов обозначены как τ_1 , τ_2 и τ_3 , а нелинейные элементы как f_1 , f_2 и f_3 . АЦП – аналого-цифровые преобразователи, ЦАП – цифро-аналоговые преобразователи

$$R_2 C_2 \dot{V}_2(t) = -V_2(t) + f_2(V_2(t - \tau_2)) + \frac{R_2}{R_c} [V_3(t) - 2V_2(t) + V_1(t)], \quad (13)$$

где $V_2(t)$ и $V_2(t - \tau_2)$ – напряжения соответственно на входе и выходе линии задержки второго элемента, R_2 и C_2 – сопротивление и емкость элементов его фильтра. Уравнение (13) имеет вид (2) с $\varepsilon_2 = R_2 C_2$ и $k_2 = R_2/R_c$.

Все три нелинейных элемента имели квадратичную передаточную характеристику f_i . При следующих значениях параметров $\tau_1 = 13.6$ мс,

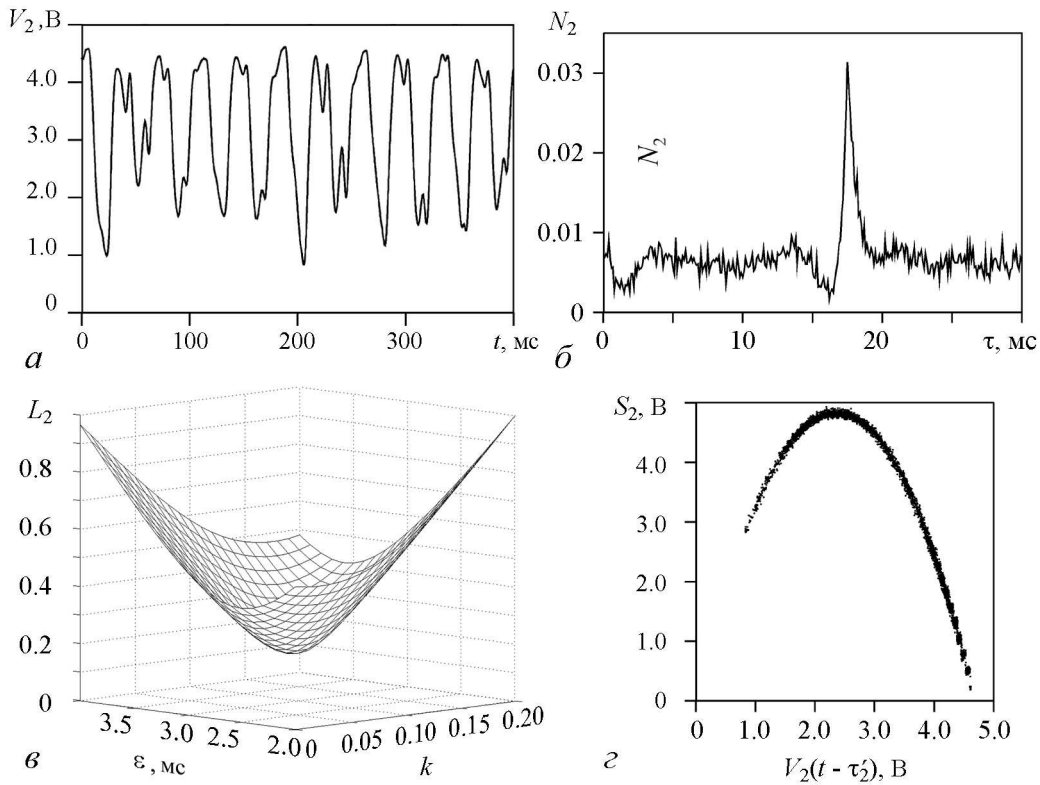


Рис. 6. Восстановление элемента цепочки связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью: *a* – экспериментальная временная реализация $V_2(t)$ второго генератора; *б* – зависимость $N_2(\tau)$, нормированная на общее число экстремумов в ряде, $N_{2\min}(\tau) = N_2(16.2 \text{ мс})$; *в* – зависимость $L_2(\varepsilon, k)$, нормированная на максимальную длину в исследуемом интервале параметров, $L_{2\min}(\varepsilon, k) = L_2(3.03 \text{ мс}, 0.10)$; *г* – восстановленная нелинейная функция f_2 при $\tau_2' = 16.2 \text{ мс}$, $\varepsilon_2' = 3.03 \text{ мс}$, $k_2' = 0.10$. $S_2 = \varepsilon_2' \dot{V}_2(t) + V_2(t) - k_2'(V_3(t) - 2V_2(t) + V_1(t))$

$\tau_2 = 16.4 \text{ мс}$, $\tau_3 = 20.4 \text{ мс}$, $\varepsilon_1 = 2.88 \text{ мс}$, $\varepsilon_2 = 2.91 \text{ мс}$, $\varepsilon_3 = 2.94 \text{ мс}$, $k_2 = 0.1$ записывались хаотические сигналы $V_i(t)$ с помощью трехканального аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки $f_s = 10 \text{ кГц}$. Фрагмент временной реализации сигнала $V_2(t)$ приведен на рис. 6, *a*.

При шаге изменения τ , равном периоду выборки точек $T_s = 0.1 \text{ мс}$, абсолютный минимум $N_2(\tau)$ наблюдается для второго генератора при $\tau = 16.2 \text{ мс}$ (рис. 6, *б*). Зависимость $L_2(\varepsilon, k)$, построенная при восстановленном времени запаздывания и параметрах ε и k , перебираемых с шагом, равном 0.01, демонстрирует минимум при $\varepsilon = 3.03 \text{ мс}$ и $k = 0.10$ (рис. 6, *в*), то есть позволяет получить близкую оценку ε_2 и k_2 . Нелинейная функция, восстановленная по экспериментальному временному ряду, приведена на рис. 6, *г*. Она достаточно хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой f_2 нелинейного элемента второго генератора.

Проиллюстрируем возможность восстановления времени запаздывания по экспериментальным данным с помощью метода, основанного на анализе отклика системы на слабое внешнее воздействие в виде прямоугольных импульсов. Будем возмущать второй элемент цепочки генераторов внешним сигналом $V_{\text{вн}}$, вводя его между фильтром и линией задержки этого элемента через суммирующий усилитель. При

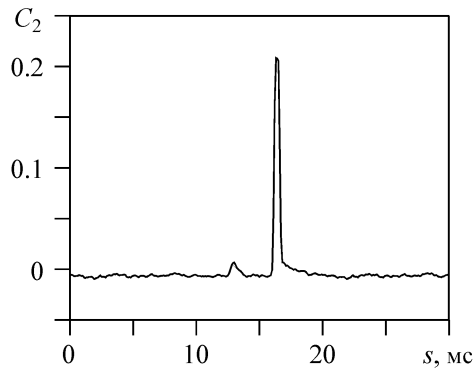


Рис. 7. Взаимная корреляционная функция (6) для связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью в хаотическом режиме, $C_{2\max}(s) = C_2(16.3 \text{ мс})$

таким воздействием динамика второго элемента цепочки описывается уравнением (8). Параметры связанных генераторов оставим прежними. На рис. 7 построена взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду $A_2 = 0.1 \text{ В}$, период $T_2 = 40 \text{ мс}$ и длительность $M_2 = T_2/2$. При шаге изменения s , равном 0.1 мс , график $C_2(s)$ имеет максимум при $s = 16.3 \text{ мс}$, то есть, время запаздывания восстанавливается с высокой точностью.

Заключение

Предложены методы реконструкции модельных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом для ансамблей связанных систем с задержкой по их временным рядам. Методы восстановления времени запаздывания опираются на закономерности расположения экстремумов во временных реализациях наблюдаемых колебаний, либо основаны на анализе отклика системы на слабое внешнее воздействие в виде прямоугольных импульсов. Достоинством первого метода является его простота и высокое быстродействие, а недостатком – невозможность его применения к системам с задержкой в периодических режимах и при высоких уровнях шума. Достоинством второго метода является его эффективность для систем, находящихся как в периодических, так и в хаотических режимах колебаний, и возможность использования при сильной связи элементов и высоких уровнях шума. Недостатком является необходимость активного воздействия на исследуемую систему, что сужает возможности применения этого метода на практике. Например, такой метод нельзя использовать для реконструкции динамических систем по временным рядам, полученным в результате пассивных наблюдений. Для применения метода мы должны иметь доступ к динамической переменной исследуемой системы и иметь возможность ее возмущения внешним сигналом. При этом внешнее воздействие не должно приводить к срыву автоколебаний. С другой стороны, метод допускает использование импульсов малой амплитуды, что сводит воздействие на систему к минимуму и позволяет избежать качественных изменений ее динамики.

Для восстановления параметров инерционности, коэффициентов связи и нелинейных функций ансамбля связанных систем с задержкой использован метод, основанный на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в специальном образом выбранные подпространства малой размерности.

Эффективность методов продемонстрирована на примере хаотических и периодических временных рядов цепочек диффузионно связанных модельных систем с

запаздыванием для случаев однонаправленной и взаимной связи элементов, в том числе с добавленным шумом, а также на примере экспериментальных временных рядов цепочки связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью.

Описанный подход не имеет ограничений на число элементов в цепочке. Кроме того, метод может быть распространен на связанные системы с запаздыванием высокого порядка и с несколькими временами задержки. Однако вычислительные затраты при этом существенно возрастают, так как требуется восстанавливать больше параметров. В случае синхронизации элементов цепочки диффузионно связанных систем с запаздыванием метод позволяет восстановить параметры локальных элементов, но коэффициенты связи определить не удастся.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-02-00980, и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
2. *Glass L., Mackey M.C.* From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life. Princeton: Princeton University Press, 1988.
3. *Mokhov I.I., Smirnov D.A.* El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // *Geophys. Res. Lett.* 2006. Vol. 33. L03708.
4. *Ikeda K.* Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // *Opt. Commun.* 1979. Vol. 30. P. 257.
5. *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection lasers // *IEEE J. Quantum Electron.* 1980. Vol. 16. P. 347.
6. *Peil M., Jacquot M., Chembo Y.K., Larger L., Erneux T.* Routes to chaos and multiple time scale dynamics in broadband bandpass nonlinear delay electro-optic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. 026208.
7. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
8. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969.
9. *Fowler A.C., Kember G.* Delay recognition in chaotic time series // *Phys. Lett. A.* 1993. Vol. 175. P. 402.
10. *Hegger R., Büchner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* Identifying and modeling delay feedback systems // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81. P. 558.
11. *Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L., Cuenot J.-B., Levy P., Rhodes W.T.* Cracking chaos-based encryption systems ruled by nonlinear time delay differential equations // *Phys. Lett. A.* 2003. Vol. 308. P. 54.

12. *Tian Y.-C., Gao F.* Extraction of delay information from chaotic time series based on information entropy // *Physica D.* 1997. Vol. 108. P. 113.
13. *Kaplan D.T., Glass L.* Coarse-grained embeddings of time series: Random walks, gaussian random process, and deterministic chaos // *Physica D.* 1993. Vol. 64. P. 431.
14. *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Rau U., Parisi J.* Recovery of scalar time-delay systems from time series // *Phys. Lett. A.* 1996. Vol. 211. P. 345.
15. *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A., Hegger R., Kantz H., Meucci R., Politi A.* Reconstruction of systems with delayed feedback: (I) Theory // *Eur. Phys. J. D.* 2000. Vol. 10. P. 165.
16. *Voss H., Kurths J.* Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // *Phys. Lett. A.* 1997. Vol. 234. P. 336.
17. *Ellner S.P., Kendall B.E., Wood S.N., McCauley E., Briggs C.J.* Inferring mechanism from time-series data: Delay differential equations // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 182.
18. *Voss H.U., Schwache A., Kurths J., Mitschke F.* Equations of motion from chaotic data: A driven optical fiber ring resonator // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 256. P. 47.
19. *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* Parameter estimation in nonlinear delayed feedback systems from noisy data // *Phys. Lett. A.* 2002. Vol. 299. P. 513.
20. *Ortín S., Gutiérrez J.M., Pesquera L., Vasquez H.* Nonlinear dynamics extraction for time-delay systems using modular neural networks synchronization and prediction // *Physica A.* 2005. Vol. 351. P. 133.
21. *Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 056216.
22. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series // *Physica D.* 2005. Vol. 203. P. 209.
23. *Mensour B., Longtin A.* Synchronization of delay-differential equations with application to private communication // *Phys. Lett. A.* 1998. Vol. 244. P. 59.
24. *Shahverdiev E.M., Sivaprakasam S., Shore K.A.* Parameter mismatches and perfect anticipating synchronization in bidirectionally coupled external cavity laser diodes // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. 017206.
25. *Bocharov G.A., Rihan F.A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // *J. Comp. Appl. Math.* 2000. Vol. 125. P. 183.
26. *Kotani K., Takamasu K., Ashkenazy Y., Stanley H.E., Yamamoto Y.* Model for cardio-respiratory synchronization in humans // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. 051923.
27. *Yanchuk S., Perlikowski P.* Delay and periodicity // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. 046221.
28. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Estimation of coupling between time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. 016210.
29. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80. 066206.

30. *Pyragas K.* Synchronization of coupled time-delay systems: Analytical estimations // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 3067.
31. *Burić N., Vasović N.* Global stability of synchronization between delay-differential systems with generalized diffusive coupling // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2007. Vol. 31. P. 336.
32. *Ikeda K., Matsumoto K.* High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // *Physica D.* 1987. Vol. 29. P. 223.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН*

*Поступила в редакцию 12.04.2010
После доработки 12.10.2010*

RECONSTRUCTION OF ENSEMBLES OF COUPLED TIME-DELAY SYSTEMS FROM TIME SERIES

M.D. Prokhorov, V.I. Ponomarenko

The methods for the reconstruction of model delay-differential equations for ensembles of coupled time-delay systems from their time series are proposed. The methods efficiency is illustrated using chaotic and periodic time series from chains of diffusively coupled model and experimental time-delay systems for the cases of unidirectional and mutual coupling.

Keywords: Reconstruction of equations, time series analysis, dynamical modeling, time-delayed feedback.



Прохоров Михаил Дмитриевич – родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 100 научных публикаций.

410019, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru



Пonomаренко Владимир Иванович – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

410019, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com