



СВЯЗАННЫЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ РАЗНОЙ ПРИРОДЫ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ И БРЮССЕЛЯТОРА

Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов

На примере связанных осцилляторов ван дер Поля и брюсселятора рассматривается задача о взаимодействии автоколебательных элементов разной природы. Выявлена картина смены доминирующего осциллятора при увеличении параметра связи. Указаны области различных типов динамики в пространстве параметров. Обсуждается случай существенно разных собственных частот.

Ключевые слова: Автоколебания, связанные осцилляторы, синхронизация, квазипериодическая динамика.

Введение

Задача о динамике двух диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов (автогенераторов) является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике (см. [1–11] и цитированную там литературу). Основные эффекты, которые демонстрируют такие осцилляторы – это взаимный захват с различным соотношением частот, квазипериодические колебания и эффект гашения («гибели») колебаний, имеющий место при достаточно большой величине диссипативной связи. Этим режимам отвечают различные области на плоскости параметров частотная расстройка осцилляторов – величина связи.

Значительная часть литературы посвящена различным аспектам задачи, относящимся к случаю осцилляторов, идентичных по параметру возбуждения¹. Сравнительно недавно выяснилось, что случай неидентичных осцилляторов важен и требует специального дополнительного анализа [11–17]. Такой анализ выявил еще один своеобразный тип поведения, которому на плоскости параметров отвечает область, разделяющая области гибели колебаний и квазипериодической динамики. Для него

¹Параметру, отвечающему за отрицательное трение в осцилляторах.

в [12–14] был предложен термин «режим широкополосной синхронизации». В этом режиме один из осцилляторов в определенной мере доминирует. Различные аспекты такого режима обсуждались в [12–14]: построены карты динамических режимов, исследована эволюция чисел вращения с ростом частотной расстройки и т.д. Бифуркационный анализ неидентичных автоколебательных систем проведен в [15–16]. Он выявил, что языки синхронизации в таком случае бывают двух типов, причем для одного из них характерны как области захвата, так и области подавления. Благодаря этому внутри области широкополосной синхронизации возможен эволюционный механизм изменения числа вращения при изменении частотной расстройки. Для идентичных же систем с диссипативной связью характерны нетипичные выродившиеся бифуркации, которые появляются за счет того, что связь одновременно подавляет колебания обоих осцилляторов [11, 15, 16]. В этом плане задача оказывается существенно иной, чем в случае вынужденной синхронизации. В работе [17] обращено внимание еще на один фактор, влияющий на картину синхронизации – это неидентичность по параметрам нелинейной диссипации, отвечающим за насыщение нелинейных колебаний. В такой системе возможно доминирование как одного, так и второго осциллятора, а также ситуация постепенной смены доминирующего осциллятора при увеличении связи. Эти физические особенности системы существенным образом проявляются в устройстве плоскости частотная расстройка – величина связи осцилляторов. Соответствующая картина наблюдалась в радиофизическом эксперименте [17].

В этой работе мы хотим обратить внимание на еще один важный аспект проблемы взаимодействия автоколебательных осцилляторов, а именно на ситуацию, когда взаимосвязаны осцилляторы разных типов. В картине взаимодействия таких систем можно ожидать появления черт, описанных в [17] и характерных именно для подсистем, неидентичных по обоим указанным параметрам. Действительно, хотя каждая из подсистем по отдельности у порога возникновения автоколебаний может быть приведена к нормальной форме бифуркации Андронова–Хопфа, но в типичном случае соответствующие параметры окажутся разными. Для реализации случая одинаковых параметров необходимо как-то специально настраивать разнотипные системы. Более того, если отойти от порога бифуркации, свойства автономной динамики подсистем будут изменяться также по-разному. Описание взаимодействия разных автоколебательных систем важно как с позиции теории колебаний, так и для приложений. Действительно, если говорить о хрестоматийном примере с «недобросовестными часовщиками» [18], то в случае разных часов, связанных через малые колебания стены, приходим именно к этой ситуации. Аналогично многие связанные биофизические процессы (классический пример о синхронизации взмахов крыла и частоты дыхания летящей утки [1]) – это взаимодействие различных автоколебательных элементов. Введение связи между разнотипными автогенераторами может представлять интерес и в радиофизике с точки зрения формирования сигнала с более широким спектром свойств и возможностей управления. В настоящей работе мы рассматриваем в указанном контексте задачу о взаимодействии осциллятора ван дер Поля и брюсселятора, являющихся эталонными автоколебательными моделями теории колебаний.

1. Связанные автоколебательные осцилляторы – ван дер Поля и брюсселятор. Характер связи

Пусть имеются две разнотипные автоколебательные системы – осциллятор ван дер Поля и брюсселятор. Введем связь между ними через первую переменную брюсселятора

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a - (b + 1)x + x^2y + \mu \left(\frac{dz}{dt} - x + a \right), \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - (\lambda - z^2)\frac{dz}{dt} + (1 + \Delta)z &= \mu \left(x - a - \frac{dz}{dt} \right).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь a, b – внутренние параметры брюсселятора [18], λ – управляющий параметр осциллятора ван дер Поля, отвечающий за отрицательное трение, параметр Δ характеризует отстройку собственной частоты осциллятора ван дер Поля от единичной, μ – параметр связи.

Введение связи между разнотипными моделями автоколебательных систем представляется априорно нетривиальной задачей. Действительно, переменные разных осцилляторов имеют разный смысл. Поэтому, если связь вводить эмпирически, то есть не подбирать некоторым специальным образом, то она, скорее всего, будет иметь как диссипативную компоненту, так и реактивную, и, возможно, будет асимметричной. Продемонстрируем это на примере системы (1).

Чтобы выяснить характер связи в (1), воспользуемся линейным приближением, описывающим динамику брюсселятора вблизи состояния равновесия. Автономный брюсселятор имеет неподвижную точку²

$$x_0 = a, y_0 = \frac{b}{a}.\quad (2)$$

Рассмотрим динамику малых возмущений вблизи этой точки, положив

$$x = a + \xi, \quad y = \frac{b}{a} + \eta.\quad (3)$$

Подставим соотношения (3) в (1) и, пренебрегая членами второго порядка по возмущениям, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= (b - 1)\xi + a^2\eta + \mu \left(\frac{dz}{dt} - \xi \right), \\ \frac{d\eta}{dt} &= -b\xi - a^2\eta, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - (\lambda - z^2)\frac{dz}{dt} + (1 + \Delta)z + \mu \left(\frac{dz}{dt} - \xi \right) &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

²Неподвижная точка брюсселятора не совпадает с началом координат. Поэтому связь в системе (1) организована так, чтобы она реагировала на отклонение переменной брюсселятора от состояния равновесия.

Введем теперь новую переменную θ , так что $\xi = d\theta/dt$. Тогда из первого уравнения (4) получаем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (b-1)\frac{d\theta}{dt} - a^2\eta + \mu\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) = 0. \quad (5)$$

Проинтегрируем второе уравнение (4)

$$\eta = -b\theta - a^2 \int \eta dt. \quad (6)$$

Аналогично, интегрируя (5), находим

$$\frac{d\theta}{dt} + (1-b)\theta - a^2 \int \eta dt + \mu(\theta - z) = 0. \quad (7)$$

Если из (6) и (7) исключить $\int \eta dt$, то получим

$$\eta = -\frac{d\theta}{dt} - \theta - \mu(\theta - z). \quad (8)$$

Подставляем этот результат в (5). Тогда, совместно с третьим уравнением (4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} - (b-a^2-1)\frac{d\theta}{dt} + a^2\theta + \mu\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) + a^2\mu(\theta - z) &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - (\lambda - z^2)\frac{dz}{dt} + (1+\Delta)z + \mu\left(\frac{dz}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, мы получили два связанных осциллятора. Первый из них – линейризованный брюсселятор. Как видно из (9), для него возможность бифуркации Андронова–Хопфа определяется фактором

$$\Lambda = b - a^2 - 1, \quad (10)$$

а частота колебаний – параметром a . При этом связь имеет взаимную диссипативную компоненту, регулируемую параметром μ . Имеется также и реактивная одно-сторонняя компонента связи, отвечающая воздействию осциллятора ван дер Поля на брюсселятор³.

2. Устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи

Обратимся теперь к устройству плоскости параметров частотная расстройка–величина связи (Δ, μ) системы (1). Для ее исследования используем метод карт динамических режимов [19]. В рамках этого метода в каждой точке плоскости параметров численно определяется период режима в сечении Пуанкаре, а затем эта точка окрашивается в определенный цвет, свой для каждого периода цикла в сечении Пуанкаре. При этом непериодические режимы (квазипериодическая динамика и хаос) обозначаются белым цветом. Система (1) является четырехмерной, так что сечением Пуанкаре для нее является некоторая гиперповерхность, в качестве которой удобно

³Эти оценки справедливы, однако, только вблизи порога бифуркации Андронова–Хопфа.

выбирать условие равенства нулю скорости одного из осцилляторов [12–14]. В нашем случае будем выполнять сечение по осциллятору ван дер Поля, так что $\dot{z} = 0$.

Карта динамических режимов системы (1) на плоскости параметров (Δ, μ) для $b = 4$, $a = 1$, $\lambda = 1.5$ показана на рис. 1, *a*. Прежде всего отметим, что в системе наблюдается эффект гибели колебаний, что обусловлено диссипативной компонентой связи. При выбранных значениях параметров $b = 4$, $a = 1$ в соответствии с (10) $\Lambda = 2$. Таким образом, $\Lambda > \lambda$, и брюсселятор является более возбужденным, нежели осциллятор ван дер Поля. В рамках этой оценки нижняя граница области гибели колебаний должна отвечать величине диссипативной составляющей связи, равной управляющему параметру наиболее возбужденного осциллятора. В этом случае $\mu \approx \Lambda = 2$, что согласуется с рис. 1, *a*.

В области малой связи на рис. 1, *a* наблюдаются квазипериодические режимы с системой языков Арнольда, из которых самый широкий имеет период 2 в сечении Пуанкаре. На фазовом портрете брюсселятора хорошо проявляются возмущения, определяющие характер режима: периода 2 на рис. 1, *б* и квазипериодического на рис. 1, *в*. В последнем случае возмущение очень сильное, оно разрушает полностью исходный предельный цикл брюсселятора. При этом осциллятор ван дер Поля возмущен слабо, и его фазовый портрет на рис. 1, *б*, *в* выглядит невозмущенным. Однако, если рассмотреть его с существенным увеличением, как показано на фрагментах рис. 1, *б*, *в*, то можно зафиксировать структуру, характерную для режима периода 2 и квазипериодического режима.

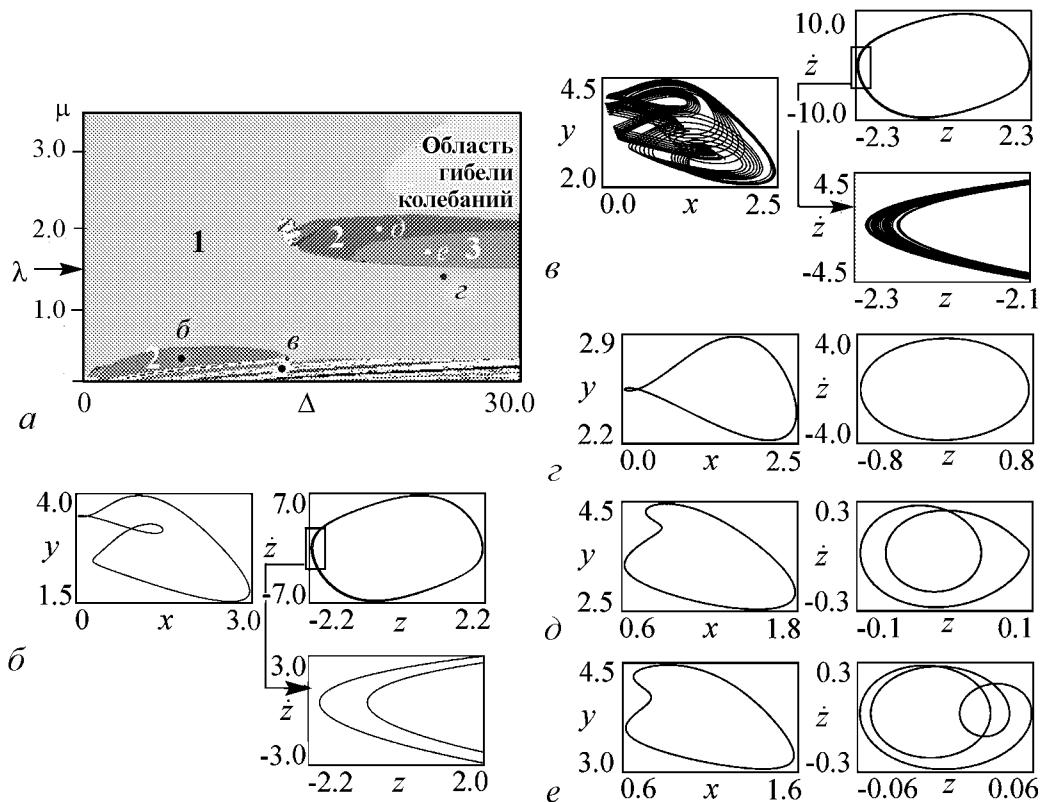


Рис. 1. Карта динамических режимов системы (1) связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора (*a*); характерные фазовые портреты (*б–е*) брюсселятора (слева) и осциллятора ван дер Поля (справа). Значения параметров $b = 4$, $a = 1$, $\lambda = 1.5$

Таким образом, в области малых значений связи доминирует осциллятор ван дер Поля, хотя брюсселятор и является более возбужденным. Поэтому наблюдаемую картину нельзя объяснить только на основе различий управляющих параметров λ и Λ . В этом случае определенную роль играют различия в размерах предельных циклов «разнотипных» осцилляторов. (Сравните характерные масштабы на фазовых портретах брюсселятора и осциллятора ван дер Поля на рис. 1, в). Так же проявляется наличие односторонней компоненты реактивной связи, отвечающей действию осциллятора ван дер Поля на брюсселятор (см. пункт 1).

Если теперь увеличить связь, то попадаем в область периода 1. На рис. 1, а она имеет вид языка с характерным, очень широким по связи «отростком». Внутри этой области по-прежнему доминирует осциллятор ван дер Поля, однако его предельный цикл с ростом величины связи на рис. 1, г немного искажается по форме по сравнению с рис. 1, б, в, что отвечает более существенному влиянию брюсселятора.

Верхняя граница области периода 1 отвечает условию равенства величины связи управляющему параметру осциллятора ван дер Поля, $\mu \approx \lambda$, так что выше нее этот осциллятор становится сильно диссипативным, и его колебания оказываются подавленными. Возникает режим широкополосной синхронизации с доминированием брюсселятора. При этом для значений $\mu > \lambda$ наблюдается еще одна система областей более высоких периодов. Несколько отвечающих ей фазовых портретов показаны на рис. 1, д, е. Теперь слабо возмущенным выглядит фазовый портрет брюсселятора. Фазовый портрет осциллятора ван дер Поля, наоборот, становится сильно возмущенным и представляет собой двухоборотный предельный цикл на рис. 1, д. При этом размер предельного цикла осциллятора ван дер Поля резко падает (примерно в 30 раз при переходе от рис. 1, в к рис. 1, д). Если увеличить теперь частоту осциллятора ван дер Поля (то есть параметр Δ), то можно наблюдать увеличение числа петель на фазовом портрете осциллятора ван дер Поля на рис. 1, е, что характерно для динамики ведомого осциллятора. Это подтверждает тот факт, что в этой области доминирует брюсселятор. Таким образом, в данной системе возможна смена доминирующего осциллятора: в области малых значений связи доминирует осциллятор ван дер Поля, а больших – брюсселятор.

Описанная картина на качественном уровне в определенной мере укладывается в ту, которая характерна для неидентичных по управляющим параметрам и параметрам нелинейной диссипации осцилляторов ван дер Поля [17]. Это не удивительно: если системы разнотипны, то, как мы уже отмечали, добиться ситуации с идентичными параметрами можно только каким-то их специальным выбором. Поэтому режимы широкополосной синхронизации с характерными особенностями устройства плоскости параметров будут типичными для связанных автоколебательных элементов разной природы.

Увеличим теперь параметр брюсселятора до значения $b = 5$, и обратимся к карте на рис. 2, а. В этом случае брюсселятор еще более возбужден и, соответственно, в поле зрения на карте область гибели колебаний отсутствует. При этом устройство системы областей, лежащих выше полосы периода 1, существенно усложняется. Кроме отмеченных при обсуждении рис. 1 циклов периода 2 и 3 появляются циклы более высоких периодов, примеры которых для осциллятора ван дер Поля даны на рис. 2, б–г. При этом могут реализоваться как достаточно долгопериодические режимы (например, период 10), так и непериодические режимы. Их появление обусловле-

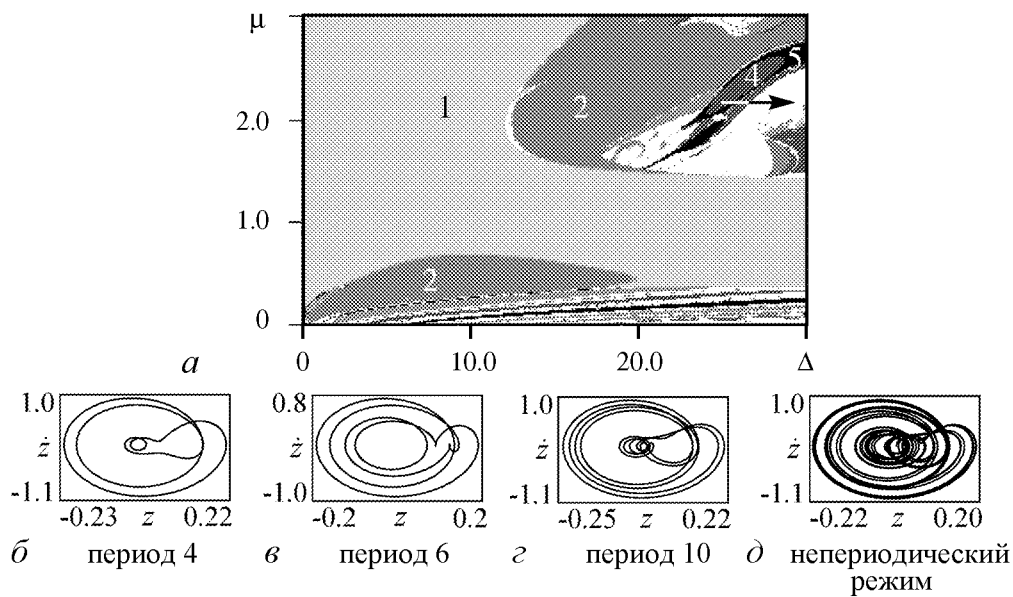


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (1) для $b = 5$, $\lambda = 1.5$, $a = 1.0$ (а); фазовые портреты осциллятора ван дер Поля вдоль маршрута, отмеченного стрелкой на карте (б–д)

но примерным «равноправием» осцилляторов, что приводит к достаточно сложному устройству и того, и другого аттрактора – оба они заметно возмущают друг друга. При этом, однако, никакого типичного сценария (удвоения периода, система языков Арнольда) не наблюдается.

3. Связанные автоколебательные осцилляторы с разными временными масштабами

Выше был рассмотрен случай, когда второй параметр брюсселятора $a = 1.0$, что в соответствии с п. 1 отвечает примерно равенству его собственной частоты и частоты осциллятора ван дер Поля при $\Delta = 0$. Если уменьшить этот параметр до значения $a = 0.4$, то собственные частоты подсистем будут сильно разнесены. Частота брюсселятора теперь заметно уменьшилась, так что осциллятор ван дер Поля относительно него «вращается» быстрее. Этот факт сказывается заметным образом как на карте режимов, так и на фазовых портретах, показанных на рис. 3. Теперь область «гибели колебаний» окружена достаточно широкой полосой режимов, которые на карте фиксируются как неперидические.

В этой области реализуются весьма характерные фазовые портреты. Изображающая точка на фазовом портрете осциллятора ван дер Поля быстро вращается вокруг начала координат и очень медленно приближается к нему (рис. 3, б). Эта стадия эволюции напоминает режим гибели колебаний. Однако, совершив большое число оборотов, точка подходит к началу координат, она резко выбрасывается, и затем процесс повторяется. Возникает своего рода режим «пульсирующей генерации», который иллюстрирует показанная на рис. 4 зависимость от времени переменной осциллятора ван дер Поля.

Портрет соответствующего режима для брюсселятора представлен слева на рис. 3, б. Медленное движение брюсселятора происходит в окрестности неподвиж-

ной точки $x_0 = a = 0.4$ с малой амплитудой $|x| \leq 0.5$. Это значит, что брюсселятор слабо возмущает осциллятор ван дер Поля, который при данной величине параметра μ оказывается слабо диссипативным ($\lambda < \mu$). Поэтому он и совершает колебания с медленно убывающей амплитудой. Когда эта фаза колебаний брюсселятора заканчивается, его изображающая точка уходит от $x = x_0$, и начинается быстрая стадия, которая существенно возмущает осциллятор ван дер Поля.

На рис. 5 показаны трехмерные фазовые портреты осцилляторов, на которых пара фазовых переменных каждого автономного осциллятора дополнена переменной другого. Из соответствующего портрета осциллятора ван дер Поля (рис. 5, б) можно видеть, что режим пульсирующей генерации отвечает (по крайней мере, на качественном уровне) ситуации разрушения гомоклинической петли [19].

Для более корректной характеристики наблюдаемых режимов на рис. 6 показаны графики зависимости старшего показателя Ляпунова от частотной расстройки осцилляторов для двух значений связи $\mu = 1.3$ и $\mu = 1.7$. При $\mu = 1.3$ на рис. 6, а для значений расстройки Δ , отвечающих областям периода 2 и 1, показатель Ляпу-

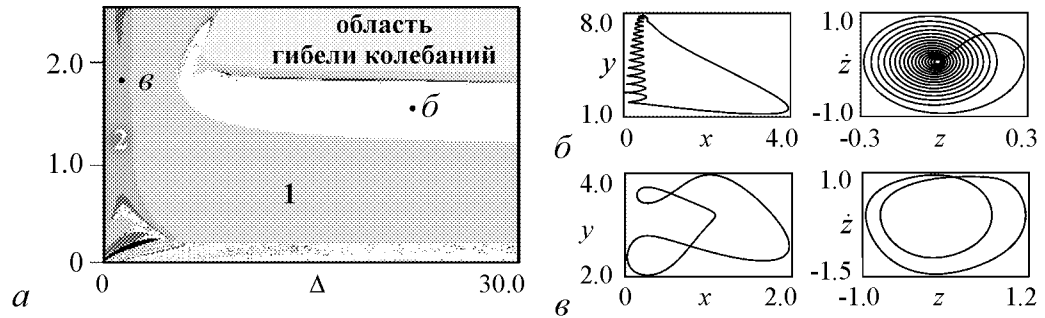


Рис. 3. Карта динамических режимов системы (1) (а) и характерные фазовые портреты (б-в) брюсселятора (слева) и осциллятора ван дер Поля (справа); $b = 3$, $\lambda = 1.16$, $a = 0.4$

Рис. 4. Реализации осциллятора ван дер Поля в режиме «пульсирующей генерации». Параметры отвечают рис. 3, б

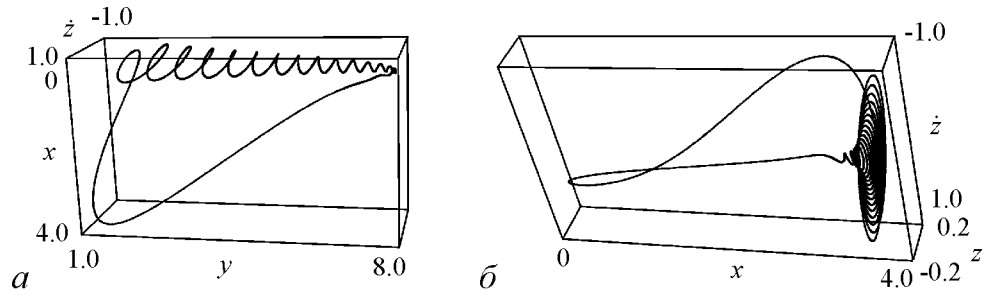
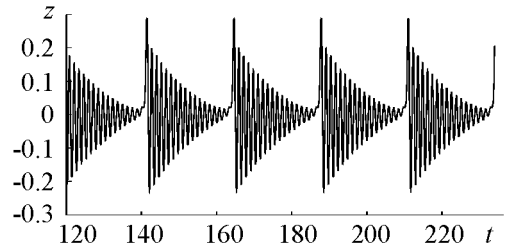


Рис. 5. Трехмерные фазовые портреты брюсселятора (а) и осциллятора ван дер Поля (б). Значения параметров отвечают рис. 3, б

нова отрицателен. При переходе в область неперидического режима показатель Ляпунова становится положительным. Таким образом, наблюдаемые неперидические режимы являются хаотическими. При увеличении связи и приближении к области гибели колебаний характер зависимости в определенной мере меняется (рис. 6, б). Теперь на графике имеются выраженные окна хаотических режимов (на рис. 6, б четко видны три таких окна). Между ними показатель осциллирует, при этом его средний уровень очень мал, например, в области между первым и вторым хаотическими «всплесками» составляет примерно 0.003. Таким образом, при приближении к области гибели колебаний хаос становится слабым.

На рис. 3, а область неперидических режимов и область гибели колебаний на самом деле разделены узкими полосами режимов разных периодов, что можно видеть на увеличенном фрагменте карты на рис. 7, а. Характер фазовых портретов го-

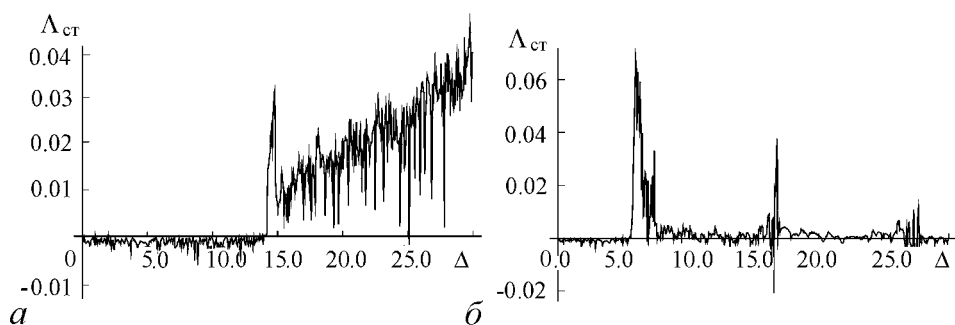


Рис. 6. Зависимость старшего показателя Ляпунова от частотной расстройки осцилляторов Δ при $\mu = 1.3$ (а), $\mu = 1.7$ (б)

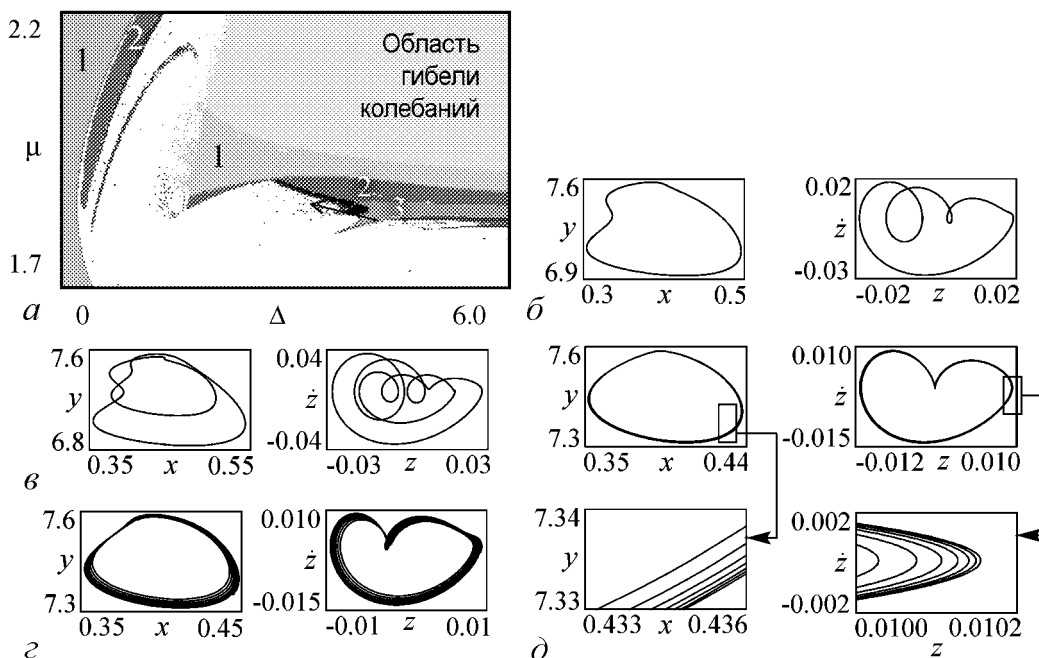


Рис. 7. Фрагмент карты динамических режимов рис. 3 (а); характерные фазовые портреты брусслатора (слева) и осциллятора ван дер Поля (справа) вдоль маршрута, указанного стрелкой на карте (б-д)

ворит о доминировании брюсселятора – размер аттрактора осциллятора ван дер Поля очень мал. При этом он сильно возмущен и сильно трансформируется даже при малом изменении расстройки. Возникающий при движении по указанному маршруту хаотический режим отвечает очень слабо выраженной поперечной структуре обоих аттракторов, что хорошо видно на нижних фазовых портретах. Таким образом, это режимы «слабого хаоса», для которых, как мы отмечали, ляпуновский показатель очень мал. Интересно, что переход к хаосу в определенной мере стабилизирует фазовый портрет осциллятора ван дер Поля, что видно из сравнения рис. 7, *г*, *д* и рис. 7, *в* – большое количество петель, охватывающих начало координат, исчезает.

Вернемся к карте на рис. 3, *а*. При малой частотной расстройке Δ на этой карте реализуется режим периода 2, фазовый портрет которого приведен на рис. 3, *в*. Это и понятно: в этом случае частота брюсселятора примерно в 2 раза меньше частоты осциллятора ван дер Поля. При уменьшении связи из этого режима возникает режим периода 4. Увеличенный фрагмент карты в этой области представлен на рис. 8, *а*. Фазовые портреты брюсселятора на рис. 8, *б–г* иллюстрируют удвоения периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму.

Еще ниже на карте рис. 8, *а* можно видеть систему языков синхронизации разных периодов. Фазовые портреты брюсселятора и осциллятора ван дер Поля для режима синхронизации периода 3 показаны на рис. 8, *д*. В этом случае доминирует осциллятор ван дер Поля – его фазовый портрет выглядит невозмущенным, но увеличенный фрагмент орбиты демонстрирует структуру, отвечающую периоду 3.

Рассмотренный в этом разделе случай дает интересный пример взаимодействия автоколебательных осцилляторов с существенно разными временными масштабами. (Собственная частота осциллятора ван дер Поля примерно в 12 раз больше собственной частоты брюсселятора, если $\Delta \approx 25$, $a = 0.4$). Отметим, что задачи о взаимодействии автоколебательных осцилляторов с разными временными масштабами интересны как с «общеколебательной» точки зрения, так важны и для приложений, в частности, в биофизике [20].

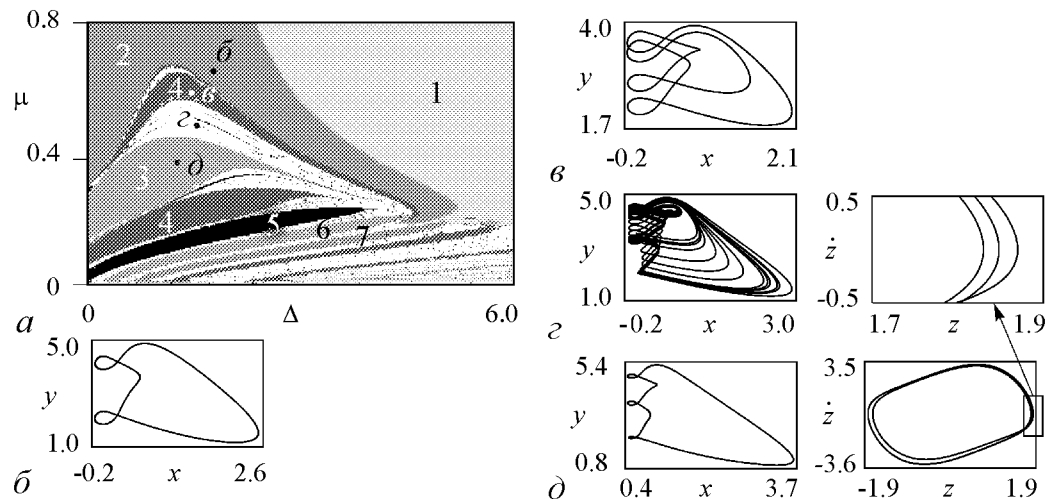


Рис. 8. Фрагмент карты динамических режимов рис. 3 (*а*); характерные фазовые портреты (*б–д*) брюсселятора (левая колонка), в правой колонке показан фазовый портрет осциллятора ван дер Поля для точки *д* и его увеличенный фрагмент)

Заключение

На примере связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора показано, что при взаимодействии автоколебательных систем разной природы динамика будет иметь черты, характерные для связанных систем с неидентичными управляющими параметрами и параметрами, ответственными за нелинейную диссипацию. При этом на плоскости параметров частотная расстройка – величина связи основной язык синхронизации имеет «отросток» в виде сколь угодно широкой полосы по частоте и конечной ширины по величине связи. Выше этой полосы происходит смена доминирующего осциллятора. При этом возникает система достаточно протяженных по частоте областей, которые отвечают увеличению числа петель на фазовом портрете одного из осцилляторов и, соответственно, разным периодам в сечении Пуанкаре. Выше этих областей подавленными оказываются колебания обоих осцилляторов. Если собственные частоты связывающихся систем существенно различаются, то полоса режима основной синхронизации отделена от области гибели колебаний полосой хаотических режимов. Динамика осциллятора ван дер Поля состоит в этом случае из стадии медленного приближения к положению равновесия и стадии быстрого выброса изображающей точки из его окрестности и носит характер «пульсирующей генерации». Вид аттрактора при этом качественно отвечает ситуации разрушения гомоклинической петли. С ростом уровня связи наблюдаются режимы «слабого хаоса» с малыми значениями показателя Ляпунова.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-02-00707-а и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
5. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
6. Rand R., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1980. Vol. 15. P. 387.
7. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1982. Vol. 17 (3). P. 143.
8. Chakraborty T., Rand R.H. The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
9. Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 1993. Vol. 48. P. 171.

10. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 48.
11. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
12. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 15. С. 15.
13. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
14. *Kuznetsov A.P., Roman Ju. P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // *Physica D*238. 2009. № 16. P. 1499.
15. Астахов В.В., Коблянский С.А Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Бифуркационный анализ динамики диссипативно связанных генераторов ван дер Поля // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. Вып. 9. С. 61.
16. Астахов В.В, Коблянский С.А, Шабунин А.В. Бифуркационный анализ режимов синхронизации и гашения колебаний в связанных генераторах с инерционной нелинейностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С.79.
17. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П. Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С.62.
18. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 292 с.
19. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
20. Иванченко М.В. Генерация и синхронизация колебаний в системах с «многомасштабным» хаосом. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 138 с.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 25.03.2010

COUPLED SELF-SUSTAINED OSCILLATORS OF DIFFERENT NATURE BY EXAMPLE OF VAN DER POL SYSTEM AND BRUSSELEATOR

Yu.P. Emelianova, A.P. Kuznetsov

Problem of interaction between self-sustained oscillating systems of different nature is discussed by an example of coupled brusselator and van der Pol oscillator. Picture of leading oscillator changing with the growth of coupling parameter is shown. Areas of

different types of dynamics are indicated in the parameter space. The case of essentially different eigenfrequencies is discussed.

Keywords: Self-oscillations, coupled oscillators, synchronization, quasiperiodic dynamics.



Емельянова Юлия Павловна – родилась 17 февраля 1987 года в Венгрии г. Секешфехервар, окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского с красным дипломом в 2009 году. Занимается научной работой под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова с 2002 года. Научные интересы – исследование особенностей синхронизации в связанных осцилляторах ван дер Поля. Победитель студенческих научных конференций факультета нелинейных процессов СГУ, лауреат фонда поддержки фундаментальной физики «Династия» (2008), признана лучшим студентом ФНП в 2006/07 и 2007/08 учебных годах. Лауреат стипендии Президента РФ как «студент – отличник, проявивший выдающиеся способности в учебной и научной деятельности» (2008/09). Автор 17 публикаций, в том числе 5-ти статей в российских и международных журналах.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: yuliaem@gmail.com



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: apkuz@rambler.ru