

РОЖДЕНИЕ УСТОЙЧИВОГО ТОРА ИЗ ЗАМКНУТОЙ ОСОБОЙ КРИВОЙ И ЕГО БИФУРКАЦИИ В ЛАЗЕРНОЙ СИСТЕМЕ С ОТСТРОЙКОЙ ЧАСТОТЫ

А.А. Крениц, Н.Е. Молевич

Показано, что в модели Максвелла–Блоха реализуется режим устойчивых двухчастотных колебаний. Установлено, что происходит рождение устойчивого двумерного эргодического тора из замкнутой особой кривой. Найдены условия перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода тора. Установлено, что в точках бифуркаций удвоения рождается структурно неустойчивый трехмерный тор, который порождает устойчивый удвоенный эргодический тор. Найдена аналитическая аппроксимация, удовлетворительно описывающая динамику системы вблизи точки рождения тора.

Ключевые слова: Широкоапертурные лазеры, бифуркация удвоения периода тора, эргодический тор, хаос.

Введение

Открытие странного аттрактора связывают обычно с работой Лоренца [1], в которой были обнаружены и исследованы хаотические решения нелинейных уравнений, описывающих процесс конвекции. Однако еще раньше хаотические решения были численно получены Грасюком и Ораевским при решении трех точечных уравнений неадиабатической теории мазеров и лазеров. Результаты этих исследований были представлены на международных конференциях (см., например, [2]) и затем подробно опубликованы в ряде изданий, обзор которых можно найти в [3]. Как было затем показано Хакеном [4], эта модель лазера математически точно совпадает с более поздней моделью Лоренца. После этой работы было осознано, что лазер принадлежит к числу систем способных демонстрировать сложное хаотическое поведение и является удобным объектом для исследования различных сценариев перехода к хаосу.

В [5] было показано, что при условиях точечной лазерной системы, соответствующих существованию в фазовом пространстве странного аттрактора Лоренца, траектории лазерного поля обладают при наличии отстройки частоты генерации непрерывной вращательной симметрией и могут наблюдаться окна регулярности, в которых происходят бифуркации удвоения тора.

В последнее время широко исследуются процессы, происходящие в поперечном сечении световой волны, распространяющейся в широкоапертурных лазерных и пассивных оптических системах [6]. Большая область таких явлений, включающая возникновение в поперечном сечении широкоапертурных резонаторов упорядоченных или хаотических пространственно-временных оптических структур, в настоящее время образует направление названное поперечной нелинейной оптикой. В [7–9] теоретически и экспериментально было показано, что с увеличением числа Френеля или параметра накачки в широкоапертурном резонаторе неодимового лазера происходит переход от стационарных поперечных картин к периодическим, квазипериодическим и сильно нерегулярным, возможно, хаотическим картинкам. Аналогичные результаты были получены в [9–11] для электроразрядного CO₂ лазера, а также широкоапертурного полупроводникового лазера [12].

Для описания этих явлений необходимо проведение исследований уже не точечных, а распределенных динамических систем. В [11, 13–15] было показано, что наблюдаемые эффекты могут быть качественно объяснены на основе простой системы уравнений Максвелла–Блоха с отстроенной продольной частотой. Были найдены условия рождения бегущих периодических волн в результате бифуркации Андронова–Хопфа.

В работе [16] найдено условие, при котором возможно адиабатически исключить поляризацию из уравнений Максвелла–Блоха. Исследование таких упрощенных уравнений с исключенной поляризацией также показало, что при отрицательно отстроенной частоте возможно возникновение периодических оптических волн, бегущих поперек апертуры, найдены инкременты нарастания, частота и скорость этих волн в аналитическом виде [17–19].

В [20] впервые математически строго показано, что в автоматической системе уравнений Максвелла–Блоха с адиабатически исключенной поляризацией переход к хаотическому режиму (при изменении скорости распространения волны поперек апертуры) осуществляется через бифуркации удвоения эргодического двумерного тора. Ранее в [21] было показано, что при выполнении условий неустойчивости режима стационарной генерации в лазере с отстройкой частоты фазовый портрет, построенный в любой пространственной точке на апертуре в координатах {мнимая и реальные части амплитуды электрического поля, коэффициент усиления}, имеет вид тора. Это соответствует квазипериодическому режиму колебаний компонент поля. Однако причина такого поведения компонент поля и их возможные дальнейшие бифуркации рассмотрены не были.

В настоящей работе предложен механизм возникновения квазипериодических колебаний в автоматической системе Максвелла–Блоха, предусматривающий рождение устойчивого двумерного тора из особой замкнутой кривой, и проведено детальное исследование его дальнейших бифуркаций.

1. Основные уравнения. Линейный анализ устойчивости

Как и в [17,20], в качестве исходной рассмотрим систему уравнений Максвелла–Блоха с адиабатически исключенной поляризацией

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} - i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{v}{2} E \left(\frac{N}{1 + \Delta_0^2} - 1 \right) (1 - i \Delta_0), \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= N_{un} - N \left(1 + \frac{J}{1 + \Delta_0^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Модель (1) описывает пространственно-временную динамику лазера в двухуровневом приближении в предположении, что поляризация мгновенно следует за изменениями оптического поля. Предполагается также, что генерация происходит на одной продольной моде резонатора Фабри–Перо. Здесь E – медленно меняющаяся амплитуда поля в широкоапертурном лазере в одномерном (планарном) приближении, нормированная на величину E_s , E_s – амплитуда поля насыщения в активной среде; $N = g/g_t$, g и g_t – коэффициенты усиления активной среды на центральной частоте лазерного перехода и потери, усредненные по длине резонатора; безразмерное время и координата связаны с размерными величинами t_d и x_d , как $t = t_d/T_i$, $x = x_d(2k/T_i c)^{1/2}$, k – волновое число, c – скорость света, T_i – скорость релаксации населенности уровней активной среды; $\nu = cT_i g_t$ – коэффициент, определяющий отношение времени релаксации населенности активной среды ко времени жизни фотонов в резонаторе; $\Delta_0 = (\omega_0 - \omega)/T_p$ – отстройка частоты генерации от центра линии усиления активной среды, нормированная на полуширину линии усиления, T_p – время релаксации поляризации; $J = |E|^2$, $N_{un} = g_{un}/g_t$, g_{un} – ненасыщенный коэффициент усиления на частоте ω_0 .

Перейдем к автомодельной системе координат и с учетом, что $E = E_1 + iE_2$, получим

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{d\xi} &= Y, \\ \frac{dE_2}{d\xi} &= Z, \\ \frac{dN}{d\xi} &= N_{un} - N \left[1 + \frac{E_1^2 + E_2^2}{1 + \Delta_0^2} \right], \\ \frac{dY}{d\xi} &= -\frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{N}{1 + \Delta_0^2} - 1 \right) (E_2 - \Delta_0 E_1) - Z \right], \\ \frac{dZ}{d\xi} &= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{N}{1 + \Delta_0^2} - 1 \right) (E_1 + \Delta_0 E_2) - Y \right].\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $\xi = t - \beta x$, где $1/\beta$ – скорость волны, распространяющейся в поперечном к оси резонатора направлении.

Динамическая система (2) имеет два состояния равновесия. Первое состояние равновесия соответствует отсутствию генерации: $E = 0$, $N = N_{un}$. В данной работе исследуется второе состояние равновесия системы (2) – нетривиальный стационарный режим генерации с постоянной интенсивностью J_{st} . Интересующему нас режиму стационарной генерации в фазовом объеме соответствует особая окружность: $E_{1st}^2 + E_{2st}^2 = J_{st} = N_{un} - 1 - \Delta_0^2$, $N_{st} = 1 + \Delta_0^2$, $Y_{st} = 0$, $Z_{st} = 0$. Нетрудно убедиться в том, что собственные значения матрицы линеаризации различных особых точек, принадлежащих особой замкнутой кривой, не зависят от угла поворота $\phi = \arctg(E_2/E_1)$ и являются постоянными для любой точки на особой окружности при фиксированном значении параметров модели. От точки к точке будут изменяться лишь собственные векторы матрицы линеаризации. В [17] показано, что стационарное состояние (J_{st}, N_{st}) становится неустойчивым при

$$\beta > \beta_{bif} = \left[-\frac{(1 + I_{st}) \Delta_0}{(1 + I_{st})^2 + \Delta_0^2 \nu I_{st}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$I_{st} = \frac{J_{st}}{1 + \Delta_0^2}, \quad \Delta_0 < 0, \quad \omega_{bif} = \sqrt{\frac{N_{un}^2 + \Delta_0 v I_{st}}{|\Delta_0|}}. \quad (3)$$

В [17] показано также, что при $\beta = \beta_{bif}$ выполняются условия теоремы Андронова–Хопфа о рождении предельного цикла. На фазовой плоскости (J, N) происходит мягкая бифуркация Андронова–Хопфа и рождение устойчивого предельного цикла бесконечно малой амплитуды. Однако, как показано в [20], для оптического поля $E = E_1 + iE_2$ наблюдается более сложная динамика. В фазовом объеме при $\beta = \beta_{bif}$ рождается аттрактор в виде бесконечно тонкой трубки, которая окружает особую замкнутую кривую. Подобную бифуркацию состояния равновесия можно объяснить следующим. Собственные числа для всего множества точек особой окружности равны между собой, и при $\beta = \beta_{bif}$ одновременно для всех точек особой кривой пара комплексно сопряженных собственных значений пересекает мнимую ось. В результате в каждой особой точке рождается устойчивый «предельный цикл» (кавычки здесь уместны, так как согласно [23] предельным циклом называется замкнутая траектория, изолированная от всех остальных замкнутых траекторий). Такие «слепленные предельные циклы» и образуют аттрактор в виде двумерного тора. Однако в данном случае, по-видимому, нельзя сослаться на бифуркацию Андронова–Хопфа, так как оказывается не выполненным одно из условий теоремы – особая точка не изолирована.

2. Бифуркации квазипериодических решений

Нелинейную динамику модели (2) в зависимости от управляющего параметра $\varepsilon = (\beta - \beta_{bif})/\beta_{bif}$ исследуем численно.

При $\varepsilon < 0$ режим стационарной генерации устойчив, малые отклонения от положения равновесия притягиваются к особой окружности, что подтверждает результаты линейного анализа устойчивости. При малых положительных значениях параметра ε на фазовой плоскости $(J, dJ/d\xi)$ наблюдается рождение предельного цикла, при этом частота модуляции интенсивности $J = E_1^2 + E_2^2$ совпадает с аналитически рассчитанной (3). Как показано в [20], при увеличении управляющего параметра ε в численном эксперименте для интенсивности наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, при этом в спектре появляются субгармоники основной частоты ω_{bif} . Существует критическое значение управляющего параметра, при котором движение становится апериодическим, а спектр сплошным. Также, в работе [20] построена фазопараметрическая диаграмма, характерная для систем с каскадом удвоений периодов, приводящим к хаосу.

Более сложная динамика наблюдается, если рассматривать не интенсивность поля, а его компоненты E_1 и E_2 . В фазовом объеме (E_1, E_2, N) при малых положительных значениях параметра ε , малые отклонения от положения равновесия притягиваются к аттрактору – устойчивому эргодическому двумерному тору. С ростом управляющего параметра тор сначала разбухает, подобно надуваемой шине. При этом фазовая точка движется с частотой $\omega \approx \omega_{bif}$ вокруг особой кривой и с частотой вращения $\Omega \ll \omega_{bif}$ вдоль особой кривой (рис. 1, а). Такой динамический режим соответствует квазипериодическим волнам оптического поля $E_1(\xi), E_2(\xi)$. Следует

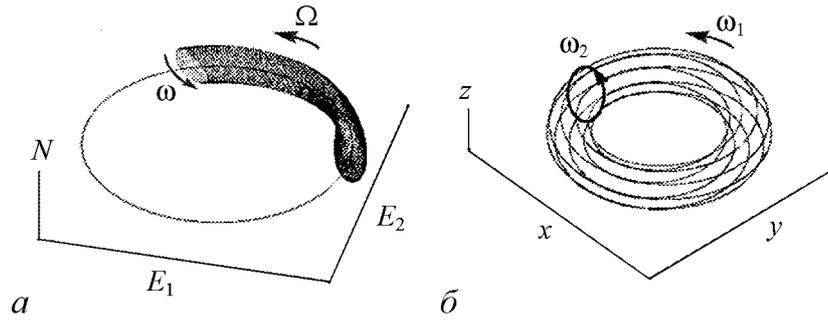


Рис. 1. Бифуркация рождения двумерного тора: *a* – из особой кривой; *б* – из предельного цикла

отметить, что приведенное неравенство для частот $\Omega \ll \omega_{bif}$ должно четко выполняться и в других моделях, реализующих предложенный механизм рождения тора. Для сравнения, в результате хорошо известной бифуркации Неймарка [24] из периодического режима частоты ω_1 рождается квазипериодический режим с частотами ω_1, ω_2 (рис. 1, *б*), причем экспериментально наблюдалось обратное неравенство для частот $\omega_1 > \omega_2$ [25].

При дальнейшем увеличении управляющего параметра ε происходит каскад бифуркаций удвоения периода тора, приводящий к хаотическому режиму (рис. 2, *a*). Об удвоении периода тора ясно свидетельствует структура сечения Пуанкаре и спектры мощности (рис. 2, *б*). Следует отметить, что бифуркации удвоения претерпевает только одна частота ω .

В фазовом объеме (Y, Z, N) фазовые траектории также притягиваются к аттрактору – устойчивому эргодическому тору (рис. 3, *a*). При росте управляющего параметра в сечении Пуанкаре происходит каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой с ее последующим разрушением (рис. 3, *б*). В исходной системе происходит каскад бифуркаций удвоения тора приводящий к режиму динамического хаоса.

Полный спектр характеристических показателей Ляпунова (рис. 4) показывает, что система (2) описывает бифуркацию нового типа: непростое стационарное состояние в виде особой замкнутой кривой – структурно неустойчивый трехмерный тор – устойчивый двумерный тор. Как показано на (рис. 4, *a*), сигнатура спектра характеристических показателей Ляпунова меняется при этой бифуркации (точка *A*) как

$$0, -, -, -, - \rightarrow 0, 0, 0, -, - \rightarrow 0, 0, -, -, -.$$

В точках бифуркаций удвоения тора (точки *B, C, D*) сигнатура меняется (рис. 4, *б*) как

$$0, 0, -, -, - \rightarrow 0, 0, 0, -, - \rightarrow 0, 0, -, -, -.$$

Такое изменение сигнатуры спектра характеристических показателей Ляпунова соответствует рождению в точке бифуркации структурно-неустойчивого трехмерного тора, который порождает устойчивый удвоенный эргодический двумерный тор [26]. В точке *E* происходит переход к хаотическому режиму

$$0, 0, -, -, - \rightarrow 0, 0, 0, -, - \rightarrow +, 0, 0, -, -.$$

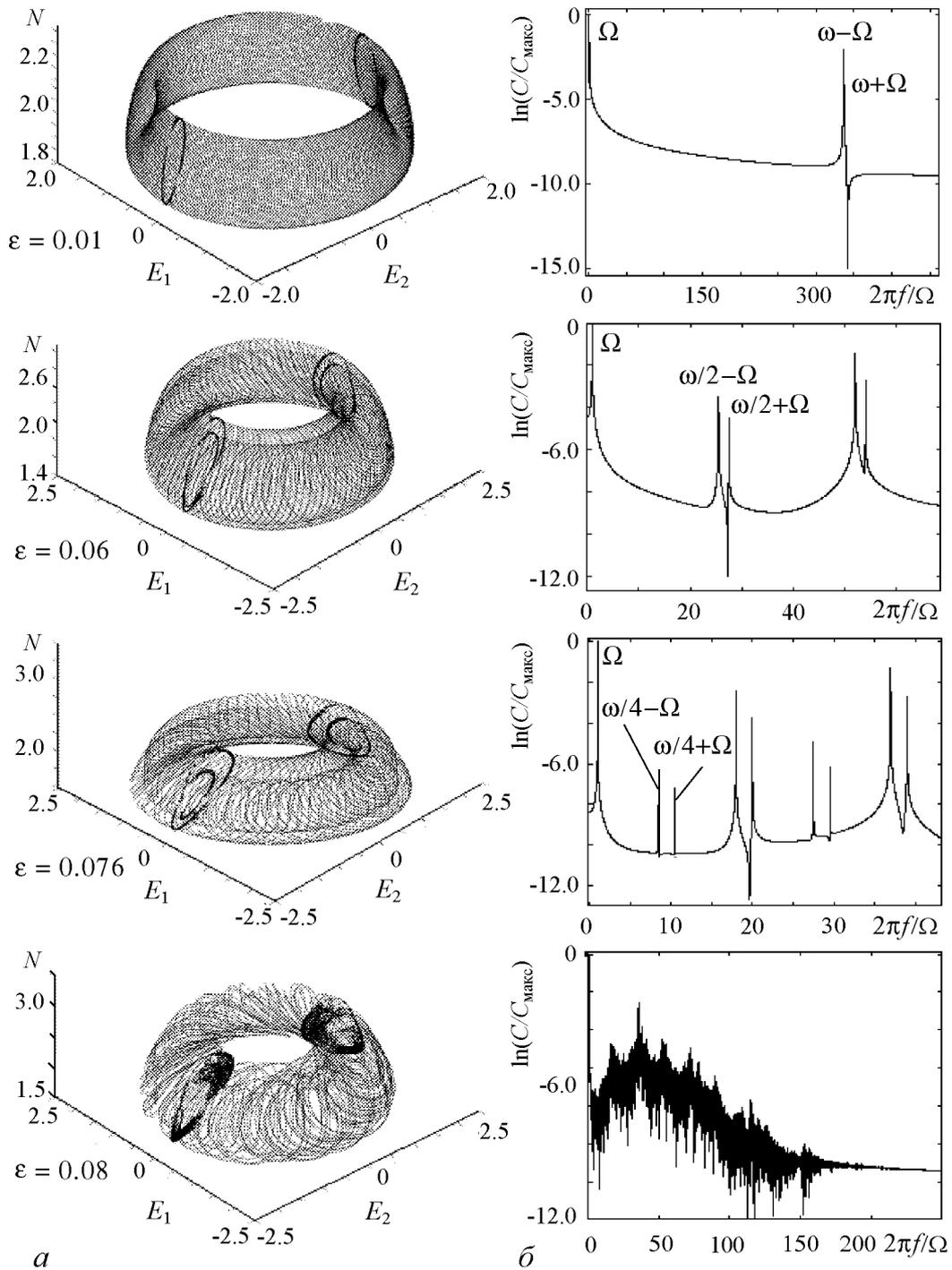


Рис. 2. Последовательность бифуркаций удвоения тора при увеличении параметра ε в пространстве (E_1, E_2, N) : фазовый объем (а), спектр колебаний E_1 (б). C – мощность спектра, C_{\max} – максимальное значение мощности, f – линейная частота

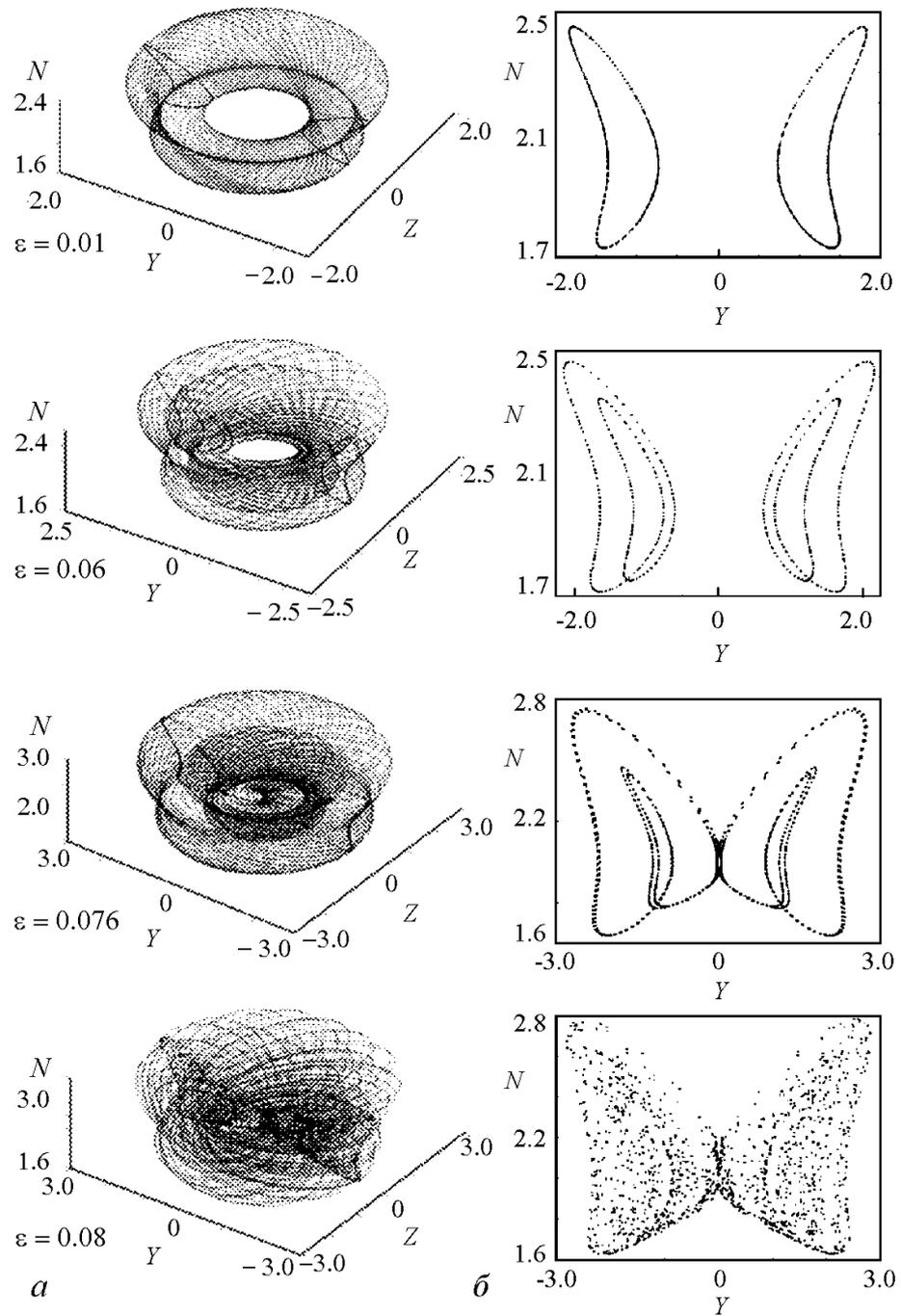


Рис. 3. Последовательность бифуркаций удвоения тора при увеличении параметра ϵ в пространстве (Y, Z, N) : фазовый объем (а), сечение Пуанкаре (б)

Гипотеза о том, что аттрактор в виде устойчивого двумерного тора родился в результате рождения множества «слепленных предельных циклов», не объясняет почему фазовые траектории начинают двигаться вдоль особой окружности, то есть не ясна природа частоты Ω (см. рис. 1, *a*). Заметим, что в случае бифуркации рождения тора из предельного цикла направление и скорость вращения по тору уже заданы – направление совпадает, а частота примерно равна частоте предельного цикла ω_1 (см. рис. 1, *b*). Попробуем найти аналитическое значение для частоты Ω . Простая структура спектра мощности временных реализаций (см. рис. 2, *b*), а также простейший случай режима двухчастотных биений [27] подсказывают вид аппроксимации решений вблизи точки бифуркации рождения тора

$$E = E_0 \left(1 + m_1 e^{i\omega\xi} + m_2 e^{-i\omega\xi} \right) e^{i\Omega\xi}, \quad (4)$$

$$N = N_0 \left(1 + m_N \frac{e^{i\omega\xi} - e^{-i\omega\xi}}{2i} \right), \quad (5)$$

при этом $m_2 > m_1$. Такое условие на амплитуды гармоник необходимо для воспроизведения структуры спектра (см. рис. 2, *b*), на котором четко видно, что гармоника $\omega + \Omega$ имеет меньшую, чем $\omega - \Omega$ амплитуду (следует отметить, что в [20] на рис. 4, *b* были ошибочно указаны частоты ω и $\omega + 2\Omega$ вместо $\omega \pm \Omega$). Также это неравенство между m_2 и m_1 обеспечивает отличие фазового портрета в проекции (Y, Z, N) (см. рис. 3, *a*) от (E_1, E_2, N) (см. рис. 2, *a*) и вид сечения Пуанкаре (см. рис. 3, *b*) напоминающего бабочку.

Такой вид аппроксимации учитывает гармоники $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$, так как из спектра E_1 (см. рис. 2, *b*) хорошо видно, что высшие гармоники $2\omega + \Omega$, $2\omega - \Omega$ и т.д. имеют гораздо меньшую амплитуду и ими можно пренебречь. Прямая подстановка выражений (4), (5) в систему (2) дает комплексное значение частоты Ω . Однако, если положить, что физический смысл имеет только действительная часть, то получим

$$\Omega = \frac{\nu}{8} m_I m_N, \quad (6)$$

где m_I и m_N глубина модуляции интенсивности и коэффициента усиления, соответственно. Выражение (6) совпадает с результатами компьютерного счета с ошибкой

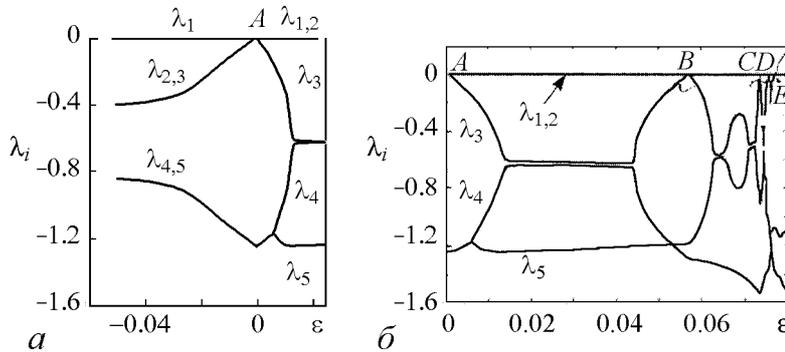


Рис. 4. Спектр характеристических показателей Ляпунова

не хуже, чем 10%. На рис. 5 показаны фазовые портреты (*a*), (*б*), фаза поля (*в*) и временная зависимость E_1 (*г*), построенные по формулам (4), (5). Также для сравнения приведены результаты расчета при значении управляющего параметра, близкого к бифуркационному, то есть когда тор еще не удвоен. Из приведенного рисунка видно, что аппроксимация решения подобрана удовлетворительно.

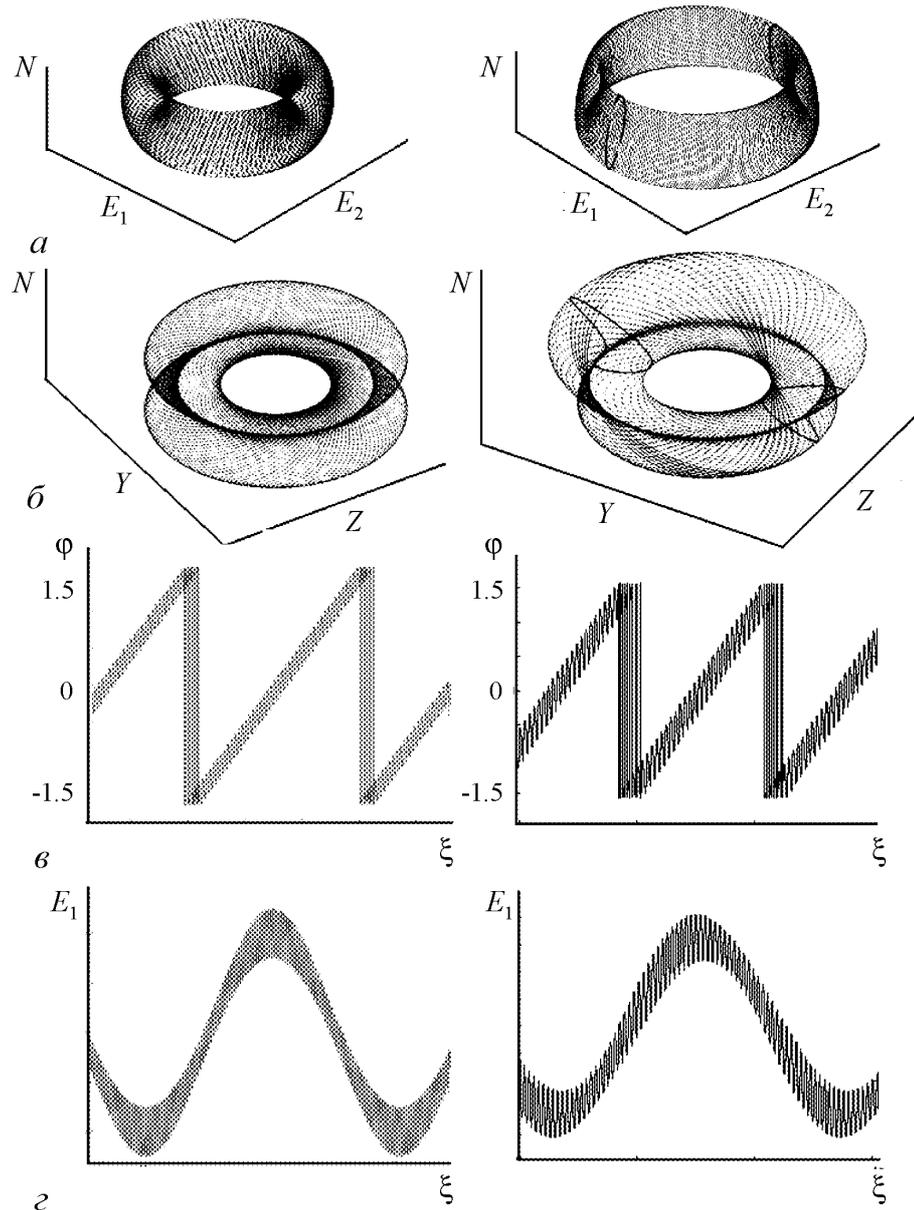


Рис. 5. Аппроксимация (слева) и компьютерный счет вблизи точки рождения тора (справа): *a* – фазовый портрет в пространстве (E_1, E_2, N) , *б* – фазовый портрет в пространстве (Y, Z, N) , *в* – фаза поля, *г* – временная зависимость $E_1(\xi)$

Заключение

Рассмотренная модель реализует, не описанную в литературе, бифуркацию рождения устойчивого двумерного эргодического тора из особой замкнутой кривой. Исследуемая модель близка к бифуркации рождения тора из предельного цикла тем, что совокупность «слепленных» циклов составляет аттрактор в виде устойчивого двумерного тора. Заметим, что особая кривая в плоскости (E_1, E_2) не является чем-то уникальным, по крайней мере, для лазерных систем. Такая кривая всегда существует в лазерной системе, где состоянием равновесия является режим стационарной генерации с постоянной интенсивностью. Однако существование такой кривой не всегда означает существование аттрактора в виде тора. Примером может служить хорошо известная точечная модель Лоренца. При отсутствии отстройки частоты генерации фаза не меняется во времени [28], а следовательно, амплитуды поля и поляризации можно считать чисто действительными величинами. Введение ненулевой отстройки в тех же самых уравнениях сразу приводит к динамике фазы во времени, вращению фазовых траекторий вокруг особой кривой, квазипериодическому движению [5]. Представляет интерес поиск других типов фазовой нелинейности в лазерной системе, приводящих к рождению тора из особой замкнутой кривой.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, НК-387П/27, ГК П1930, аналитической целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010), проект 2.1.1/309, НОЦ 14.

Библиографический список

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atm. Sci. 1963. Vol. 20 P. 130.
2. Грасюк А.З., Ораевский А.Н. // Труды IV Международного конгресса по лампам СВЧ. Голландия, Шевининген, 1962. Труды 31 курса летней школы Энрико Ферми. Италия, Варенна, 1963.
3. Ораевский А.Н. Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130.
4. Haken H. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers // Phys. Lett. A. 1975. Vol. 53. P. 77.
5. Letellier C. Modding out a continuous rotation symmetry for disentangling a laser dynamics // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, № 6. P. 1573.
6. Weiss C.O., Larionova Ye. Pattern formation in optical resonators // Rep. Prog. Phys. 2007. Vol. 70. P. 255.
7. Hollinger F., Jung Chr., Weber H. Simple mathematical model describing multi-transversal solid-state lasers // J. Opt. Soc. Am. B. 1990. Vol. 7, № 6. P. 1013.
8. Hollinger F., Jung Chr. Single-longitudinal-mode laser as a discrete dynamical system // J. Opt. Soc. Am. B. 1985. Vol. 2, № 1. P. 218.
9. Cabrera E., Calderon O.G., Melle S., Guerra J.M. Development of spatial turbulence from boundary-controlled patterns in class-B lasers // Phys. Rev. A. 2006. Vol. 73. 053820.

10. *Huyet G., Tredicce J.R.* Spatio-temporal chaos in the transverse section of lasers // *Physica D*. 1996. Vol. 96. P. 209.
11. *Huyet G., Martinoni M.C., Tredicce J.R., Rica S.* Spatiotemporal dynamics of lasers with a large Fresnel number // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 55. P. 738.
12. *O'Neil E., Houlihan J., McInerney J.G., Huyet G.* Dynamics of traveling waves in the transverse section of a laser // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. 143901.
13. *Jacobsen P.K., Moloney J.V., Newell A.C., Indik R.* Space-time dynamics of wide-gain-section lasers // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 45, № 11. P. 8129.
14. *Jacobsen P.K., Lega J., Feng Q., Staley M., Moloney J.V., Newell A.C.* Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers: I. Analysis and numerical simulation // *Phys. Rev. A*. 1994. Vol. 49, № 5. P. 4189.
15. *Jacobsen P.K., Lega J., Feng Q., Staley M., Moloney J.V., Newell A.C.* Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers: II. Pattern analysis near and beyond threshold // *Phys. Rev. A*. 1994. Vol. 49, № 5. P. 4201.
16. *Заикин А.П., Молевич Н.Е.* Влияние скорости кросс-релаксации на поперечную динамику излучения широкоапертурного лазера // *Квантовая электроника*. 2004. Т. 34, № 8. С. 731.
17. *Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е.* Периодические автоволновые структуры в широкоапертурном лазере с отстройкой частоты. 1. Бифуркационный анализ // *Квантовая электроника*. 1999. Т. 27, № 3. С. 246.
18. *Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е.* Периодические автоволновые структуры в широкоапертурном лазере с отстройкой частоты. 2. Распределенная модель // *Квантовая электроника*. 1999. Т. 27, №3. С. 249.
19. *Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е.* Влияние отстройки частоты на пространственно-временную структуру оптического поля широкоапертурного лазера // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1999. Т. 7, № 5. С. 87.
20. *Кренц А.А., Молевич Н.Е.* Каскад бифуркаций удвоения тора в лазере с отстройкой частоты // *Квантовая электроника*. 2009. Т. 39, № 8. С. 751.
21. *Amroun D., Brunel M., Letellier C., Leblond H., Sanchez F.* Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers // *Physica D*. 2005. Vol. 203. P. 185.
22. *Lugiato L.A., Oldano C., Narducci L.M.* Cooperative frequency locking and stationary spatial structures in lasers // *J. Opt. Soc. Am. B*. 1988. Vol. 5. P. 879.
23. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.
24. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос: Курс лекций. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001.
25. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
26. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // *Письма в ЖЭТФ*. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.
27. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
28. *Zeghlache H., Mandel P.* Influence of detuning on properties of laser equations // *J. Opt. Soc. Am. B*. 1985. Vol. 2, № 1. P. 18.

Самарский филиал
Физического института РАН

Поступила в редакцию 8.02.2010
После доработки 25.05.2010

**BIRTH OF A STABLE TORUS FROM
THE CRITICAL CLOSED CURVE AND ITS BIFURCATIONS
IN A LASER SYSTEM WITH FREQUENCY DETUNING**

A.A. Krents, N.E. Molevich

Realization of stable two-frequency oscillations is shown in the Maxwell–Bloch model. Birth of a stable ergodic two-dimensional torus from the critical closed curve is observed. The conditions of the passage to chaos via a cascade of torus doubling bifurcations are obtained. It is established that at bifurcations points a structurally unstable three-dimensional torus is produced, which gives rise to a stable doubled ergodic torus. Analytical approximation describing dynamics of the system near a point of torus birth is found.

Keywords: Wide-aperture lasers, torus doubling bifurcation, ergodic torus, chaos.



Крентц Антон Анатольевич – родился в Тольятти (1986), окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева по направлению прикладные математика и физика. В настоящее время является инженером теоретического сектора СФ ФИАН и очным аспирантом СГАУ. Область научных интересов – нелинейная динамика лазерных систем. Имеет 17 научных работ.

443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221
Самарский филиал Физического института РАН
E-mail: krenz86@mail.ru



Молевич Нонна Евгеньевна – родилась в Семипалатинске (1959), окончила Специальный факультет (высшую школу физики) МИФИ-ФИАН (1982). Защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (МИФИ, 2002) по специальности теоретическая физика. В настоящее время является заведующим теоретическим сектором СФ ФИАН и профессором кафедры физики СГАУ. Область научных интересов – динамика оптических и акустических активных сред. Имеет 180 научных работ. Лауреат губернской премии Самарской области в области естественных наук (2002) за цикл работ «Акустика неравновесных сред»

443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221
Самарский филиал Физического института РАН
E-mail: molevich@fian.smr.ru