

**ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ  
ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭФФЕКТА ПОККЕЛЬСА В КРИСТАЛЛАХ  
И ИХ АНАЛИЗ НА ПРИМЕРЕ КРИСТАЛЛА НИОБАТА ЛИТИЯ**

Зюрюкин Ю.А., М.В. Павлова, Д.Р. Древки

Предложено теоретическое описание эффекта Поккельса, в котором постановка задачи в форме уравнений Максвелла позволяет переходить непосредственно к волновым уравнениям и находить их решения. Получены аналитические выражения, определяющие фазовые скорости и поляризацию плоских световых волн, распространяющихся в кристалле ниобата лития в главных кристаллофизических направлениях для различных случаев влияния внешнего статического электрического поля. Сделаны соответствующие выводы о наиболее оптимальном использовании эффекта Поккельса для управления работой модулятора оптического излучения, в частности на кристалле ниобата лития.

*Ключевые слова:* Электрооптический эффект, электромагнитные волны, волновое уравнение, ниобат лития.

**Введение**

Для выбора оптимальных режимов модуляции света на конкретном кристалле необходимо провести исследование электрооптических свойств этого кристалла. Традиционно при изучении распространения электромагнитных волн в анизотропных средах, в том числе и при наличии внешнего электрического поля, используется метод эллипсоида показателей преломления (или оптической индикатрисы) [1–6]. Данный метод, хотя и является следствием электромагнитной теории света, однако не всегда удобен и нагляден для количественной оценки эффекта, поскольку предусматривает графическую интерпретацию и в большей степени качественный анализ особенностей распространения электромагнитных волн в анизотропных средах, в частности в электрооптических кристаллах.

В настоящей работе ставится задача теоретического описания эффекта Поккельса в кристаллах на основе электромагнитной теории. Именно постановка задачи

в форме уравнений Максвелла позволила нам перейти непосредственно к волновым уравнениям и найти их решения, то есть получить выражения, определяющие фазовые скорости и поляризацию плоских световых волн, распространяющихся в электрооптическом кристалле в произвольном направлении для различных случаев влияния внешнего статического электрического поля. На основе проведенного исследования и анализа полученных результатов сделаны выводы о наиболее оптимальном использовании эффекта Поккельса для управления работой модулятора света, в частности на кристалле ниобата лития.

### 1. Постановка задачи об эффекте Поккельса в форме уравнений Максвелла на примере кристалла ниобата лития

Считаем, что кристалл является однородной, непоглощающей и магнитно-изотропной средой, электрические и оптические свойства которого в различных направлениях определяются тензором непроницаемости. В случае эффекта Поккельса наложение внешнего статического электрического поля  $\mathbf{E}^{\text{ст}}$  приведет к линейному изменению тензора непроницаемости:

$$\Delta\eta_{ij} = \eta_{ij}(\mathbf{E}^{\text{ст}}) - \eta_{ij}(0) = r_{ijk}E_k^{\text{ст}}, \quad (1)$$

где индекс суммирования  $k$  означает:  $1 = x, 2 = y, 3 = z$ ;

$$\hat{\eta}(0) = \hat{\eta}^{\circ} = \begin{pmatrix} \eta_{xx}^{\circ} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{yy}^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{zz}^{\circ} \end{pmatrix} - \text{тензор непроницаемости в отсутствие } \mathbf{E}^{\text{ст}};$$

$$\hat{\eta}(\mathbf{E}^{\text{ст}}) = \hat{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} & \eta_{xz} \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} & \eta_{yz} \\ \eta_{zx} & \eta_{zy} & \eta_{zz} \end{pmatrix} - \text{тензор непроницаемости при наличии } \mathbf{E}^{\text{ст}};$$

$\hat{r}$  – электрооптический тензор третьего ранга, который в оптически неактивной среде без потерь является симметричным [1].

Напряженность электрического поля плоской световой волны, распространяющейся в произвольном кристалле при наличии эффекта Поккельса, определяется в декартовой системе координат, оси которой совпадают с главными диэлектрическими осями в невозмущенном кристалле (то есть в отсутствие внешнего электрического поля)

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\eta_{xx}D_x + \eta_{xy}D_y + \eta_{xz}D_z), \\ E_y &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\eta_{yx}D_x + \eta_{yy}D_y + \eta_{yz}D_z), \\ E_z &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\eta_{zx}D_x + \eta_{zy}D_y + \eta_{zz}D_z), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $D_k$  – компоненты вектора электрического смещения;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная. Компоненты возмущенного тензора непроницаемости в выражениях (2) запи-

шем в виде

$$\begin{aligned}
\eta_{xx} &= \eta_{xx}^{\circ} + \Delta\eta_{xx}; & \eta_{xy} &= \Delta\eta_{xy}; & \eta_{xz} &= \Delta\eta_{xz}; \\
\eta_{yx} &= \Delta\eta_{yx}; & \eta_{yy} &= \eta_{yy}^{\circ} + \Delta\eta_{yy}; & \eta_{yz} &= \Delta\eta_{yz}; \\
\eta_{zx} &= \Delta\eta_{zx}; & \eta_{zy} &= \Delta\eta_{zy}; & \eta_{zz} &= \eta_{zz}^{\circ} + \Delta\eta_{zz}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Поправки к компонентам тензора непроницаемости  $\Delta\eta_{ij}$ , обусловленные эффектом Поккельса, в общем виде определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\Delta\eta_{xx} &= r_{11}E_x^{\text{CT}} + r_{12}E_y^{\text{CT}} + r_{13}E_z^{\text{CT}}, \\
\Delta\eta_{xy} &= \Delta\eta_{yx} = r_{61}E_x^{\text{CT}} + r_{62}E_y^{\text{CT}} + r_{63}E_z^{\text{CT}}, \\
\Delta\eta_{xz} &= \Delta\eta_{zx} = r_{51}E_x^{\text{CT}} + r_{52}E_y^{\text{CT}} + r_{53}E_z^{\text{CT}}, \\
\Delta\eta_{yy} &= r_{21}E_x^{\text{CT}} + r_{22}E_y^{\text{CT}} + r_{23}E_z^{\text{CT}}, \\
\Delta\eta_{yz} &= \Delta\eta_{zy} = r_{41}E_x^{\text{CT}} + r_{42}E_y^{\text{CT}} + r_{43}E_z^{\text{CT}}, \\
\Delta\eta_{zz} &= r_{31}E_x^{\text{CT}} + r_{32}E_y^{\text{CT}} + r_{33}E_z^{\text{CT}}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для кристалла *ниобата лития* ( $\text{LiNbO}_3$ ) поправки к тензору непроницаемости принимают вид

$$\begin{aligned}
\Delta\eta_{xx} &= (-r_{22})E_y^{\text{CT}} + r_{13}E_z^{\text{CT}}; & \Delta\eta_{xy} &= \Delta\eta_{yx} = (-r_{22})E_x^{\text{CT}}; \\
\Delta\eta_{xz} &= \Delta\eta_{zx} = r_{51}E_x^{\text{CT}}; & \Delta\eta_{yy} &= r_{22}E_y^{\text{CT}} + r_{13}E_z^{\text{CT}}; \\
\Delta\eta_{yz} &= \Delta\eta_{zy} = r_{51}E_y^{\text{CT}}; & \Delta\eta_{zz} &= r_{33}E_z^{\text{CT}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $r_{13} = 8.6 \cdot 10^{-12}$  м/В,  $r_{33} = 30.8 \cdot 10^{-12}$  м/В,  $r_{22} = 3.4 \cdot 10^{-12}$  м/В,  $r_{51} = 28 \cdot 10^{-12}$  м/В – значения электрооптических коэффициентов при длине световой волны  $\lambda = 0.633$  мкм [7]. Тогда компоненты вектора напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля плоской световой волны, распространяющейся в данном кристалле, с учетом эффекта Поккельса запишутся, согласно выражениям (2), в виде

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\langle \eta_{xx}^{\circ} + (-r_{22})E_y^{\text{CT}} + r_{13}E_z^{\text{CT}} \rangle D_x + \langle (-r_{22})E_x^{\text{CT}} \rangle D_y + \langle r_{51}E_x^{\text{CT}} \rangle D_z), \\
E_y &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\langle (-r_{22})E_x^{\text{CT}} \rangle D_x + \langle \eta_{yy}^{\circ} + r_{22}E_y^{\text{CT}} + r_{13}E_z^{\text{CT}} \rangle D_y + \langle r_{51}E_y^{\text{CT}} \rangle D_z), \\
E_z &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\langle r_{51}E_x^{\text{CT}} \rangle D_x + \langle r_{51}E_y^{\text{CT}} \rangle D_y + \langle \eta_{zz}^{\circ} + r_{33}E_z^{\text{CT}} \rangle D_z).
\end{aligned} \tag{6}$$

Обратимся теперь к системе однородных уравнений Максвелла и запишем первые два уравнения в декартовой системе координат

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial D_z}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{8}$$

Здесь  $\mu$  – магнитная проницаемость среды,  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Подставим в уравнения (8) выражения (6) для компонент напряженности электрического поля волны, распространяющейся в кристалле  $\text{LiNbO}_3$  при наличии эффекта Поккельса. Уравнения примут вид

$$\begin{aligned}
& \langle r_{51} E_x^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_x}{\partial y} + \langle r_{51} E_y^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_y}{\partial y} + \langle \eta_{zz}^{\circ} + r_{33} E_z^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_z}{\partial y} - \langle (-r_{22}) E_x^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_x}{\partial z} - \\
& - \langle \eta_{yy}^{\circ} + r_{22} E_y^{\text{CT}} + r_{13} E_z^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_y}{\partial z} - \langle r_{51} E_y^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_z}{\partial z} = -\mu\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\
& \langle \eta_{xx}^{\circ} + (-r_{22}) E_y^{\text{CT}} + r_{13} E_z^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_x}{\partial z} + \langle (-r_{22}) E_x^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_y}{\partial z} + \langle r_{51} E_x^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_z}{\partial z} - \\
& - \langle r_{51} E_x^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_x}{\partial x} - \langle r_{51} E_y^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_y}{\partial x} - \langle \eta_{zz}^{\circ} + r_{33} E_z^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_z}{\partial x} = -\mu\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (9) \\
& \langle (-r_{22}) E_x^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_x}{\partial x} + \langle \eta_{yy}^{\circ} + r_{22} E_y^{\text{CT}} + r_{13} E_z^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_y}{\partial x} + \langle r_{51} E_y^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_z}{\partial x} - \\
& - \langle \eta_{xx}^{\circ} + (-r_{22}) E_y^{\text{CT}} + r_{13} E_z^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_x}{\partial y} - \langle (-r_{22}) E_x^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_y}{\partial y} - \langle r_{51} E_x^{\text{CT}} \rangle \frac{\partial D_z}{\partial y} = \\
& = -\mu\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Итак, мы получили 6 скалярных уравнений Максвелла (7), (9) относительно искомым компонент электрического смещения  $D_x, D_y, D_z$  и напряженности магнитного поля  $H_x, H_y, H_z$  плоской световой волны с учетом эффекта Поккельса для  $\text{LiNbO}_3$ . Далее перейдем к волновым уравнениям, исключив  $H_x, H_y, H_z$  из уравнений (7) и (9), и определим их решения.

## 2. Волновые уравнения для исследования эффекта Поккельса в кристалле ниобата лития и их анализ

1.1. Электрическое поле приложено вдоль оси  $z$  ( $E_z^{\text{CT}} \neq 0$ ), а световой пучок распространяется по оси  $x$  (или  $y$ ). В этом случае из уравнений Максвелла (7)–(9) следуют две системы уравнений, которые преобразуются к уравнениям, по виду представляющим собой волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} - \left( \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{zz}^{\circ} + r_{33} E_z^{\text{CT}}} \right) \frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2} - \left( \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{yy}^{\circ} + r_{13} E_z^{\text{CT}}} \right) \frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = 0, \quad (11)$$

где  $v_z^2 = (\eta_{zz}^{\circ} + r_{33} E_z^{\text{CT}})/(\mu\mu_0\varepsilon_0) = c^2 (1/n_e^2 + r_{33} E_z^{\text{CT}})$  – фазовая скорость необыкновенной волны, поляризованной вдоль оси  $z$  и находящейся под влиянием поля  $E_z^{\text{CT}}$ ,  $v_y^2 = (\eta_{yy}^{\circ} + r_{13} E_z^{\text{CT}})/(\mu\mu_0\varepsilon_0) = c^2 (1/n_o^2 + r_{13} E_z^{\text{CT}})$  – фазовая скорость обыкновенной волны, поляризованной вдоль  $y$  и находящейся под влиянием поля  $E_z^{\text{CT}}$ . При

этом учли, что  $\eta_{xx}^{\circ} = \eta_{yy}^{\circ} = 1/\varepsilon_{\perp} = 1/n_o^2$ ,  $\eta_{zz}^{\circ} = 1/\varepsilon_{\parallel} = \frac{1}{n_e^2}$ ,  $\mu \approx 1$ , где  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  – поперечная и продольная составляющие тензора диэлектрической проницаемости.

Отсюда следует, что для светового пучка, поляризованного по оси  $z$  и распространяющегося вдоль оси  $x$  или  $y$ , или в любом направлении в плоскости  $xy$ , значение показателя преломления задается выражением

$$n_z = \frac{c}{v_z} = \frac{n_e}{\sqrt{1 + r_{33}E_z^{\text{ст}}n_e^2}} \cong n_e - n_e^3 r_{33} \frac{E_z^{\text{ст}}}{2}, \quad (12)$$

где учтено, что  $r_{33}E_z^{\text{ст}}n_e^2 \ll 1$ . Для пучка, поляризованного ортогонально рассмотренному (то есть по оси  $x$  или  $y$ )

$$n_x = n_y = \frac{c}{v_y} = \frac{n_o}{\sqrt{1 + r_{13}E_z^{\text{ст}}n_o^2}} \cong n_o - n_o^3 r_{13} \frac{E_z^{\text{ст}}}{2}. \quad (13)$$

Изменение фазы световой волны в соответствующих направлениях, вызванное внешним электрическим полем,

$$\Delta\varphi_z = n_e^3 r_{33} \frac{E_z^{\text{ст}}}{2} kl, \quad \Delta\varphi_y = \Delta\varphi_x = n_o^3 r_{13} \frac{E_z^{\text{ст}}}{2} kl. \quad (14)$$

Здесь  $k$  – волновое число,  $l$  – расстояние, проходимое волной в кристалле.

Таким образом, если при направлении внешнего электрического поля по оси  $z$  ( $E_z^{\text{ст}}$ ) световой пучок, поляризованный тоже по оси  $z$ , распространяется вдоль оси  $x$  или  $y$ , или в любом направлении в плоскости  $xy$ , то возникшая в результате двойного лучепреломления необыкновенная волна имеет *максимальный фазовый набег* (так как  $r_{33}$  – наибольший коэффициент), который пропорционален расстоянию, проходимому световой волной в кристалле. Следовательно, такую конфигурацию (в условиях *поперечного эффекта Поккельса*) можно использовать для создания модулятора лазерного пучка с *низким управляющим напряжением*.

1.2. Электрическое поле приложено вдоль оси  $z$  ( $E_z^{\text{ст}} \neq 0$ ) и световой пучок распространяется тоже вдоль оптической оси  $z$ . Уравнения Максвелла приводят к волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2} - \left( \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{xx}^{\circ} + r_{13}E_z^{\text{ст}}} \right) \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2} - \left( \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{yy}^{\circ} + r_{13}E_z^{\text{ст}}} \right) \frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = 0. \quad (16)$$

Отсюда следует, что и в условиях существования эффекта Поккельса при распространении световой волны вдоль оптической оси  $z$  двойное лучепреломление наблюдаться не будет. Для волн исходной поляризации по  $x$  или по  $y$ , или любой поляризации в плоскости ( $xy$ ) фазовая скорость будет определяться выражением

$$v_x^2 = v_y^2 = \frac{\eta_{xx}^{\circ} + r_{13}E_z^{\text{ст}}}{\mu\mu_0\varepsilon_0} = c^2 \left( \frac{1}{n_o^2} + r_{13}E_z^{\text{ст}} \right). \quad (17)$$

Таким образом, если модулирующее электрическое поле приложено по направлению оси  $z$ , то световой пучок, распространяющийся вдоль оси  $z$ , будет иметь один и тот

же фазовый набег независимо от его поляризации. Следовательно, такой модулятор (на продольном эффекте Погкельса) может модулировать фазу неполяризованного лазерного пучка.

2.1. Электрическое поле приложено вдоль оси  $x$ , а световой пучок распространяется вдоль оптической оси  $z$ . В этом случае уравнения Максвелла приводят к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{yy}^\circ} \frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = \frac{r_{22}E_x^{\text{CT}}}{\eta_{yy}^\circ} \frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{xx}^\circ} \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = \frac{r_{22}E_x^{\text{CT}}}{\eta_{xx}^\circ} \frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2}. \quad (19)$$

Как видно, эти уравнения связаны между собой, то есть поляризация волн, возникающих в результате двойного лучепреломления в кристалле, уже не будет совпадать с главными направлениями кристалла ( $x$  или  $y$ ).

Для нахождения фазовых скоростей и определения направления поляризаций используем подстановку Эйлера:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_x^\circ \\ D_y^\circ \end{Bmatrix} \cdot \exp(j(\omega t - kz)) = \begin{Bmatrix} D_x^\circ \\ D_y^\circ \end{Bmatrix} \cdot \exp\left(j\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z\right)\right),$$

$D^\circ$  – амплитудные значения.

В результате подстановки уравнения (18) и (19) примут вид

$$-\frac{\varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{CT}}}{v^2} D_x^\circ + \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v_{x,y}^\circ)^2}\right) D_y^\circ = 0, \quad (20)$$

$$\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v_{x,y}^\circ)^2}\right) D_x^\circ - \frac{\varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{CT}}}{v^2} D_y^\circ = 0, \quad (21)$$

где  $(v_{x,y}^\circ)^2 = (v_x^\circ)^2 = (v_y^\circ)^2 = 1/(\mu\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_\perp) = c^2/n_o^2$ .

Система уравнений (20)–(21) позволяет определить как фазовые скорости ( $v_1$  и  $v_2$ ) волн, распространяющихся в кристалле в условиях существования эффекта Погкельса, так и направление поляризации для каждой волны. Ненулевое решение этой однородной системы уравнений для  $D_x^\circ$  и  $D_y^\circ$  существует, когда ее определитель равен нулю. Отсюда получаем уравнение для нахождения  $v$

$$(v^2)^2 - 2(v_{x,y}^\circ)^2 v^2 + (v_{x,y}^\circ)^4 (1 - (\varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{CT}})^2) = 0$$

и определяем имеющие физический смысл решения

$$v_1^2 = (v_{x,y}^\circ)^2 (1 - \varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{CT}}) = c^2 \left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_x^{\text{CT}}\right), \quad (22)$$

$$v_2^2 = (v_{x,y}^\circ)^2 (1 + \varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{CT}}) = c^2 \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_x^{\text{CT}}\right). \quad (23)$$

Далее из алгебраической системы уравнений (20)–(21), с учетом решений (22) и (23), определяем направления поляризации волн в кристалле:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{D_y^\circ}{D_x^\circ} = \frac{\varepsilon_{\perp} r_{22} E_x^{\text{ст}}}{v_1^2 \left( \frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{(v_{x,y}^\circ)^2} \right)} = \frac{\varepsilon_{\perp} r_{22} E_x^{\text{ст}}}{1 - \frac{v_1^2}{(v_{x,y}^\circ)^2}} = 1. \quad (24)$$

Таким образом, при распространении светового пучка вдоль оси  $z$  электрическое поле, приложенное по оси  $x$  ( $E_x^{\text{ст}}$ ), вызывает электрооптический эффект для световых волн, поляризованных в направлениях  $x'$  и  $y'$ , причем оси  $x'$  и  $y'$  повернуты на угол  $\beta = 45^\circ$  относительно осей  $x$  и  $y$  кристаллической структуры, соответственно (данный случай представлен на рисунке). Скорости рассматриваемых волн, находящихся под влиянием, например положительного статического поля  $E_x^{\text{ст}}$ , различны: одна волна («медленная») со скоростью  $v_1$  тормозится внешним электрическим полем, другая волна («быстрая») со скоростью  $v_2$  им ускоряется. При смене знака поля  $E_x^{\text{ст}}$  ситуация меняется на противоположную. Следовательно, модулирующее электрическое поле  $E_x^{\text{ст}}$  может изменять состояние поляризации падающего пучка и обеспечивает одинаковый (но не максимальный) фазовый набег для волн, поляризованных в направлениях  $x'$  и  $y'$  и распространяющихся вдоль оптической оси  $z$ , в соответствии с выражением:

$$\Delta\varphi_{x'} = \Delta\varphi_{y'} = n_o^3 r_{22} \frac{E_x^{\text{ст}}}{2} kl. \quad (25)$$

2.2. Электрическое поле приложено вдоль оси  $x$ , и световой пучок распространяется по  $x$ . Получаем волновые уравнения в виде:

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} - \frac{1}{(v_z^\circ)^2} \frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2} - \frac{1}{(v_y^\circ)^2} \frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = 0, \quad (27)$$

где  $(v_z^\circ)^2 = c^2/n_e^2$ ,  $(v_y^\circ)^2 = c^2/n_o^2$  – фазовые скорости необыкновенной волны, поляризованной по  $z$ , и обыкновенной волны, поляризованной по  $y$ , соответственно, в отсутствие эффекта Поккельса.

Таким образом, при заданной конфигурации приложения внешнего электрического поля  $E_x^{\text{ст}}$  и распространения светового пучка по  $x$  электрооптический эффект не проявляется.

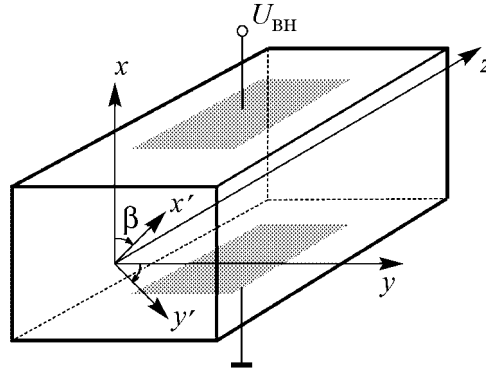


Рис. Геометрия поперечного электрооптического эффекта для случая, когда внешнее поле с разностью потенциалов  $U_{\text{вн}}$  приложено по оси  $x$  ( $E_x^{\text{ст}}$ ), а световой пучок распространяется в направлении оптической оси  $z$

2.3. Электрическое поле приложено вдоль оси  $x$ , световой пучок распространяется по направлению  $y$ . В этом случае из уравнений Максвелла следуют уравнения:

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial y^2} - \frac{1}{(v_z^\circ)^2} \frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = - \frac{r_{51} E_x^{\text{ct}}}{\eta_{zz}} \frac{\partial^2 D_x}{\partial y^2}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial y^2} - \frac{1}{(v_x^\circ)^2} \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = - \frac{r_{51} E_x^{\text{ct}}}{\eta_{xx}} \frac{\partial^2 D_z}{\partial y^2}, \quad (29)$$

где  $(v_x^\circ)^2 = c^2/n_o^2$ ,  $(v_z^\circ)^2 = c^2/n_e^2$ . Используем подстановку Эйлера и приходим к системе уравнений

$$\frac{\varepsilon_{\parallel} r_{51} E_x^{\text{ct}}}{v^2} D_x^\circ - \left( \frac{1}{(v_z^\circ)^2} - \frac{1}{v^2} \right) D_z^\circ = 0, \quad (30)$$

$$\left( \frac{1}{(v_x^\circ)^2} - \frac{1}{v^2} \right) D_x^\circ - \frac{\varepsilon_{\perp} r_{51} E_x^{\text{ct}}}{v^2} D_z^\circ = 0. \quad (31)$$

Из равенства нулю определителя данной системы уравнений получаем уравнение относительно искомой скорости  $v^2$ , решения которого определяются выражением

$$v_{1,2}^2 = \frac{(v_x^\circ)^2 + (v_z^\circ)^2}{2} \pm \frac{(v_x^\circ)^2 - (v_z^\circ)^2}{2} \sqrt{1 + \frac{4(v_x^\circ)^2 (v_z^\circ)^2}{((v_x^\circ)^2 - (v_z^\circ)^2)^2} \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} (r_{51} E_x^{\text{ct}})^2}. \quad (32)$$

Введем следующее обозначение:

$$\Delta^2 = \frac{2(v_x^\circ)^2 (v_z^\circ)^2}{((v_x^\circ)^2 - (v_z^\circ)^2)^2} \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} (r_{51} E_x^{\text{ct}})^2 = 2 \left( \frac{n_o^2 n_e^2 r_{51} E_x^{\text{ct}}}{n_e^2 - n_o^2} \right)^2, \quad (33)$$

тогда выражение (32), определяющее искомую скорость, примет вид

$$v_{1,2}^2 = \frac{(v_x^\circ)^2 + (v_z^\circ)^2}{2} \pm \frac{(v_x^\circ)^2 - (v_z^\circ)^2}{2} \sqrt{1 + 2\Delta^2}. \quad (34)$$

Оценим величину  $(2\Delta^2)$ , используя значения, соответствующие длине волны  $\lambda = 0.633$  мкм [7]. Получили, что  $(2\Delta^2) = 1.4 \cdot 10^{-5}$  при  $E_x^{\text{ct}} = 10^6$  В/м. Видим, что  $2\Delta^2 \ll 1$ , тогда можно считать, что  $\sqrt{1 + 2\Delta^2} \approx 1 + \Delta^2$ , и в этом случае получаем выражения для фазовых скоростей в виде

$$v_1^2 = c^2 \left( \frac{1}{n_o^2} + \frac{n_e^2 (r_{51} E_x^{\text{ct}})^2}{\left( \frac{n_o}{n_e} \right)^2 - 1} \right), \quad (35)$$

$$v_2^2 = c^2 \left( \frac{1}{n_e^2} + \frac{n_o^2 (r_{51} E_x^{\text{ct}})^2}{\left( \frac{n_e}{n_o} \right)^2 - 1} \right). \quad (36)$$



Выявившаяся ситуация приводит фактически к квадратичному электрооптическому эффекту (Керра), хотя в исходных позициях предполагался линейный электрооптический эффект (Поккельса).

Направления поляризации  $x'$  и  $z'$  световых волн, распространяющихся в кристалле вдоль оси  $y$  под действием внешнего электрического поля  $E_x^{\text{CT}}$  со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , соответственно, определяются из уравнений (30), (31) с учетом решений (35), (36), следующим выражением:

$$\text{tg } \gamma = \frac{D_z^{\circ}}{D_x^{\circ}} = \frac{\varepsilon_{||} r_{51} E_x^{\text{CT}}}{v_1^2 \left( \frac{1}{(v_z^{\circ})^2} - \frac{1}{v_1^2} \right)} = \frac{\varepsilon_{||} r_{51} E_x^{\text{CT}}}{(v_z^{\circ})^2 - 1} = \frac{r_{51} E_x^{\text{CT}}}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} + \frac{n_e^2 (r_{51} E_x^{\text{CT}})^2}{(n_o/n_e)^2 - 1}}, \quad (37)$$

где  $\gamma$  – угол, определяющий индуцированные направления поляризации  $x'$  и  $z'$ , относительно кристаллофизических направлений  $x$  и  $z$ . Как показывают расчеты, значение  $\gamma$  очень мало даже для умеренно сильных электрических полей ( $\gamma = -0.11^\circ$  при  $E_x = 10^6$  В/м) и поэтому является физически несущественным проявлением электрооптического эффекта в данном кристалле, связанным с поворотом плоскости поляризации.

3.1. Электрическое поле приложено вдоль оси  $y$ , а световой пучок распространяется вдоль оптической оси  $z$ . В этом случае уравнения Максвелла приводят к волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2} - \frac{\mu \mu_0 \varepsilon_0}{\eta_{yy}^{\circ} + r_{22} E_y^{\text{CT}}} \frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2} - \frac{\mu \mu_0 \varepsilon_0}{\eta_{xx}^{\circ} - r_{22} E_y^{\text{CT}}} \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = 0. \quad (39)$$

где  $v_y^2 = (\eta_{yy}^{\circ} + r_{22} E_y^{\text{CT}}) / (\mu \mu_0 \varepsilon_0) = c^2 (1/n_o^2 + r_{22} E_y^{\text{CT}})$  – фазовая скорость волны, поляризованной по  $y$ ,  $v_x^2 = (\eta_{xx}^{\circ} - r_{22} E_y^{\text{CT}}) / (\mu \mu_0 \varepsilon_0) = c^2 (1/n_o^2 - r_{22} E_y^{\text{CT}})$  – фазовая скорость волны, поляризованной по  $x$ , в условиях существования эффекта Поккельса.

Таким образом, при выбранной конфигурации электрического поля и светового пучка, возникает индуцированное полем  $E_y^{\text{CT}}$  двойное лучепреломление, то есть исходный световой пучок, распространяющийся вдоль оптической оси  $z$ , распадается на две волны, движущиеся с разными фазовыми скоростями. Волна, поляризованная по оси  $y$ , будет ускоряться, а по оси  $x$  – замедляться. Наведенный фазовый набег для обеих волн одинаков

$$\Delta \varphi_x = \Delta \varphi_y = n_o^3 r_{22} \frac{E_y}{2} kl. \quad (40)$$

3.2. Электрическое поле приложено вдоль оси  $y$ , а световой пучок распространяется по направлению оси  $y$ . В этом случае уравнения Максвелла приводят к

волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial y^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{zz}^\circ} \frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial y^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{xx}^\circ - r_{22}E_y^{\text{ct}}} \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = 0, \quad (42)$$

где  $v_z^2 = (v_z^\circ)^2 = 1/(\mu\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\varepsilon_{||}) = c^2/n_e^2$  – фазовая скорость волны, поляризованной по оси  $z$ ;  $v_x^2 = (\eta_{xx}^\circ - r_{22}E_y^{\text{ct}})/(\mu\mu_0\varepsilon_0) = c^2(1/n_o^2 - r_{22}E_y^{\text{ct}})$  – фазовая скорость волны, поляризованной по оси  $x$  при наличии статического электрического поля  $E_y^{\text{ct}}$ .

Видим, что электрическое поле  $E_y^{\text{ct}}$  оказывает влияние только на волну, поляризованную по оси  $x$ . Скорость волны, поляризованной вдоль оптической оси  $z$ , не изменяется, как для необыкновенной волны в отсутствие эффекта Погкельса.

3.3. Электрическое поле приложено вдоль оси  $y$ , а световой пучок распространяется по направлению оси  $x$ . В этом случае уравнения Максвелла приводят к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} - \frac{1}{(v_z^\circ)^2} \frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = \varepsilon_{||} r_{51} E_y^{\text{ct}} \frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2} - \frac{1}{(v_y^\circ)^2 (1 + \varepsilon_{\perp} r_{22} E_y^{\text{ct}})} \frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = - \frac{\varepsilon_{\perp} r_{51} E_y^{\text{ct}}}{(1 + \varepsilon_{\perp} r_{22} E_y^{\text{ct}})} \frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2}. \quad (44)$$

Аналогично выше рассмотренным ситуациям для нахождения фазовых скоростей и определения направления поляризаций используем подстановку Эйлера. В результате система уравнений (43)–(44) примет вид

$$\frac{\varepsilon_{||} r_{51} E_y^{\text{ct}}}{v^2} D_y^\circ + \left[ \frac{1}{(v_z^\circ)^2} - \frac{1}{v^2} \right] D_z^\circ = 0, \quad (45)$$

$$\left[ \frac{1}{(v_y^\circ)^2 [1 + \varepsilon_{\perp} r_{22} E_y^{\text{ct}}]} - \frac{1}{v^2} \right] D_y^\circ - \frac{\varepsilon_{\perp} r_{51} E_y^{\text{ct}}}{v^2 [1 + \varepsilon_{\perp} r_{22} E_y^{\text{ct}}]} D_z^\circ = 0. \quad (46)$$

Из равенства нулю определителя системы уравнений находим решения

$$v_{1,2}^2 = \frac{(v_y^\circ)^2 [1 + \varepsilon_{\perp} r_{22} E_y^{\text{ct}}] + (v_z^\circ)^2}{2} \pm \frac{(v_y^\circ)^2 [1 + \varepsilon_{\perp} r_{22} E_y^{\text{ct}}] - (v_z^\circ)^2}{2} \sqrt{1 - 2(\Delta^*)^2}, \quad (47)$$

$$\text{где } (\Delta^*)^2 = \frac{2(v_y^\circ)^2 (v_z^\circ)^2 (\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{||} (r_{51} E_y^{\text{ct}})^2)}{\left( (v_y^\circ)^2 [1 + \varepsilon_{\perp} r_{22} E_y^{\text{ct}}] - (v_z^\circ)^2 \right)^2} = \frac{2(r_{51} E_y^{\text{ct}})^2}{\left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} + r_{22} E_y^{\text{ct}} \right)^2}.$$

Поскольку  $2(\Delta^*)^2 \ll 1$ , то окончательно выражения (47) примут вид

$$v_1^2 = c^2 \left( \frac{1}{n_o^2} + r_{22} E_y^{\text{ст}} - \frac{(r_{51} E_y^{\text{ст}})^2}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} + r_{22} E_y^{\text{ст}}} \right), \quad (48)$$

$$v_2^2 = c^2 \left( \frac{1}{n_e^2} + \frac{(r_{51} E_y^{\text{ст}})^2}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} + r_{22} E_y^{\text{ст}}} \right). \quad (49)$$

Здесь фактически мы сталкиваемся как с линейным эффектом (для волны  $v_1$ ), так и с квадратичным (для обеих волн). Направления поляризации  $y'$  и  $z'$  световых волн, распространяющихся в кристалле вдоль оси  $x$  под действием поля  $E_y^{\text{ст}}$  со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , соответственно, определяются из уравнений (45), (46) с учетом решений (48), (49), следующим выражением:

$$\text{tg } \alpha = \frac{D_z^{\circ}}{D_y^{\circ}} = \frac{\varepsilon_{||} r_{51} E_y^{\text{ст}}}{1 - \frac{v_1^2}{(v_z^{\circ})^2}} = \frac{r_{51} E_y^{\text{ст}}}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} - r_{22} E_y^{\text{ст}} + \frac{(r_{51} E_y^{\text{ст}})^2}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} + r_{22} E_y^{\text{ст}}}}, \quad (50)$$

где  $\alpha$  – угол, определяющий индуцированные направления поляризации  $y'$  и  $z'$  световых волн, относительно кристаллофизических направлений  $y$  и  $z$ . Даже для умеренно сильных электрических полей: при  $E_y = 10^6$  В/м,  $\alpha = -0.11^\circ$ . Тогда для данной геометрии взаимодействия светового пучка (распространяется по оси  $x$ ) и внешнего электрического поля  $E_y^{\text{ст}}$  волна с исходной поляризацией по оси  $y$  будет распространяться в кристалле со скоростью  $v_1$ , а волна с поляризацией по оси  $z$  – со скоростью  $v_2$ .

Итак, как видно из проведенного анализа волновых уравнений для кристалла ниобата лития, для обеспечения фазовой модуляции, когда необходимо максимальное изменение показателя преломления для данной линейной поляризации, наиболее оптимальное проявление достигается в условиях реализации поперечного эффекта Поггеля (электрическое поле создается по направлению оптической оси).

### Заключение

Для количественной оценки степени влияния внешнего статического электрического поля на распространение светового пучка в кристаллах предложено теоретическое описание эффекта Поггеля в форме уравнений Максвелла на примере кристалла ниобата лития. Анализ получаемых в этом случае волновых уравнений в полной мере позволяет оценить проявление электрооптического эффекта в конкретном кристалле, то есть определить фазовые скорости и поляризации плоских световых волн, распространяющихся в кристалле в главных кристаллофизических направлениях для различных случаев влияния внешнего электрического поля в данных

направлениях. Далее, используя метод преобразования координат, можно получить выражения, определяющие фазовые скорости световых волн, распространяющихся в электрооптических кристаллах в произвольном направлении, что не представлено в настоящей работе.

Таким образом, составленное в данной работе структурированное теоретическое описание и алгоритм исследования эффекта Поккельса (на примере кристалла ниобата лития) применимы для изучения электрооптических свойств произвольного кристалла. Отметим, что все полученные в работе результаты не противоречат основам линейного электрооптического эффекта, изложенным в учебной и научной литературе [1–6, 8–10].

### Библиографический список

1. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
2. Мустель Е.П., Парыгин В.Н. Методы модуляции и сканирования света. М.: Наука, 1970.
3. Кузьминов Ю.С. Электрооптический и нелинейно-оптический кристалл ниобата лития. М.: Наука, 1987.
4. Верещагин И.К., Косяченко Л.А., Кокин С.М. Введение в оптоэлектронику. М.: Высшая школа, 1991.
5. Бережной А.А. Анизотропия электрооптического взаимодействия в кристаллах LiNbO<sub>3</sub> // Оптика и спектроскопия. 2002. Т. 92, № 3. С. 503.
6. Ньонхем Р.Э. Свойства материалов. Анизотропия, симметрия, структура. Ижевск: РХД, 2007.
7. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991.
8. Байбородин Ю.В., Гаража С.А. Электрооптический эффект в кристаллах. М.: Машиностроение, 1967.
9. Желудев И.С. Электрооптические явления в кристаллах // Успехи физических наук. 1969. Т. 88, вып. 2. С. 253.
10. Сонин А.С., Василевская А.С. Электрооптические кристаллы. М.: Атомиздат, 1971.

*Саратовский государственный  
технический университет*

*Поступила в редакцию 13.05.2010*

### WAVE EQUATIONS FOR THE POCKELS EFFECT DESCRIPTION IN CRYSTALS AND THEIR ANALYSIS ON THE EXAMPLE OF LITHIUM NIOBATE

*Yu.A. Zyuryukin, M.V. Pavlova, D.R. Drevko*

Theoretical description of the Pockels effect is offered in which statement of a problem in the form of Maxwell equations allows to go on to wave equations directly and to find their solutions. Analytical expressions determining phase velocities and polarization

of the optical plane waves, propagating in crystal of lithium niobate in principal crystallographic directions, for different cases of influence of an exterior static electric field are gained. Appropriate conclusions about optimal use of the Pockels effect for process control of the optical modulation device, in particular on a crystal of lithium niobate, are performed.

*Keywords:* Electro-optical effect, electromagnetic waves, wave equation, lithium niobate.

*Зюрюкин Юрий Анатольевич* (1940–2010) – профессор, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН. С 1957 по 1984 гг. обучался и работал на физическом факультете Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Выполнил ряд оригинальных научных разработок в области вакуумной электроники СВЧ и электродинамики, послуживших основой его кандидатской диссертации (1967), читал курсы лекций по электронике СВЧ и электродинамике, руководил работой аспирантов, проводил исследования в области своей будущей докторской диссертации (1987). Первым начал развивать принципиально новое для Саратова научное направление – СВЧ акустооптоэлектронику, заложив начало большой научно-исследовательской школы под его руководством. Продолжил научную и преподавательскую деятельность в Саратовском государственном техническом университете. Ю.А. Зюрюкин являлся заведующим кафедрой общей физики СГТУ (1985–2010). Защитил докторскую диссертацию (1987), получил ученое звание профессора (1989). В 1994 году избран членом-корреспондентом Российской академии естественных наук. В эти годы стал официальным членом Российского и Европейского акустических обществ, продолжил начатую им в середине 1960-х годов активную работу в секциях научного и головного советов Российской академии наук по проблеме «Ультразвук» и МВ и ССО РФ по проблеме «Приборостроение». Вел активную преподавательскую и научную деятельность со студентами, аспирантами и преподавателями кафедры общей физики СГТУ, разрабатывал физические основы работы приборов СВЧ акустоэлектроники и акустооптики и их новые модификации. Автор свыше 160 научных работ по указанным направлениям.



*Павлова Мария Валентиновна* – родилась в 1977 году, окончила физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по специальности «Радиофизика и электроника» (1999), кандидат физико-математических наук (2003), доцент кафедры общей физики Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов – радиофизика, электродинамика СВЧ, физическая оптика.



410054, Саратов, Политехническая, 77  
Саратовский государственный технический университет  
E-mail: pavlova@sstu.ru

*Древко Дмитрий Романович* – родился в 1981 году, окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2004), аспирант (2006–2009), а затем ассистент кафедры общей физики Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов – электрооптика.



410054, Саратов, Политехническая, 77  
Саратовский государственный технический университет  
E-mail: dmdrevko@gmail.com