



## РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ. ЛОГ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В МОДЕЛИ РАЗРЫВА ПУЧКА ВОЛОКОН

*А.В. Подлазов*

В некоторых системах, развивающихся в режиме с обострением, на основной тренд накладываются лог-периодические колебания, неограниченно ускоряющиеся по мере приближения к моменту обострения. Объяснение подобного поведения, характерного, в частности, для сейсмических и экономических явлений, могло бы дать понимание природы момента обострения, возникающего в этом случае как сгущение точек постоянной фазы колебаний. Такой взгляд есть частный случай более общего подхода, который рассматривает не колебания как возмущение растущего тренда, а напротив – сам тренд как результат колебательного процесса.

Лог-периодические колебания свидетельствуют о дискретной масштабной инвариантности описываемого явления. Легко прослеживается их связь с другими ее примерами, такими как самоподобные фракталы или диффузия на анизотропной решетке, рассматриваемыми в работе. Однако эти примеры предполагают наличие у системы дискретных уровней организации, что само по себе нетривиально.

В работе показано, что лог-периодические колебания возникают в классической модели разрыва пучка волокон при условии, что прочности последних генерируются датчиком случайных чисел ограниченной глубины. В этом случае возможные значения прочностей оказываются элементами периодического множества. А нелинейная модель лишь преобразует периодический входной сигнал в лог-периодический выходной. Весьма широкая распространенность периодических явлений в природе позволяет предположить, что лог-периодичность и в других системах обусловлена аналогичным преобразованием.

*Ключевые слова:* Лог-периодические колебания, режимы с обострением, критические явления, дискретная масштабная инвариантность, разрыв пучка волокон, компьютерное моделирование.

### Введение

Одним из интереснейших объектов нелинейной динамики являются *лог-периодические колебания* [1–11]. Этим термином обычно обозначается развитие катастрофического события, сопровождающееся ускоряющимися колебаниями, в соот-

ветствие с формулой вида

$$x(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t_f - t)^{-\alpha + k\beta i} = (t_f - t)^{-\alpha} P(\log(t_f - t)), \quad (1)$$

где  $t_f$  – момент обострения [12–14], то есть момент времени, к которому рассматриваемая характеристика  $x$  достигает бесконечности, что означает разрушение системы или радикальное изменение закона ее развития, а  $P(\cdot)$  – некоторая периодическая функция. Первый множитель в правой части формулы (1) отвечает за катастрофический тренд, а второй – за накладывающиеся на него колебания, сгущение которых, происходящее по мере приближения  $t$  к  $t_f$ , может служить предвестником катастрофы.

Возможность динамики такого рода дает основания для выработки нового взгляда на природу катастрофы. Ее уместно рассматривать не только как неограни-

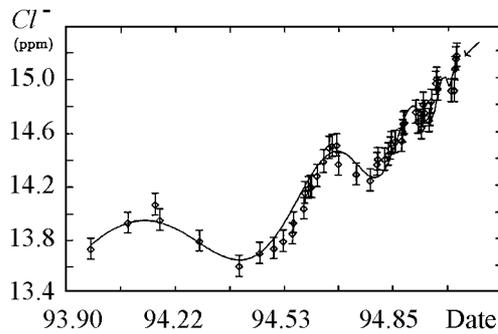


Рис. 1. Концентрация ионов хлора в подземных источниках перед землетрясением в Кобе 17 января 1995 г. [рис. из 1].

Показаны сглаженные данные и аппроксимация несглаженных данных формулой (2). Предсказанный на основе этой аппроксимации момент катастрофы отстоит от реального (отмеченного стрелкой) всего на два дня

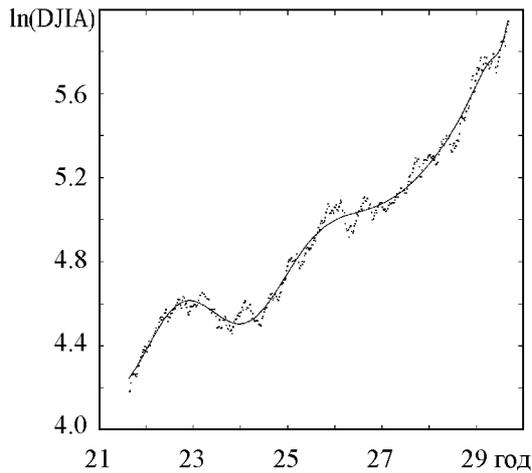


Рис. 2. Логарифм индекса Дуу-Джонса перед крахом 23 октября 1929 г. [рис. из 2].

Сплошная линия соответствует аппроксимации данных формулой (2)

ченное возрастание какой-то величины, характеризующей текущее состояние системы, как это принято в теории режимов с обострением, но и как неограниченное ускорение происходящих в системе колебательных процессов, что, возможно, более точно соответствует детальным механизмам развития катастрофических событий.

На практике разложение (1) часто ограничивают первой гармоникой, записывая его как

$$x(t) \cong (t_f - t)^{-\alpha} \times \left( a_0 + a_1 \cos \left( \beta \ln \frac{t_f - t}{\tau} \right) \right), \quad (2)$$

где  $a_0$  и  $a_1$  – амплитуды, соответственно, основного тренда, растущего в режиме с обострением, и колебаний около него;  $\beta$  – их безразмерная частота;  $\tau$  – размерная фаза. Эта формула оказывается удобной при изучении развития крупных катастрофических событий.

На рис. 1 приведен график изменения концентрации ионов в подземных водах перед разрушительным землетрясением в Кобе (Япония). Отчетливо видны как возрастающий тренд, так и ускоряющиеся колебания, уменьшение периода которых позволяет предсказать момент катастрофы куда точнее, чем можно это сделать на основании анализа тренда.

Второй пример лог-периодических колебаний можно видеть на рис. 2, где

показана динамика логарифма индекса Доу–Джонса, характеризующего стоимость акций крупнейших американских компаний, перед Черным вторником (биржевым крахом, с которого началась Великая депрессия). Катастрофическое событие вновь предваряется несколькими циклами колебаний.

Другие многочисленные примеры лог-периодических колебаний, предшествовавших катастрофическим событиям как сейсмологической, так и экономической природы, описаны в работах [3–8].

В настоящее время механизм возникновения лог-периодических колебаний неясен, хотя исследователями были предложены дифференциальные уравнения с решениями, частично воспроизводящими такую динамику. В работах [9,10] рассматривается уравнение, решение которого описывается формулой (1) с  $a_0 = 0$ , то есть получены колебания вокруг тренда, но за вычетом самого тренда. Однако ни строгого вывода этого уравнения, ни объяснения того, почему динамику нелинейной системы в данном случае можно «разобрать на части», рассматривая колебания отдельно от тренда, нет. В работе [11] избран другой подход, позволяющий получить в качестве решения формулу (2), но введенное там дифференциальное уравнение оказывается неавтономным, и, более того, содержит явным образом величину  $t_f$ . Иными словами, предполагается предопределенность момента катастрофы на уровне постановки задачи, что представляется нефизичным.

Природа лог-периодических колебаний тесно связана сразу с двумя глубокими вопросами: с природой момента обострения (возникновение выделенного момента времени в автономной задаче) и с природой дискретной масштабной инвариантности (возникновение выделенных иерархических уровней). Вместе с тем, взаимосвязь этих вопросов между собой неочевидна и вряд ли может быть строго обоснована. Однако выявление ее контуров является сверхзадачей данного исследования, поэтому в оставшейся части введения дается краткий обзор по этим вопросам.

Основная же часть статьи посвящена рассмотрению модификации модели разрыва пучка волокон [15,16], демонстрирующей один из возможных механизмов возникновения лог-периодические колебания. Не претендуя на полноту и окончательность объяснения их природы, эта модель позволяет на конкретном примере показать связь дискретной масштабной инвариантности с наличием выделенного момента времени.

### **В.1. Выделенные значения времени или управляющего параметра**

Существует, по крайней мере, два класса процессов, в которых наблюдается возникновение выделенных значений переменной – режимы с обострением и критические явления.

**Развитие в режиме с обострением.** Простейшим объектом теории режимов с обострением [12–14] является уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^{1+1/\alpha},$$

решение которого неограниченно возрастает при приближении к некоторому моменту обострения  $t_f$

$$x(t) \sim (t_f - t)^{-\alpha}. \quad (3)$$

Несмотря на огромные успехи, достигнутые теорией режимов с обострением для широкого класса пространственно-распределенных систем, ключевой вопрос теории о природе самого момента обострения остается до сих пор открытым.

Как получается, что условие задачи имеет смысл в общем, а ее общее решение не существует? Почему решение автономного уравнения имеет выделенный момент времени?

Поскольку получить содержательные ответы на эти вопросы в традиционной постановке не удастся, представляется разумным попытаться ее расширить. Наиболее очевидный способ сделать это состоит в формальном переходе от действительного показателя  $\alpha$  к комплексному  $\alpha + \beta i$ , то есть в переходе от рассмотрения процессов вида (3) к рассмотрению более широкого класса процессов вида (1). Учет кратных гармоник здесь обусловлен существенной нелинейностью систем, развивающихся в режиме с обострением, но в простейшем случае можно ограничиться записью (2).

При развитии в режиме (2) момент обострения естественным образом возникает как ступение точек постоянной фазы, приходящихся на моменты времени

$$t_n = t_f - \tau e^{-2\pi n/\beta}.$$

Легко видеть, что  $t_n \rightarrow t_f$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть вопрос о природе выделенного момента времени разрешится сам собой, коль скоро мы научимся объяснить природу лог-периодических колебаний.

К сожалению, такая исследовательская программа пока представляется трудновыполнимой. Как будет продемонстрировано далее, не действительный показатель является частным случаем комплексного, а, напротив, лог-периодические колебания есть очень специальный случай возмущения, наложившегося на степенную динамику. Кроме того, запись колебаний в комплексной форме, естественная и удобная для линейных систем, в случае любой нелинейности сопряжена со значительными вычислительными, а порой и содержательными трудностями.

**Поведение в окрестности критической точки.** Альтернативный подход к выяснению природы выделенного момента времени дает изучение *критических систем* [17]. В них корреляционная длина (характеризующая пространственный масштаб, на котором поведение их элементов согласованно) при приближении *управляющего параметра к критическому значению* расходится степенным образом

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}, \quad (4)$$

что очень напоминает формулу (3).

К сожалению, прямая аналогия между режимом с обострением и критичностью неправомерна. За редкими исключениями (одно из которых рассматривается далее) управляющий параметр  $p$  не может выступать как времениподобная переменная, обладающая естественным направлением изменения. В подавляющем большинстве систем через критическую точку можно проходить в обоих направлениях, и формула (4) остается справедливой как при  $p < p_c$ , так и при  $p > p_c$  (хотя коэффициенты пропорциональности могут различаться).

Существенно и то, что в случае критических явлений обычно не составляет труда объяснить возникновение выделенного значения управляющего параметра  $p_c$ . С одной стороны, это еще более удаляет их от развития в режиме с обострением, но с

другой – позволяет надеяться на достижение понимания природы лог-периодических колебаний на материале критических систем и на его дальнейшее распространение на системы, развивающиеся в режиме с обострением.

## В.2. Дискретная масштабная инвариантность

Степенные зависимости с накладывающимися на них лог-периодическими колебаниями встречаются в дискретных системах регулярной структуры, хотя следует заметить, что при этом не возникает выделенного момента времени или выделенного значения какой-либо другой величины, исполняющей его роль. Рассмотрим два примера подобного рода.

**Самоподобные фракталы.** Первый пример дают *фракталы*. Это геометрические объекты, метрическая размерность которых превышает топологическую [18]. Если покрывать фрактал элементами (например, кругами или квадратами) линейного размера  $\varepsilon$ , то при его стремлении к нулю количество элементов, необходимое для этого, возрастает согласно формуле

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}, \quad (5)$$

где  $D$  – *размерность фрактала*.

На рис. 3 приведен пример *самоподобного фрактала*, получающегося из квадрата в результате деления его на 9 квадратов, имеющих втрое меньшую сторону, с удалением среднего из них и повторением этой процедуры для 8 оставшихся. То геометрическое множество, которое остается от любого из этих квадратов, при увеличении линейных размеров втрое отобразится на весь фрактал. В этом выражается

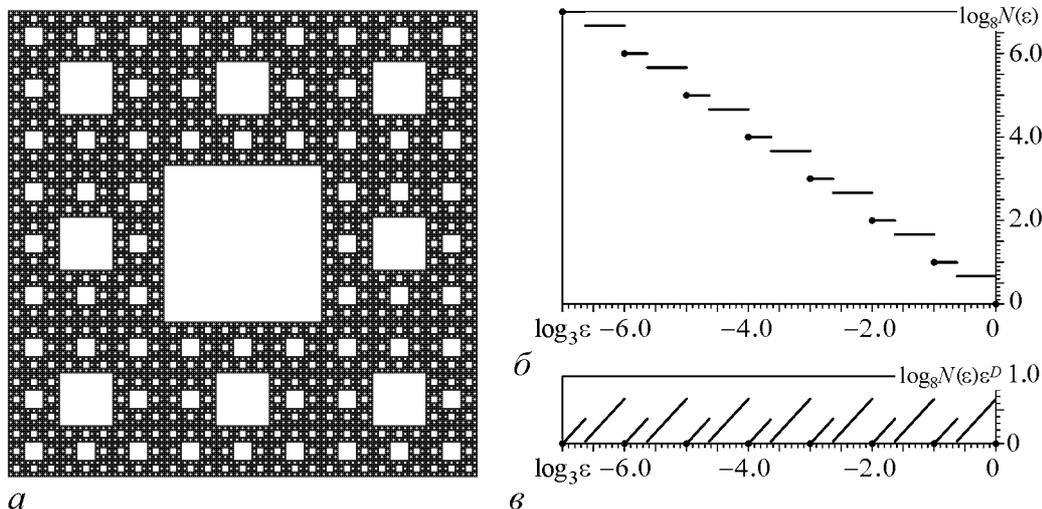


Рис. 3. Комплексная размерность самоподобных фракталов. *a* – Ковер Серпинского [рис. из 19]. При утроении масштаба часть этого фрактального множества совпадает с целым, что означает его самоподобие. *б* – Приведена зависимость количества квадратов  $N$ , необходимых для покрытия ковра, от их стороны  $\varepsilon$ . Жирные точки соответствуют «удобным» квадратам со стороной  $1, 1/3, 1/9 \dots$ , при использовании которых фрактал покрывается без наложений и излишков. Поскольку таких квадратов требуется  $1, 8, 64 \dots$ , его размерность  $D = \log_3 8 \approx 1.89 \dots$ . При использовании квадратов других размеров зависимость  $N(\varepsilon)$  отклоняется от вида (5). *в* – Детрендриванное отклонение – периодическая (в логарифмическом масштабе) функция, фурье-компоненты которой дают комплексные размерности

его самоподобие или, иначе говоря, *масштабная инвариантность*. И если бы она имела место при произвольном преобразовании размеров, то формула (5) выполнялась бы точно. Однако масштабная инвариантность самоподобных фракталов *дискретна* [1,3,6,8]. Для рассмотренного фрактала растяжения с коэффициентами, не являющимися степенями тройки, не позволяют отобразить его на себя. Это приводит к наложению на зависимость (5) возмущения, периодического в логарифмическом масштабе, и как следствие возникновению спектра комплексных фрактальных размерностей (см. рис. 3)

$$D_n = \log_3 8 + \frac{2\pi i n}{\ln 3}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

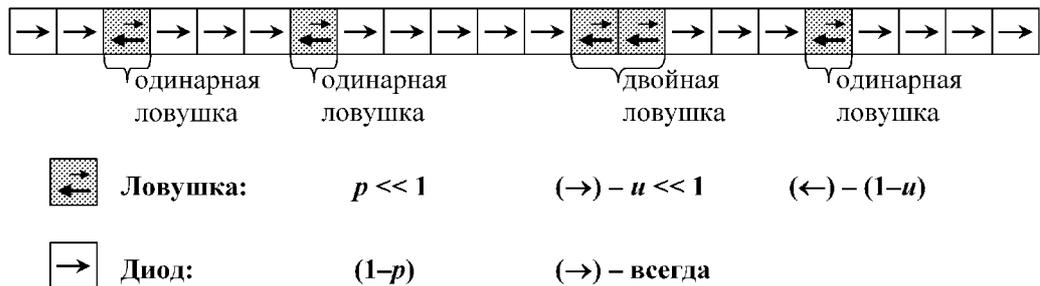
соответствующих разным частотам разложения этого возмущения в ряд Фурье.

Следует заметить, что самоподобные фракталы, выглядящие совершенно одинаково на некоторых разных масштабах, представляют собой искусственные объекты. Реальные фракталы не самоподобны – они на разных масштабах выглядят очень похоже (так, что невозможно определить, на каком именно масштабе они рассматриваются), но всё-таки немного по-разному. И хотя для несамоподобных фракталов зависимость (5) всё равно неточна, после ее детрендривания уже не получается периодической функции. А следовательно, несамоподобные фракталы уже не обладают дискретным спектром комплексных размерностей, как не обладают дискретным спектром комплексных показателей и многие реальные системы, развивающиеся в режиме с обострением.

***Диффузия на анизотропной решетке с закрепленными случайностями.***

Другой пример возникновения дискретной масштабной инвариантности связан с *анизотропной диффузией* [8,20]. В простейшем варианте она реализуется как «блуждание» на решетке, ячейки которой делятся на два типа: *диоды*, составляющие основную массу ячеек, и *ловушки*, доля которых  $p \ll 1$  (рис. 4).

Попав в ячейку-диод, «блуждатель» на следующем шаге смещается в выделенном направлении, а оказавшись в ячейке-ловушке, он может пройти в этом направлении лишь с вероятностью  $u \ll 1$ , а с вероятностью  $(1 - u)$  делает шаг в противоположном направлении. Если за ловушкой находится диод, то миновав ее, блуждатель никогда к ней более не возвращается, а если же за ней оказывается еще



одна ловушка, то с большой вероятностью и уже пройденную ловушку придется преодолевать еще много раз. В результате кратные ловушки оказываются препятствием качественно иного уровня. В каком-то смысле ловушки разной кратности схожи с разными масштабами рассмотрения иерархических систем вроде самоподобных фракталов.

Ловушка кратности  $k$  встречается в среднем один раз на  $x_k = p^{-k}$  ячеек, а на ее прохождение тратится порядка  $t_k = u^{-k}$  шагов. А всего на прохождение дистанции  $x_k$  тратится (с учетом преодоления ловушек меньшей кратности) время

$$\sum_{i=0}^k p^i u^{-(k-i)} = t_k \frac{1 - (u/p)^{k+1}}{1 - u/p}.$$

В случае  $u \ll p$  оно мало отличается от  $t_k$ . Поэтому можно считать, что  $x_k$  – это положение блуждателя в момент времени  $t_k$ .

Таким образом, возникает *перенормировочное уравнение*

$$px(t) = x(ut), \quad (6)$$

которое бы свидетельствовало об однородной (масштабно-инвариантной) зависимости  $x$ , если бы выполнялось при произвольных  $u$  или  $p$ . В этом случае его решение имело бы вид

$$x(t) \sim t^\nu, \quad (7)$$

с показателем  $\nu = \log_u p$ . Но будучи справедливым только при тех  $u$  и  $p$ , которые взяты в постановке задачи, уравнение (6) указывает лишь на лог-периодичность детрендериванной зависимости  $y(t) = x(t)t^{-\nu}$

$$y(t) = y(ut),$$

что рождает целый спектр комплексных показателей для формулы (7)

$$\nu_n = \log_u p + \frac{2\pi i n}{\ln u}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Дискретный характер этого спектра, как и в случае с размерностью самоподобных фракталов, обусловлен наличием четко выделенных уровней. В случае фрактала они связаны с номером итерации процесса построения фрактала, в случае анизотропной диффузии – с кратностью ловушки. Но в любом случае эти уровни строго дискретны. Если допустить наличие ячеек-ловушек с переменной величиной  $u$ , то есть возникновение ловушек нецелой кратности, то лог-периодическая компонента зависимости  $x$  исчезнет, точно так же как исчезает она в зависимости числа элементов покрытия от их размера для несамоподобных фракталов.

### Модель разрыва пучка волокон

Рассмотренные выше системы, демонстрируя дискретную масштабную инвариантность, всё-таки не вполне соответствуют решаемой задаче. Они предполагают наличие явно заданных или фактически возникающих дискретных иерархических уровней, что совершенно нереалистично.

А вот отсутствие выделенного значения времени или иной изменяемой переменной не есть принципиальный недостаток с точки зрения исследования лог-периодичности колебаний. Если совместить в одной модели геометрию самоподобного фрактала и критические свойства, как это сделано в работах [8,21], то легко добиться возникновения колебаний, стягивающихся к выделенному моменту времени в согласии с формулой (1). Однако природа дискретной масштабной инвариантности нуждается в объяснении в той же мере, как и природа лог-периодичности. И еще неизвестно, что сделать проще.

**Правила модели и ее свойства.** Возможность объяснить возникновение лог-периодичности без введения в систему дискретных уровней организации дает классическая модель разрыва пучка волокон [15,16]. В ней рассматривается пучок, изначально состоящий из  $N$  параллельных волокон, к которому приложено усилие  $f$ , разделяемое поровну между всеми волокнами (рис. 5). Каждое волокно характеризуется прочностью  $s$  – той пороговой величиной приходящегося на него усилия, при превышении которого волокно необратимо разрывается. При разрыве волокна усилие мгновенно перераспределяется между оставшимися волокнами, что приводит к росту нагрузки на них. Последняя вновь может превысить прочность некоторых волокон, спровоцировав новые разрывы и т.д. После завершения лавины разрывов усилие, приложенное к пучку, повышается до тех пор, пока вновь не будет превышен порог прочности одного из волокон.

То, как рвется пучок по мере роста приложенного к нему усилия, существенно зависит от степени неоднородности пучка. Если прочность волокон описывается функцией распределения  $F(s)$ , то пучок содержит в среднем  $n = N [1 - F(s)]$  волокон прочности не менее  $s$ , способных выдержать суммарное усилие  $f = sn$ . Таким образом, волокно прочности  $s$  рвется по достижении усилием величины

$$f(s) = Ns [1 - F(s)] \quad (8)$$

при условии, что все более слабые волокна уже порвались.

Если функция распределения  $F(s)$  такова, что выражение (8) имеет максимум в некоторой точке  $s_c > 0$ , то вблизи нее разрывающее усилие удовлетворяет формуле

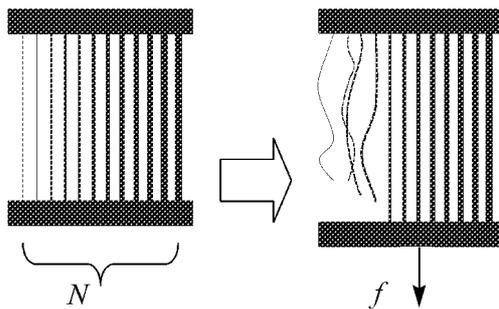


Рис. 5. Разрыв пучка волокон. Прилагаемое к пучку усилие равномерно распределяется между всеми волокнами. Когда волокно не выдерживает, его разрыв приводит к росту той доли усилия, которая приходится на каждое из оставшихся волокон. Если пучок держит приложенное усилие, оно наращивается до тех пор, пока не произойдет разрыв

$$f_c - f(s) \sim (s_c - s)^2. \quad (9)$$

При этом запас прочности, необходимый для выживания волокна, расходится при  $f \rightarrow f_c$  как

$$\frac{ds}{df} \sim (f_c - f)^{-1/2}, \quad (10)$$

то есть  $f_c$  – критическая точка. В ее окрестности на повышение приложенного усилия пучок будет отвечать разрывом числа волокон, распределенного степенным образом. И лишь после того, как  $f$  достигнет  $f_c$ , произойдет разрыв всех оставшихся волокон – полное

разрушение. Соответственно, если рассматривать возрастающую приложенную силу  $f$  как аналог времени, то значение  $f_c$  выступает в роли момента обострения. Причем вопрос о его природе даже не встает – коль скоро число волокон и их прочность конечны, то, несомненно, при некотором усилии весь пучок будет разорван.

Ограничимся для простоты рассмотрением равномерного распределения волокон по прочности на отрезке  $[0; 1]$ , которому соответствует  $F(s) = s$ . В этом случае  $s_c = 1/2$  и  $f_c = N/4$ , а формула (9) точна для всех  $s$ , а не только для близких к  $s_c$ .

**Особенности процесса разрушения в дискретном случае.** Формула (10) для скорости разрыва получена для континуального множества волокон. В случае их конечного числа отношение дифференциалов заменится отношением конечных приращений прочности слабейшего волокна  $\delta s$  и приложенного усилия  $\delta f$ .

На рис. 6 представлена динамика дискретного аналога скорости разрыва, определенная в ходе компьютерного эксперимента для пучка волокон, прочности которых сгенерированы с помощью датчика случайных чисел. Легко видеть, что график сильно отклоняется от тренда, предсказанного формулой (10).

Рис. 7, где зависимость детрендирована, позволяет установить лог-периодический характер колебаний, наложившихся на тренд.

При анализе на рис. 7 и далее полагается, что моменту обострения соответствует не значение  $f_c$ , а немного большая величина  $f_f$ , подбираемая так, чтобы постоянство частоты колебаний в логарифмическом масштабе выдерживалось максимально строго.

В выборе эмпирического момента обострения  $f_f$ , отличного от  $f_c$ , имеется некоторый произвол, однако, не очень большой. С одной стороны, для реальных, а не модельных систем точное положение момента обострения всё равно не известно (так как система разрушается до его достижения) и является подгоночным. А с другой стороны, введение дополнительного выделенного значения  $f$  имеет и вполне содержательный математический смысл, который станет понятен позже.

Если бы с реальным пучком дела обстояли так же, как в описанном

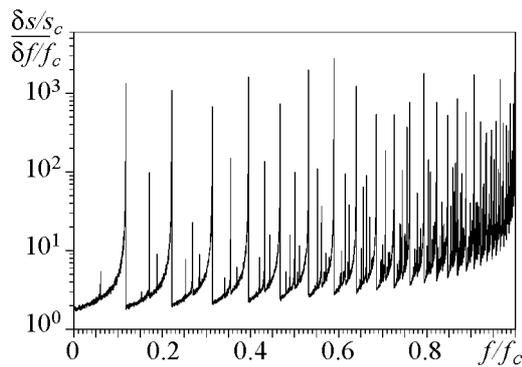


Рис. 6. Экспериментально измеренная скорость разрыва. Хотя скорость разрыва расходится при  $f \rightarrow f_c$ , на возрастающий тренд накладываются очень сильные колебания, сгущающиеся по мере приближения к моменту обострения. Результат получен для пучка, состоящего из  $N = 2^{27} \approx 10^8$  волокон

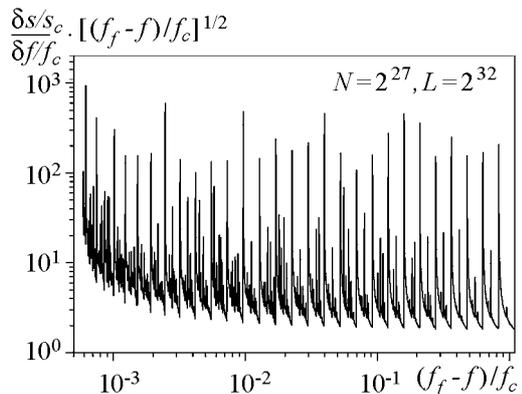


Рис. 7. Колебательная компонента скорости разрушения. Показана та же зависимость, что и на рис. 6, но с компенсированным трендом (10), растущим в режиме с обострением. По абсциссе взята отстройка от эмпирического момента обострения  $f_f$  в логарифмическом масштабе. При этом эквидистантные пики соответствуют лог-периодическим колебаниям. Глубина использованного датчика случайных чисел – 32 бита

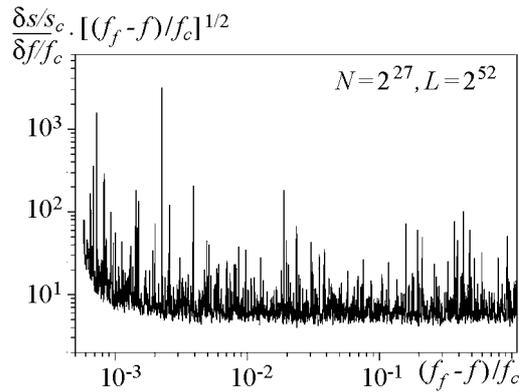


Рис. 8. Увеличение разрядности датчика. Та же самая зависимость, что и на рис. 7, но при генерации набора волокон использовался датчик случайных чисел с глубиной 52 бита. Эквидистантных пиков, соответствующих лог-периодическим колебаниям, здесь нет. Для устранения возможных разночтений при получении этого и предыдущего рисунков реально использовалась одна и та же генерация случайных чисел, но для рис. 7 у них были сохранены только 32 старших бита, а последующие сброшены в ноль

лог-периодических колебаний. Их возникновение обусловлено не вполне корректной дискретизацией модели при построении для нее компьютерного алгоритма, что задним числом можно трактовать как умышленную модификацию правил модели. Однако история науки учит, что путь, приведший к неожиданным результатам, порой становится их неотъемлемой составной частью. Поэтому автору представляется крайне важным сохранить всю последовательность действий, позволивших обнаружить принципиально новый эффект в хорошо изученной модели.

Входным сигналом для модели разрыва пучка волокон является случайная генерация их прочностей. И конечная точность датчика случайных чисел означает периодичность сигнала, подаваемого на вход модели. В самом деле, если датчик позволяет сгенерировать  $L$  различных случайных целых чисел  $0 \leq l < L$ , то прочностей, получаемые линейным отображением этого диапазона на единичный отрезок,

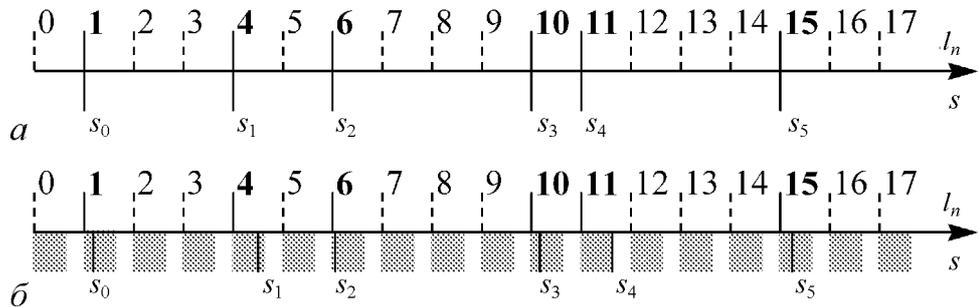


Рис. 9. Связь случайных чисел и прочностей волокон. *a* – Случай строгой периодичности. Прочности волокон  $s$  выбираются из набора эквидистантных величин, связанных с целочисленными значениями датчика  $l$  формулой  $Ls_n = l_n$ . *б* – Случай нестрогой периодичности. Здесь уже возможен некоторый допуск и  $L\Delta s_n \in [l_n; l_n + \Delta l]$  с  $\Delta l < 1$ . Однако, по-прежнему, все возможные значения  $s$  принадлежат периодическому множеству

компьютерном эксперименте, то вряд ли объяснение лог-периодических колебаний представляло бы существенную трудность. Однако интуиция подсказывает, что подобного поведения быть просто не может. И, действительно, данный результат является артефактом численного моделирования.

Наблюдаемый феномен обусловлен особенностями датчика случайных чисел, который использовался для генерации прочностей волокон. Генерируемые случайные числа имели всего 32 двоичных разряда. Если взять датчик с большей разрядностью, то, как можно видеть из рис. 8, лог-периодичность исчезает, и отклонения от тренда принимают случайный характер.

Иными словами, в своем аналоговом варианте модель разрыва пучка волокон не демонстрирует лог-

выбираются на периодической решетке, имеющей шаг  $1/L$  (рис. 9, а). И если отношение  $L/N$ , равное среднему числу шагов решетки, разделяющих два последовательных по прочности волокна, не очень велико, то в модели наблюдается лог-периодическое поведение. В случае, представленном на рис. 7, это отношение (определяющее, как будет показано далее, число циклов, проходимых системой до полного разрушения) составляло всего  $2^5 = 32$ . А при переходе к рис. 8 оно было увеличено в  $2^{20} \approx 1$  млн. раз, что сделало совершенно несущественной принадлежность прочностей периодическому набору.

Заметим, что строгая периодичность входа модели необязательна для получения лог-периодических колебаний. Можно допустить некоторое отклонение прочностей от величин, строго соответствующих точкам целочисленной решетки (как показано на рис. 9, б). Важно, однако, чтобы размытие решетки имело регулярный характер, тогда, как можно видеть на рис. 10, эквидистантность пиков сохраняется, хотя они тоже становятся размытыми.

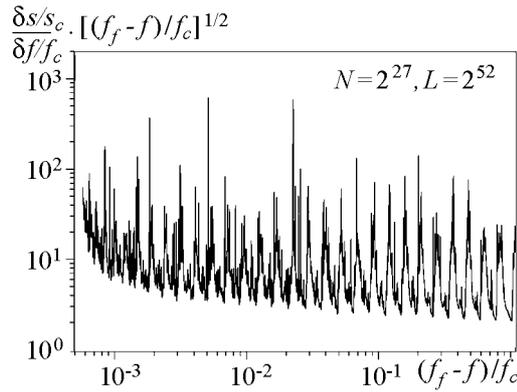


Рис. 10. Случай нестрогой периодичности. То же самое, что и на рис. 8, но случайные числа только частично закруглены до 32 бит. Посредством конъюнкции с маской `0xFFFFFFFF3FFFFFFF` в ноль сброшены не все последующие биты, а лишь 2. Генерируемые так числа могут отклоняться от возможных значений 32-битного датчика, но не более чем на четверть младшего разряда. Лог-периодичность сохраняется, хотя пики утрачивают четкость

### Природа лог-периодичности

Осталось разобраться, где именно возникают пики и как именно модель разрыва пучка волокон конвертирует периодическую компоненту входного сигнала в лог-периодический выходной сигнал.

**Резонансные пики.** Пусть имеется  $N$  волокон и для них  $L$  потенциально возможных прочностей. Обозначим  $n$ -е по величине значение случайного числа в генерации через  $l_n$ . Тогда, соответствующая ему прочность

$$s_n = \frac{l_n}{L}, \quad (11)$$

а, кроме того, в силу равномерности распределения волокон по прочности

$$s_n \approx \frac{n}{N}. \quad (12)$$

Усилие, необходимое для разрыва  $n$ -го волокна

$$f_n = s_n (N - n).$$

При увеличении номера волокна  $n \rightarrow n + \delta n$  и  $l_n \rightarrow l_n + \delta l_n$  это усилие возрастает на величину

$$\delta f_n = \frac{l_n + \delta l_n}{L} (N - n - \delta n) - \frac{l_n}{L} (N - n) \approx \frac{(N - n) \delta l_n + l_n \delta n}{L}.$$

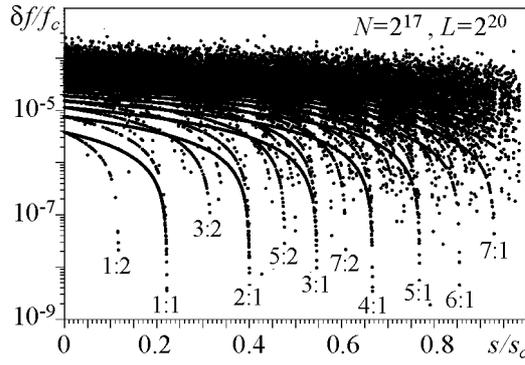


Рис. 11. Приближение к резонансам ( $\delta l_n : \delta n$ ). Малые приращения  $\delta f$  группируются по абсциссе в районе резонансных прочностей, лежащая на (прямые в обычном масштабе) линии, заданные уравнением (15). Самые сильные резонансы с  $\delta n = 1$  (разрыв всего одного волокна в ответ на рост приложенного усилия) соответствуют основной частоте лог-периодических колебаний, вторичные резонансы с  $\delta n \geq 2$  – обертонам

Исключение  $n$  и  $l_n$  с помощью формул (11) и (12) окончательно дает

$$\delta f_n \cong \frac{N\delta l_n - s(N\delta l_n + L\delta n)}{L}. \quad (13)$$

Экспериментально наблюдаемые гигантские всплески отношения приращений прочности слабейшего волокна и приложенного усилия (пики) связаны с обращением последнего почти что в ноль. Положив  $\delta f_n = 0$  и потребовав тем самым, чтобы разрыв происходил без увеличения приложенного усилия, находим *резонансное значение* прочности  $\tilde{s}_n$ , при котором увеличение но-

мера слабейшего волокна на  $\delta n$  и соответствующего ему значения датчика на  $\delta l_n$  возможно без роста приложенного усилия:

$$\tilde{s}_n \cong \frac{N\delta l_n}{N\delta l_n + L\delta n}. \quad (14)$$

Разумеется, нет никаких гарантий, что в случайно сгенерированном пучке действительно найдется волокно именно с такой прочностью. Однако сгодится и прочность, чуть меньшая резонансной,

$$\tilde{s}'_n = \tilde{s}_n - \Delta s.$$

Как следует из формулы (13), необходимый для разрыва такого волокна прирост усилия

$$\delta f'_n = \Delta s \left( \delta n + \frac{N}{L} \delta l_n \right) \quad (15)$$

будет мал в меру малости отклонения  $\Delta s$ . Следовательно, при резонансных прочностях, задаваемых формулой (14), или близких к ним возможны пики скорости разрыва.

Рис. 11 показывает измеренные в численном эксперименте приросты усилия, демонстрирующие изобилие волокон с прочностями, близкими к резонансным, в реальной генерации.

**Преобразование масштабов.** Теперь необходимо установить, как положения резонансов (14) превращаются именно в эквидистантные в логарифмическом масштабе пики.

В соответствие с формулой (9), относительная отстройка усилия от критического значения определяется по формуле

$$\frac{f_c - f}{f_c} = \left( \frac{s_c - s}{s_c} \right)^2 = (1 - 2s)^2,$$

поскольку для рассматриваемого варианта модели  $s_c = 1/2$ . С помощью формулы (14) для положения пиков получаем

$$\frac{f_c - \tilde{f}_n}{f_c} = (1 - 2\tilde{s}_n)^2 = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2,$$

где  $z = \frac{\delta l_n N}{\delta n L} = \frac{\tilde{s}_n}{1 - \tilde{s}_n}$  изменяется от 0 до 1 при изменении  $s$  от 0 до 1/2. Если принять положение эмпирического момента обострения

$$f_f = f_c(1 + a),$$

то логарифм относительной отстройки от него, которая откладывается по абсциссе на рис. 7, 8 и 10, есть

$$g(z) = \ln \frac{f_f - f}{f_c} = \ln \left( a + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 \right).$$

Замечательным обстоятельством является возможность подобрать значение параметра  $a$  таким образом, что эта функция оказывается практически линейной почти на всем отрезке  $[0; 1]$  (врезка на рис. 12).

Если оценивать качество приближения функции  $g(z)$  на отрезке  $[0; z]$  ее линейным разложением

$$g_1(z) = \ln(1 + a) - \frac{4}{1 + a} z$$

с помощью интегральной невязки

$$\varepsilon_a(z) = \int_0^z [g(\zeta) - g_1(\zeta)] d\zeta,$$

то, как можно видеть из рис. 12, приближение оказывается очень хорошим (невязка на три порядка меньше изменения функции почти на всем диапазоне изменения аргумента).

Иными словами, благодаря определенной свободе выбора положения эмпирического момента обострения  $f_f$ , величина  $\log(f_f - f)$  практически линейно зависит от отношения  $\delta l_n : \delta n$ . Вследствие этого резонансы при фиксированном  $\delta n$  и последовательных значениях  $\delta l_n$  оказываются эквидистантны. Таким образом, динамика системы на протяжении почти всего времени ее существования описывается формулой (1). И лишь в непосредственной близости от момента обострения, где система уже практически ненаблюдаема, происходит отклонение от такого поведения. Однако и там это отклонение носит лишь количественный, а не качественный характер – сгущение колебаний сохраняется, хотя оно более и не подчиняется простой формуле (1).

Пучок сохраняется при прочностях слабейшего волокна  $s < s_c = 1/2$ . Наложение этого ограничения на резонансные прочности формулы (14) дает ограничение на количество резонансов

$$\delta l_n < \frac{L}{N} \delta n.$$

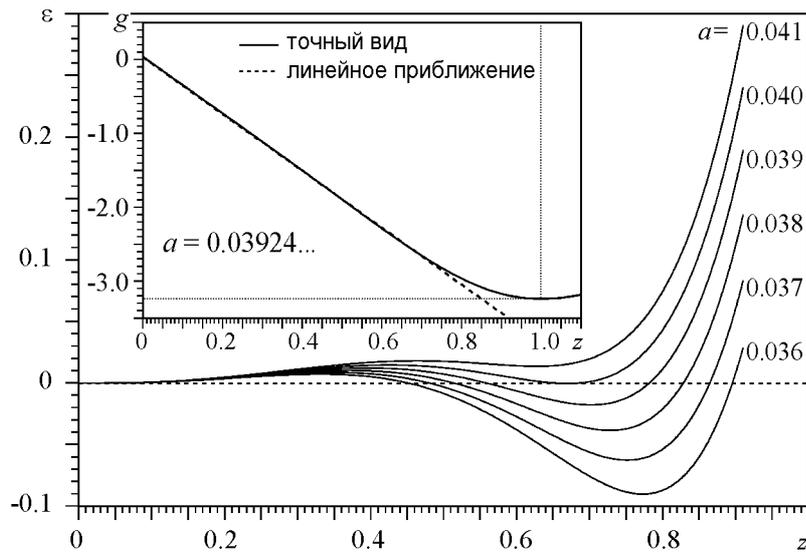


Рис. 12. Линейность преобразования масштабов. При  $a \approx 0.037 \dots 0.041$  для  $z \leq 0.75$  интегральная невязка между функциями  $g(z)$  и  $g_1(z)$  очень мала. Уменьшение параметра  $a$  позволяет несколько расширить участок, на котором имеет смысл использовать линейное приближение, за счет некоторого ухудшения качества последнего. Поскольку никаких однозначных критериев для точного выбора  $a$  нет, в данной работе принято такое значение, при котором на линейном участке  $g(z) \sim 1 - 100z$ . На врезке – графики функции и ее линейного приближения при этом  $a$

Основной частоте колебаний следуют пики, возникающие при  $\delta n = 1$  (см. рис. 11). Их количество ограничено отношением  $L/N$ , которое, следовательно, не должно быть очень большим, чтобы можно было различить отдельные циклы колебаний.

Следует заметить, что реально наблюдаемое число циклов лог-периодических колебаний несколько меньше, чем  $L/N$ , поскольку вблизи момента обострения происходят столь быстрые изменения, что картина смазывается. Дополнительные искажения вносятся также работой с отстройкой усилия не от критического значения  $f_c$ , а от эмпирического момента обострения  $f_f$ , что, однако, не меняет качественных свойств системы.

## Выводы

Развитие в режиме с обострением связано с ускорением происходящих в системе процессов, которое может проявляться в виде лог-периодических колебаний.

Один из возможных механизмов их возникновения раскрывает модель разрыва пучка волокон. Если прочности волокон выбираются из периодического набора значений (генерируются с помощью датчика случайных чисел ограниченной точности), то наблюдающиеся в модели колебания оказываются периодической функцией логарифма отстройки усилия от эмпирического момента обострения. Причем постоянство периода сохраняется почти до самого момента обострения.

Причиной возникновения лог-периодических колебаний в критической системе может быть преобразование входного сигнала, периодического в линейном масштабе, в выходной сигнал, периодический в логарифмическом масштабе. Модель разрыва пучка волокон демонстрирует пример такого преобразования.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00781/11-01-00887 и 10-01-00786).*

## Библиографический список

1. *Johansen A., Sornette D., Wakita H., Tsunogai U., Newman W.I., Saleur H.* Discrete scaling in earthquake pre-cursory phenomena: Evidence in the Kobe earthquake, Japan // *J. Phys. I (France)*. 1996. Vol. 6. P. 1391.
2. *Sornette D., Johansen A.* Large financial crashes // *Physica A*. 1997. Vol. 245, № 3–4. P. 411. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9704127>
3. *Сорнетте Д.* Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах. М.: Интернет-трейдинг, 2003. 400 с.
4. *Sornette D., Sammis C.G.* Complex critical exponents from renormalization group theory of earthquakes: Implications for earthquake predictions // *J. Phys. I (France)*. 1995. Vol. 5, № 5. P. 607.
5. *Johansen A., Sornette D.* Critical crashes // *Risk*. 1999. Vol. 12, № 1. P. 91. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9901035>
6. *Johansen A., Sornette D., Ledoit O.* Predicting financial crashes using discrete scale invariance // *Journal of Risk*. 1999. Vol. 1, № 4. P. 5. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9903321>
7. *Sornette D., Johansen A.* Significance of log-periodic precursors to financial crashes // *Quantitative Finance*. 2001. Vol. 1, № 4. P. 452. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0106520>
8. *Saleur H., Sammis C.G., Sornette D.* Discrete scale invariance, complex fractal dimensions and log-periodic fluctuations in seismicity // *J. Geophys. Res.* 1996. Vol. 101. P. 17661.
9. *Ide K., Sornette D.* Oscillatory finite-time singularities in finance, population and rupture // *Physica A*. 2002. Vol. 307, № 1–2. P. 63. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0106047>
10. *Sornette D., Ide K.* Theory of self-similar oscillatory finite-time singularities in finance, population and rupture // *Int. J. Mod. Phys. C*. 2002. Vol. 14, № 3. P. 267. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0106054>
11. *Basin M.A.* Differential equations determining the function that describes pre-catastrophic behavior of a system // *Technical Physics Letters*. 2006. Vol. 32, № 4. P. 338.
12. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
13. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур // Сб.: «Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения» / Ред. Г.Г. Малинецкий. М.: Наука, 1998. 255 с.
14. Режимы с обострением: эволюция идеи // Сборник статей. 2-е изд. испр. и доп. / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Физматлит, 2006. 312 с.
15. *Andersen J.V., Sornette D., Leung K.-T.* Tri-critical behavior in rupture induced by disorder // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 2140.
16. *Zhang S., Fan Q., Ding E.* Critical processes, Langevin equation and universality // *Physics Letters A*. 1995. Vol. 203. P. 83.
17. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
18. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
19. [http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski\\_carpet](http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_carpet)

20. *Stauffer D.* New simulations on old biased diffusion// *Physica A.* 1999. Vol. 266, № 1–4. P. 35.
21. *Sornette D., Johansen A.* A hierarchical model of financial crashes // *Physica A.* 1998. Vol. 261, № 3–4. P. 351.

*Институт прикладной  
математики им. М.В. Келдыша РАН*

*Поступила в редакцию 8.07.2010  
После доработки 11.04.2011*

## **BLOW-UP WITH COMPLEX EXPONENTS. LOG-PERIODIC OSCILLATIONS IN THE DEMOCRATIC FIBER BUNDLE MODEL**

*A.V. Podlazov*

The main trend of some blow-up systems is disturbed by log-periodic oscillations infinitely accelerating when approaching the blow-up point. Explanation of such behavior typical e.g. for seismic and economic phenomena could give an insight into the nature of blow-up point rising in this case as the condensation of constant phase points of oscillations. This viewpoint is a particular case of the more general approach that treats not oscillations as a disturbance of the growing trend, but the trend itself as a result of oscillatory process.

Log-periodic oscillations indicate about the discrete scale invariance of described phenomenon. One can easily establish the connection of theirs with other its examples, such as considered here self-similar fractals or diffusion in anisotropic quenched random media. However these examples presuppose the presence of discrete levels of organization in the system nontrivial of themselves.

We show that log-periodic oscillations arise in the classical democratic fiber bundle model with the strength of bundles generated by means of random number generator of limited depth. In this case possible strength values belong to a periodic set. And the nonlinear model just transforms this periodic input to the log-periodic output. Periodic events are quite worldwide, so one can assume that log-periodicity in other systems originates from a similar transformation.

*Keywords:* Log-periodic oscillations, blow-up growth, critical phenomena, discrete scale invariance, democratic fiber bundle model, computer simulation.



*Подлазов Андрей Викторович* – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). После окончания МФТИ работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (2001) в области теории самоорганизованной критичности и теории масштабно-инвариантных процессов. Автор монографий «Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика» [М.: Наука, 2000. 432 с.] (в соавторстве с В.А. Владимировым, Ю.Л. Воробьевым, Г.Г. Малинецким и др.) и «Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды» [Изд.3/ Синергетика: от прошлого к будущему. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.] (в соавторстве с Г.Г. Малинецким и А.Б. Потаповым). Опубликовал 60 научных статей по направлениям, указанным выше, а также по демографии, математической истории и вопросам развития системы образования.

125047 Москва, Миусская пл., 4  
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
E-mail: Tiger@Keldysh.ru