

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ НАГРУЗКИ\*

### 1. Теория

*Ю.В. Новожилова*

В генераторе, работающем на слабо отражающую удаленную нагрузку, в случае большого запаздывания допускается конечное число одночастотных состояний – продольных мод с действительными частотами. Исследована устойчивость каждой из этих мод относительно роста возмущений, которые могут быть двух типов: возмущения на собственной частоте исходной моды и возмущения в виде двух боковых сателлитов, симметрично отстоящих по частоте от частоты этой моды.

*Ключевые слова:* Работа генератора на нагрузку, запаздывающее отражение, устойчивость одночастотных решений.

### Введение

Генератор, соединенный волноводом с отражающей нагрузкой (рис. 1), относится к классу распределенных автоколебательных систем с запаздыванием и имеет бесконечное число степеней свободы. На стадии малого сигнала в таких системах существует бесконечный набор собственных функций (мод) и соответствующих собственных значений (комплексных частот). Некоторые из этих мод могут быть нарастающими, а на стадии сильного сигнала их мощность ограничивается нелинейностью активного элемента  $R$ . При этом допускается конечное число одночастотных решений (продольных мод)<sup>1</sup> с постоянной амплитудой. В определенных областях параметров динамика систем с запаздыванием может оказаться достаточно сложной, включая хаотическую. Такая сложная динамика исследовалась в большом числе работ численно и наблюдалась экспериментально [1–19]. Существенно меньшее число публикаций посвящено изучению устойчивости одночастотных решений (мод) [20,21]. В настоящей работе задача об устойчивости одночастотных решений

\*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

<sup>1</sup>Эти продольные моды соответствуют одночастотным колебаниям нелинейной системы и, в отличие от мод линейной консервативной системы, не обладают свойствами полноты и ортогональности.

рассмотрена более детально для случая малого коэффициента отражения. Показано, что возмущения можно отнести к одному из двух типов: возмущения на собственной частоте, представляющие собой достаточно медленные изменения амплитуды и частоты первичной моды, и возмущения в виде боковых сателлитов с частотами, симметрично отстоящими от частоты первичной моды. Исследована устойчивость продольных мод относительно каждого типа возмущений. В I части аналитическими методами решена задача об устойчивости относительно возмущений первого типа для случая произвольного превышения тока над стартовым значением и относительно возмущений второго типа (распада на сателлиты) для случая достаточно большого превышения тока над стартовым значением. Во II части (см. [22]) в пространстве параметров системы численными методами найдены области устойчивости и неустойчивости относительно распада на сателлиты при произвольном превышении тока над пороговым значением.



Рис. 1. Генератор ван дер Поля, соединенный с удаленной нагрузкой;  $C$ ,  $R$ ,  $L$  – соответственно емкость, активное сопротивление, индуктивность контура, моделирующего генератор,  $Z_l$  – импеданс нагрузки,  $l$  – длина линии задержки

## 1. Теоретическая модель

Считаем, что в схеме, изображенной на рис. 1, ток  $\hat{I}_R$  в активном элементе зависит от напряжения  $\hat{U}$  по кубическому закону

$$\hat{I}_R = -\frac{\hat{U}}{R_0} (1 - \nu \hat{U}^2). \quad (1)$$

Предполагаем, что  $R_0 > 0$ ,  $\nu > 0$ , так что при малых напряжениях проводимость отрицательна. Кроме того, считаем выполненными следующие ограничения.

- Стартовый инкремент генератора без линии  $1/(2R_0C)$  мал по сравнению с собственной частотой колебательного контура генератора  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

$$R_0 \gg \sqrt{L/C}. \quad (2)$$

- Волновое сопротивление линии  $\rho$  и активное сопротивление  $R_0$  – величины одного порядка:

$$\rho \sim R_0. \quad (3)$$

- Дисперсия в линии отсутствует.

## 2. Одночастотные процессы

Согласно (2), (3), добротность колебательного контура генератора, зашунтированного волновым сопротивлением, велика:  $Q = \rho\sqrt{C/L} \gg 1$ . При этом в системе допускаются одночастотные колебания, частота которых  $\omega_c$  близка к собственной частоте колебательного контура  $\omega_0$

$$\alpha = \bar{\omega}_c - 1, \quad |\alpha| \ll 1, \quad (4)$$

где  $\bar{\omega}_c = \omega_c/\omega_0$ , а высшими гармониками этих колебаний можно пренебречь, так как они находятся за пределами полосы контура.

Чтобы найти связь частоты и амплитуды колебаний, воспользуемся соотношением Кирхгофа для токов в ветвях контура (см. рис. 1)

$$\hat{I}_L + \hat{I}_R + \hat{I}_C = \hat{U}_c/Z_2, \quad (5)$$

где  $\hat{U}_c = \text{Re}(U_c e^{i\omega_c t})$  – напряжение на контуре,  $\hat{I}_{L,R,C}$  – токи через индуктивность, активное сопротивление и емкость,  $Z_2$  – импеданс нагрузки на частоте  $\omega_c$ , пересчитанный в сечении  $z = 0$ :

$$Z_{2c} = \frac{i\rho \operatorname{tg} \vartheta_c + Z_l}{1 + iZ_l \operatorname{tg} \vartheta_c/\rho}, \quad (6)$$

$\vartheta_c = \omega_c t_{\text{del}} = \vartheta_0(1 + \alpha)$  – фаза запаздывания волны в линии на частоте  $\omega_c$ ,  $l$  – длина линии,  $t_{\text{del}} = l/c$  – время запаздывания,  $\vartheta_0 = \omega_0 l/c$  – фаза запаздывания на собственной частоте контура. Поскольку токи на емкости и индуктивности связаны с напряжением соотношениями

$$I_L = \text{Re}(U_c e^{i\omega_c t}/(i\omega_c L)), \quad I_C = \text{Re}(i\omega_c C U_c e^{i\omega_c t}), \quad (7)$$

из (1), (5), (6) получим

$$-i\omega_c U_c C - \frac{U_c}{i\omega_c L} + \frac{U_c}{R_0} - \frac{3v}{4R_0} |U_c|^2 U_c = \frac{U_c(1 + iZ_l \operatorname{tg} \vartheta_c/\rho)}{Z_l + i\rho \operatorname{tg} \vartheta_c}. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$Z_l = \rho(1 + \delta), \quad \bar{U}_c = \sqrt{3v}U_c, \quad \bar{\omega}_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \mu = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \eta = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9)$$

Заметим, что в отсутствие отражения ( $\delta = 0$ ,  $Z_l = \rho$ ) (8) совпадает с уравнением генератора ван дер Поля для одночастотных процессов. При этом параметр  $\eta = 1/Q$  имеет смысл обратной добротности колебательного контура генератора, зашунтированного волновым сопротивлением;  $(\mu - \eta)$  – это удвоенный стартовый инкремент, или прочность предельного цикла [23, с. 227]. Как следует из условий (2), (3), параметры  $\mu$  и  $\eta$  малы:

$$\mu, \eta \ll 1. \quad (10)$$

В обозначениях (9) уравнение (8) примет вид

$$\omega_c^2 - 1 + i\mu\bar{\omega}_c \left(1 - |\bar{U}_c|^2/4\right) = i\bar{\omega}_c\eta \frac{2 + \delta - \delta e^{-2i\vartheta_c}}{2 + \delta + \delta e^{-2i\vartheta_c}}. \quad (11)$$

Поскольку отражение от нагрузки мало, то импеданс нагрузки  $Z_l$  должен быть близок к волновому сопротивлению  $\rho$  (см. (9))

$$|\delta| \ll 1. \quad (12)$$

При этом условии коэффициент отражения близок к  $\delta/2$ .

Ограничимся рассмотрением только таких процессов, для которых амплитуда излученной волны много больше амплитуды отраженной от нагрузки волны,

вернувшейся в генератор в этот же момент (быстро затухающие процессы не рассматриваем)

$$\left| \delta e^{-2i\vartheta_c} \right| \ll 1. \quad (13)$$

Тогда уравнение (10) сводится к виду

$$\omega_c^2 - 1 + i\mu\bar{\omega}_c \left( 1 - |\bar{U}_c|^2/4 \right) = i\bar{\omega}_c\eta \left( 1 - \delta e^{-2i\vartheta_c} \right). \quad (14)$$

К такому же виду сводится для одночастотных процессов уравнение генератора ван дер Поля с отражением от удаленной нагрузки, исследованное в [20].

Поскольку частота близка к резонансной (см. (4)), запишем уравнение (14) как

$$2\alpha + i\mu \left( 1 - |\bar{U}_c|^2/4 \right) = i\eta \left( 1 - \delta e^{-2i\vartheta_c} \right). \quad (15)$$

**Стартующие моды.** При малой амплитуде колебания  $|\bar{U}_c| \ll 1$ , как следует из (15), комплексная частота отличается от собственной частоты контура на величину

$$\alpha = \frac{i}{2} \left( \eta - \mu - r e^{-2i\vartheta_c} \right), \quad (16)$$

где

$$r = \delta\eta. \quad (17)$$

Моды самовозбуждаются ( $\text{Im } \alpha < 0$ ), когда мощность, выделяемая на отрицательном сопротивлении, превышает мощность потерь. Предположим, что выполнено условие малости коэффициента отражения по сравнению с относительным превышением плотности активного вещества над ее стартовым значением:  $(\mu - \eta)/\eta \gg |\delta|$ , или<sup>2</sup>

$$\mu - \eta \gg |r|. \quad (18)$$

Тогда, как следует из (16), стартовое условие  $\mu > \eta$ , или  $R_0 < \rho$  (см. (9)) и инкременты всех стартующих мод

$$\text{Im } \alpha \approx (\eta - \mu)/2 < 0 \quad (19)$$

имеют такой же вид, как в свободном автогенераторе.

**Моды на нелинейной стадии.** Уравнение (15) допускает конечное число решений с действительной частотой

$$2\alpha = -r \sin(2\vartheta_c) \quad (20)$$

и постоянной амплитудой

$$|\bar{U}_c|^2/4 = (\mu - \eta + r \cos(2\vartheta_c))/\mu. \quad (21)$$

<sup>2</sup>Как следует из обозначений (9), в свободном, без отражений, генераторе величина  $(\mu - \eta)/\eta$  равна относительному превышению плотности активного вещества над пороговым (стартовым) значением. Для электронных генераторов величина  $(\mu - \eta)/\eta$  – это относительное превышение тока над стартовым значением  $(I - I_{st})/I_{st}$ .

Как следует из (9), (21), при малых отражениях (18) мощность, уходящая в нагрузку, пропорциональна  $|\bar{U}_c|^2 \eta$  и максимальна, когда

$$\eta = \mu/2, \quad (22)$$

то есть, когда активное сопротивление  $R_0$  вдвое меньше волнового сопротивления линии  $\rho$ . Заметим, что при малой надпороговости:  $\mu - \eta \sim |r|$  отражение может, в зависимости от фазы  $\vartheta_c$ , привести к срыву генерации (при  $\mu - \eta > 0$ ,  $r \cos(2\vartheta_c) < 0$ ) или наоборот, к возникновению генерации (при  $\mu - \eta < 0$ ,  $r \cos(2\vartheta_c) > 0$ ).

Нахождение частот из (20) удобно пояснить графически (рис. 2): фазы запаздывания  $\vartheta_c$  мод соответствуют пересечению прямой

$$y_1(2\vartheta_c) = 2\vartheta_c \quad (23)$$

и синусоиды

$$y_2(2\vartheta_c) = 2\vartheta_0 - r\vartheta_0 \sin(2\vartheta_c). \quad (24)$$

Следует отметить, что, в соответствии с (20), частоты продольных мод (следовательно, и фазы запаздывания  $\vartheta_c$  на этих частотах) не зависят от амплитуды колебаний. Это связано с тем, что в модели генератора ван дер Поля не учитывается мнимая часть отрицательной проводимости.

Как следует из (20), (21), в отсутствие отражения ( $\delta = 0$ ) существует единственная мода, соответствующая свободным колебаниям генератора:  $\alpha = 0$ ,  $|\bar{U}_c|^2/4 = (\mu - \eta)/\mu$ . При ненулевом отражении мод может быть несколько, но их число конечно (рис. 2, *a*), и это число определяется произведением коэффициента отражения на длину линии  $|r| \vartheta_0$ . Мода является единственной до тех пор, пока

$$|r| \vartheta_0 < 1. \quad (25)$$

Следующая мода появляется при возрастании  $|r| \vartheta_0$ , когда становится выполненным условие касания прямой (23) и синусоиды (24):

$$r\vartheta_0 \cos(2\vartheta_c) = -1. \quad (26)$$

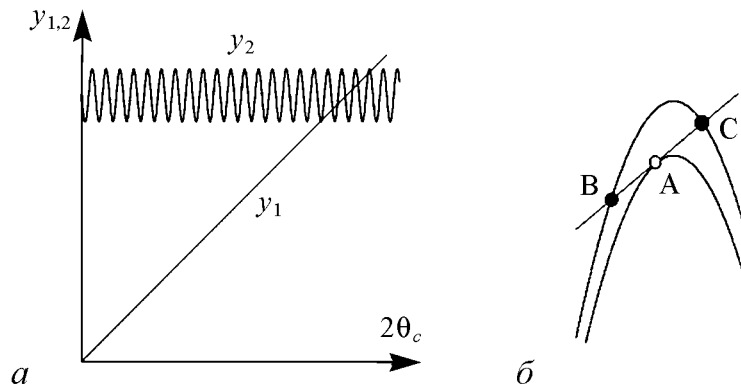


Рис. 2. Графическое решение уравнения (20); *a* – фазы запаздывания мод соответствуют пересечениям графиков  $y_1$  и  $y_2$ ; *б* – фрагмент рис. 2, *a*: рождение новой моды А, которая при увеличении  $|r| \vartheta_0$  распадается на моды В и С

Каждая новая мода является вырожденной: при дальнейшем росте  $|r| \vartheta_0$  она расщепляется на две (рис. 2, б).

Условие единственности продольной моды (25) можно интерпретировать, исходя из аналогии с известной теорией захвата частоты генератора заданным внешним сигналом [23]. В качестве внешнего сигнала выступает отраженная волна с амплитудой  $\delta |\bar{U}_c|/2$ , которая навязывает генератору свою частоту, если только эта частота лежит в полосе синхронизации шириной  $\omega\delta/Q$  (см. [24]). Если в полосе синхронизации оказывается только одна мода линии задержки<sup>3</sup>

$$\omega\delta/Q < c/l, \quad (27)$$

то эта мода в системе единственная. Наоборот, если в полосу синхронизации попадает несколько мод линии задержки, то в системе существует несколько одночастотных решений (продольных мод). С учетом обозначений (9), (17) условия (27) и (25) эквивалентны.

### 3. Уравнения возмущений продольных мод

Допустим, что возникло малое возмущение продольной моды (20), (21)

$$\hat{U}_+ = \text{Re}(U_+ e^{i\omega_+ t}), \quad |U_+|/|U_c| \ll 1. \quad (28)$$

Частота возмущения  $\omega_+$  близка к частоте основной моды (см. (2)–(4)). Квадратичная зависимость тока от напряжения на активном элементе (1) приводит к появлению малых составляющих тока и напряжения во всех ветвях контура на частоте  $\omega_-$ , симметрично отстоящей от частоты основной моды

$$2\omega_c = \omega_+ + \omega_-^*. \quad (29)$$

Следовательно, колебания генератора представляют собой сумму трех колебаний на частотах основной моды и сателлитов. Напряжение и ток на активном элементе представим в виде суммы этих колебаний

$$U = \text{Re}(U_c e^{i\omega_c t} + U_+ e^{i\omega_+ t} + U_- e^{i\omega_- t}), \quad (30)$$

$$I_R = \text{Re}(I_{cR} e^{i\omega_c t} + I_{+R} e^{i\omega_+ t} + I_{-R} e^{i\omega_- t}), \quad (31)$$

где  $I_{cR} = -U_c/R_0 + (3\nu)/(4R_0)|U_c|^2 U_c$  – ток на частоте основной моды  $\omega_c$ ,  $I_{\pm R} = -U_{\pm}/R_0 + (3\nu)/(4R_0)(2|U_c|^2 U_{\pm} + U_c^2 U_{\mp}^*)$  – линейризованные по амплитудам возмущений  $U_{\pm}$  токи на частоте сателлитов  $\omega_{\pm}$ . Воспользовавшись правилом Кирхгофа (5) для гармоник напряжения и токов через элементы контура на частотах возмущений  $\omega_{\pm}$  и повторяя процедуру, изложенную в п. 2, получим соотношения для амплитуд и частот возмущений

<sup>3</sup>Расстояние по частоте между модами длинной линии равно  $c/l$ .

$$\left[ -1 + \bar{\omega}_+^2 + i\mu\bar{\omega}_+ \left( 1 - \frac{|\bar{U}_c|^2}{2} \right) - i\bar{\omega}_+\eta \frac{2 + \delta - \delta e^{-2i\vartheta_+}}{2 + \delta + \delta e^{-2i\vartheta_+}} \right] \bar{U}_+ = \frac{i\bar{\omega}_+\mu\bar{U}_c^2\bar{U}_-^*}{4}, \quad (32)$$

$$\left[ -1 + \bar{\omega}_-^2 + i\mu\bar{\omega}_- \left( 1 - \frac{|\bar{U}_c|^2}{2} \right) - i\bar{\omega}_-\eta \frac{2 + \delta - \delta e^{-2i\vartheta_-}}{2 + \delta + \delta e^{-2i\vartheta_-}} \right] \bar{U}_- = \frac{i\bar{\omega}_-\mu\bar{U}_c^2\bar{U}_+^*}{4}. \quad (33)$$

Здесь  $\vartheta_+ = \omega_+l/c$ ,  $\vartheta_- = \omega_-l/c$  – фазы запаздывания на частотах возмущений  $\omega_{\pm}$ ,  $\bar{U}_{+,-} = \sqrt{3\nu}U_{+,-}$ ,  $\bar{\omega}_{+,-} = \omega_{+,-}/\omega_0$ . Уравнение для исходной моды имеет вид (11), и при условии (13) может быть записано как (14).

Сдвиг частоты возмущения относительно частоты исходной моды

$$\Omega = \bar{\omega}_+ - \bar{\omega}_c \quad (34)$$

в соответствии с (2)–(4) мал<sup>4</sup>:

$$\Omega \ll 1. \quad (35)$$

Как следует из (4), (29), (34), в этих обозначениях

$$\bar{\omega}_+ = 1 + \alpha + \Omega, \quad \bar{\omega}_- = 1 + \alpha - \Omega^*, \quad \vartheta_+ = \vartheta_c + \Omega\vartheta_0, \quad \vartheta_- = \vartheta_c - \Omega^*\vartheta_0. \quad (36)$$

Ограничимся рассмотрением неубывающих возмущений, для которых выполнены условия, аналогичные (13)

$$\left| \delta e^{-2i\Omega\vartheta_0} \right| \ll 1. \quad (37)$$

Тогда уравнения (32), (33) сводятся к виду

$$\left[ 2\alpha + 2\Omega + i\mu \left( 1 - \frac{|\bar{U}_c|^2}{2} \right) - i\eta \left( 1 - \delta e^{-2i\vartheta_c - 2i\Omega\vartheta_0} \right) \right] \bar{U}_+ = \frac{i\mu\bar{U}_c^2\bar{U}_-^*}{4}, \quad (38)$$

$$\left[ 2\alpha - 2\Omega^* + i\mu \left( 1 - \frac{|\bar{U}_c|^2}{2} \right) - i\eta \left( 1 - \delta e^{-2i\vartheta_c + 2i\Omega^*\vartheta_0} \right) \right] \bar{U}_- = \frac{i\mu\bar{U}_c^2\bar{U}_+^*}{4}. \quad (39)$$

Как следует из системы уравнений (32), (33) или (38), (39), возмущения связаны через основную моду, играющую роль накачки, а соотношение (29) можно интерпретировать как параметрическую неустойчивость исходной основной моды: распад двух квантов исходной моды на кванты боковых сателлитов. При этом сильная основная мода играет роль накачки. Однако следует отметить, что (29) допускает случай, когда действительные частоты сателлитов равны частоте основной моды. Будем классифицировать такие возмущения как «собственные», а их рост как «собственную» неустойчивость. Неустойчивость, к которой приводит рост возмущений в виде боковых сателлитов, будем называть сателлитной. Как следует из (29), оба возмущения (на частотах  $\omega_+$  и  $\omega_-$ ) либо нарастают, либо убывают:  $\text{Im } \bar{\omega}_+ = \text{Im } \bar{\omega}_- = \text{Im } \Omega$ .

<sup>4</sup> $\Omega$  определена как положительная величина.

#### 4. Характеристическое уравнение

Из уравнений (38), (39) получим характеристическое уравнение для сдвига  $\Omega$  частоты возмущений относительно частоты исходной моды

$$\begin{aligned} & \left\{ 2\alpha + 2\Omega + i\mu \left( 1 - |\bar{U}_c|^2/2 \right) - i\eta \left( 1 - \delta e^{-2i\vartheta_c - 2i\Omega\vartheta_0} \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ 2\alpha - 2\Omega - i\mu \left( 1 - |\bar{U}_c|^2/2 \right) + i\eta \left( 1 - \delta e^{2i\vartheta_c - 2i\Omega\vartheta_0} \right) \right\} = \mu^2 |\bar{U}_c|^4 / 16. \end{aligned} \quad (40)$$

Вводя обозначения

$$w = \mu |\bar{U}_c|^2 / 4, \quad \chi = r \left( 1 - e^{-2i\Omega\vartheta_0} \right) \quad (41)$$

и используя уравнения (20), (21) для частоты и амплитуды исходной моды, представим (40) в виде

$$\Omega^2 - i\Omega w - i\chi \Omega \cos(2\vartheta_c) - w\chi \cos(2\vartheta_c) / 2 - \chi^2 / 4 = 0. \quad (42)$$

Заметим, что один из корней уравнения (42),  $\Omega = 0$ , соответствует сдвигу начальной фазы автогенератора, или начала отсчета времени.

Анализ выражений (20), (21), (42) показывает, что поведение системы (амплитуда, частота продольных мод и их устойчивость) определяется тремя параметрами: параметром  $r = \eta\delta$ , равным отношению удвоенного коэффициента отражения к добротности контура, зашунтированного волновым сопротивлением (см. (9), (17)); фазой запаздывания  $\vartheta_0$  на собственной частоте колебательного контура, эта фаза пропорциональна длине линии (см. обозначения после формулы (6)); положительной величиной  $w$  (см. (21), (41)), пропорциональной квадрату амплитуды колебаний. Если относительное превышение тока над стартовым существенно больше коэффициента отражения (18), то  $w$  равна прочности предельного цикла  $\mu - \eta$ .

#### 5. Исследование устойчивости продольных мод относительно возмущений на собственной частоте

Для возмущений на собственной частоте можно отклонение частоты возмущения от частоты исходной моды представить в виде

$$\Omega = i\lambda, \quad (43)$$

где  $\lambda$  – действительно. Если возмущение неустойчиво,  $\lambda < 0$ . Уравнение (42) преобразуем к виду

$$\chi^2 + 2w\chi \cos 2\vartheta_c - 4\lambda\chi \cos 2\vartheta_c - 4\lambda w + 4\lambda^2 = 0, \quad (44)$$

где  $\chi = r \left( 1 - e^{2\lambda\vartheta_0} \right)$  (см. (41)). Разрешая (44) для  $\chi$ , получим



$$\chi = -(w - 2\lambda) \cos 2\vartheta_c \pm \sqrt{((w - 2\lambda) \cos 2\vartheta_c)^2 + 4\lambda w - 4\lambda^2}. \quad (45)$$

Поиск решений  $\lambda$ , удовлетворяющих уравнению (45), удобно пояснить графически (рис. 3). Эти решения лежат на пересечениях графика функции

$$g_1(2\lambda\vartheta_0) = 1 - e^{2\lambda\vartheta_0} \quad (46)$$

и наклоненного эллипса<sup>5</sup>

$$g_2(2\lambda\vartheta_0) = \frac{(2\lambda\vartheta_0)/\vartheta_0 - w}{r} \cos 2\vartheta_c \pm \frac{\sqrt{-(((2\lambda\vartheta_0)/\vartheta_0 - w) \sin 2\vartheta_c)^2 + w^2}}{r}. \quad (47)$$

При  $r \cos \vartheta_c > 0$  графики функций  $g_1(2\lambda\vartheta_0)$  и  $g_2(2\lambda\vartheta_0)$  не имеют пересечений при  $\lambda < 0$ . При  $r \cos \vartheta_c < 0$  существует единственное пересечение графиков области  $\lambda < 0$ , если

$$|g'_1(2\lambda\vartheta_0)|_{\lambda=0} > |g'_2(2\lambda\vartheta_0)|_{\lambda=0}. \quad (48)$$

Условие (48) выполнено при

$$|r\vartheta_0 \cos 2\vartheta_c| > 1. \quad (49)$$

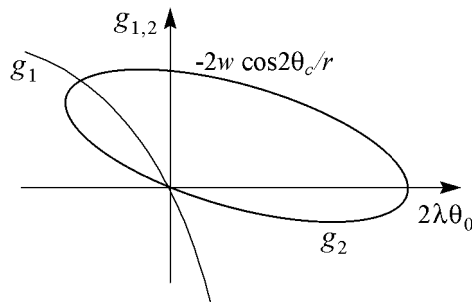


Рис. 3. Графическое решение уравнения (45): графики функций (46) и (47) при  $r \cos \vartheta_c < 0$

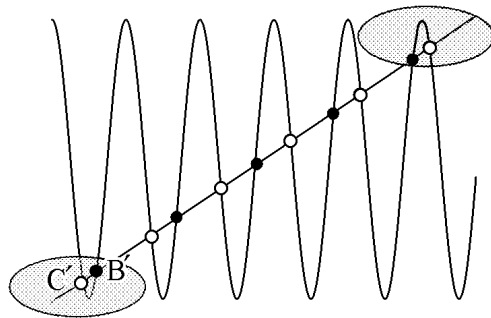


Рис. 4. Фрагмент рис. 2, а. Моды, устойчивые относительно возмущений на собственной частоте, отмечены белыми кружками, неустойчивые — черными. Овалами отмечены крайние в частотном наборе моды, у которых могут возникать сателлиты на действительной частоте при условии достаточно большой надпороговости (18) (см. п. 7)

Таким образом, если в системе существует единственная продольная мода (при  $|r|\vartheta_0 < 1$ ), то она устойчива, так как неравенство (49) не может быть выполнено. Если с ростом  $|r|\vartheta_0$  появляется вырожденная мода (см. рис. 2, б), то эта мода нейтральна ( $\lambda = 0$ ), как следует из (26), (46), (47). При дальнейшем росте  $|r|\vartheta_0$  происходит расщепление вырожденной моды на две (см. п. 2, рис. 2, б). В соответствии с (48), одна из этих мод — В на рис. 2, б, В' на рис. 4 — неустойчива, а вторая — мода С на рис. 2, б, С' на рис. 4 — устойчива. Если число продольных мод больше двух, то устойчивые и неустойчивые относительно «собственных» возмущений моды чередуются по частоте. Моды, для которых  $r \cos \vartheta_c < 0$ , неустойчивы; моды, для которых  $r \cos \vartheta_c > 0$ , устойчивы (см. рис. 2 и рис. 4).

<sup>5</sup>Заметим, что для стационарного состояния  $\sin 2\vartheta_c = 0$  эллипс вырождается в две параллельные друг другу прямые.

Следует отметить аналогию с теорией захвата частоты генератора внешним сигналом [23], в качестве которого в данном случае выступает отраженная волна. Если фаза отраженной волны имеет такую величину, что ее воздействие приводит к увеличению амплитуды колебаний на основной моде (см. (21) при  $r \cos \vartheta_c > 0$ ), то эта мода устойчива. И наоборот, если отражение приводит к уменьшению амплитуды колебаний (см. (21) при  $r \cos \vartheta_c < 0$ ), то такая мода неустойчива.

## **6. Исследование устойчивости продольных мод относительно возмущений в виде боковых сателлитов**

Задачу об устойчивости продольных мод относительно распада на боковые сателлиты удается решить аналитически только при условии достаточно большого превышения тока над стартовым (18). При произвольном соотношении параметров уравнение (42) решалось численно в [22].

Условие (18) равносильно неравенству (см. (21), (41))

$$w \gg |r|. \quad (50)$$

Заметим, что при оптимальной передаче мощности в нагрузку (22) условие (50) выполнено.

Следуя методу D-разбиения [25] найдем, при каких параметрах частотная отстройка сателлитов  $\Omega$  действительна и не равна нулю. Очевидно, что при малом изменении параметров вблизи этих значений устойчивые сателлиты становятся неустойчивыми. Для действительных частот  $\Omega$  величины  $|\chi|$ ,  $|r|$  одного порядка, и условие (50) означает, что  $w \gg |\chi|$ . При этом корни уравнения (42) примерно равны

$$\Omega_1 \approx iw, \quad (51)$$

$$\Omega_2 \approx i(\chi^2 + 2w\chi \cos(2\vartheta_c)) / (4w). \quad (52)$$

Корень (51) мнимый, причем для этого корня условие малости амплитуды отраженной волны, вернувшейся в генератор (37), может оказаться не выполненным. Однако, если коэффициент отражения стремится к нулю и условие (37) выполняется, то корень (51) равен прочности предельного цикла свободного автогенератора [23].

Уравнение (52) имеет бесконечно много решений. При действительных значениях  $\Omega$  (52) сводится к двум уравнениям

$$w \cos(2\vartheta_c) = r \cos(2\Omega\vartheta_0), \quad (53)$$

$$\Omega = -r^2 \sin(2\Omega\vartheta_0) / (2w). \quad (54)$$

Фаза запаздывания  $\vartheta_c$ , входящая в (53), определяется из уравнения  $y_1(2\vartheta_c) = y_2(2\vartheta_c)$  (см. (23), (24)). Уравнения (53), (54) могут иметь решения не при любых параметрах системы. Нахождение решений уравнения (54) удобно проиллюстри-

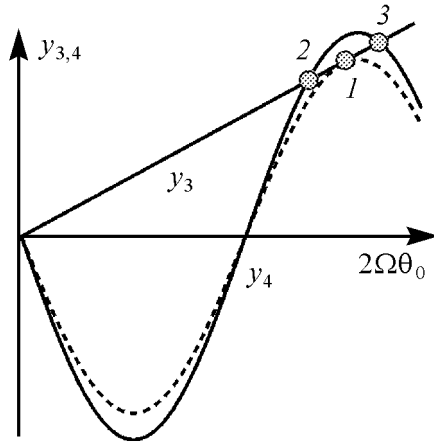


Рис. 5. Графическое решение уравнения (54) для нахождения спутников на действительной частоте. Каждое пересечение прямой  $y_3$  и синусоиды  $y_4$  определяет отстройку частоты  $\Omega$  для пары спутников (см.(29), (34)). Пунктиром показана синусоида  $y_4$ , касающаяся прямой  $y_3$  (при  $r^2\vartheta_0/w$ ). Пара спутников «1» распадается на две пары спутников, частотам которых соответствуют пересечения «2» и «3»

ровать графически. Эти решения лежат на пересечениях прямой

$$y_3(2\Omega\vartheta_0) = 2\Omega\vartheta_0. \quad (55)$$

и синусоиды (рис. 5)

$$y_4(2\Omega\vartheta_0) = -r^2\vartheta_0\sin(2\Omega\vartheta_0)/w. \quad (56)$$

Как следует из (54), такие пересечения существуют, только если выражение  $r^2\vartheta_0/w$  превышает минимальное значение, примерно равное 4.6 (см. рис. 5)

$$r^2\vartheta_0/w \geq 4.6. \quad (57)$$

При выполнении условия (57) число продольных мод велико (см. (50), п. 2)

$$|r|\vartheta_0 \gg 1. \quad (58)$$

Из (50), (53) следует, что

$$|\cos(2\vartheta_c)| \ll 1. \quad (59)$$

Неравенства (58), (59) означают, что частоты тех мод, которые могут иметь спутники на действительной частоте, находятся на краю частотного набора всех мод (см. рис. 4). Если для какой-нибудь продольной моды существуют спутники на действительной частоте, то производные функций (24) и (56) равны (см. (53)):  $y'_4(2\Omega\vartheta_0) = y'_2(2\vartheta_c)$ . В частности, если спутники на действительной частоте вырожденные (см. рис. 5), то выполнено условие касания (26), то есть это спутники вырожденной исходной моды (см. рис. 2, б).

Рассмотрим переход от устойчивости к неустойчивости при изменении параметров относительно их граничных значений для случая, когда исходная мода вырожденная (для нее справедливо соотношение (26)), и при этом выполнено условие появления пары вырожденных спутников на действительной частоте:  $r^2\vartheta_0/w = 4.6$ . Предположим, что коэффициент отражения  $\delta$  меняется, а остальные параметры – длина линии ( $\vartheta_0$ ), активное сопротивление и волновой импеданс линии (параметры  $\mu$ ,  $\eta$ , см. (9)) – остаются неизменными. При уменьшении  $|\delta|$  исходная мода исчезает. Если же  $|\delta|$  растет, то исходная мода распадается на две моды (см. рис. 2, б), каждая из которых имеет свои боковые спутники. Исследуем эти спутники на устойчивость, то есть найдем знак мнимой части  $\text{Im } \Omega$  (как следует из (29),  $\text{Im } \Omega$  одинакова для правого и левого спутников). При изменении  $\delta$  меняется параметр  $r$  (17). При этом возникают следующие добавки к частоте исходной моды, фазе запаздывания и параметру надпороговости основной моды

$$\Delta\alpha = \pm \frac{1}{\vartheta_0} \sqrt{\frac{\Delta r}{2r}}, \quad \Delta\vartheta_c = \pm \sqrt{\frac{\Delta r}{2r}}, \quad \Delta w = \mp \sqrt{2r\Delta r} \sin(2\vartheta_c). \quad (60)$$

Верхний знак соответствует более высокочастотной моде, нижний – низкочастотной. Дифференцируя (52) с учетом (60), найдем мнимую часть частоты сателлитов

$$\text{Im } \Omega = \mp \frac{\sqrt{2r\Delta r} \sin(2\vartheta_c)}{4\vartheta_0 w}. \quad (61)$$

Для мод, расположенным подобно модам В и С на рис. 2, б, значение  $\sin(2\vartheta_c) < 0$ , поэтому мода С устойчива, мода В неустойчива<sup>6</sup>. Если моды расположены подобно модам В' и С' на рис. 4, то мода В' неустойчива, мода С' устойчива. В общем случае неустойчивой относительно распада на сателлиты ( $\text{Im } \Omega < 0$ ) окажется та мода, для которой наклон синусоиды (24) больше наклона прямой (23):  $y'_2(\vartheta_c) > y'_1(\vartheta_c)$  (рис. 2, 4); устойчивой – мода, у которой  $y'_2(\vartheta_c) < y'_1(\vartheta_c)$ .

Покажем, что, если продольная мода единственная (см. (25)), то она устойчива. В соответствии с выводами Приложения 1, при выполнении условия

$$|\cos 2\vartheta_c| \sim 1. \quad (62)$$

мода устойчива. Предположим, что длина системы ( $2\vartheta_0$ ) меняется в пределах  $\pi$  таким образом, что мода остается единственной, а  $|\cos 2\vartheta_c|$  становится много меньше единицы. При этом согласно приведенным выше в данном разделе рассуждениям, нет перехода через границу устойчивости, так как не выполнено условие (58), и положительный знак  $\text{Im } \Omega > 0$  сохраняется при изменении длины системы. Следовательно, мода остается устойчивой, причем она устойчива и относительно «собственных» возмущений (п.5). Устойчивость единственной моды при произвольном соотношении параметров  $r, w$  показана численно во второй части статьи, [22].

Как показано в Приложении 2, если при  $w \gg |r|$  для какой-либо моды найдена граница устойчивости  $w_{\text{bound}}(r, \vartheta_0)$ , то в области  $w < w_{\text{bound}}$  эта мода неустойчива, в области  $w > w_{\text{bound}}$  – устойчива. При произвольном соотношении параметров  $r, w$  это показано в [22].

### Заключение

В данной работе представлены результаты аналитического исследования устойчивости одночастотных продольных мод в генераторе со слабо отражающей удаленной нагрузкой.

Если в системе существует единственная продольная мода, то она устойчива. С увеличением расстояния генератор-нагрузка и коэффициента отражения волны от нагрузки число допустимых одночастотных состояний – продольных мод системы – растет. Такого рода мода в определенной области параметров может оказаться неустойчивой.

Исследование продольных мод относительно возмущений на их собственной частоте показывает, что «собственно-устойчивые» и «собственно-неустойчивые» моды чередуются по частоте.

<sup>6</sup>Здесь для определенности предполагается  $r > 0$ . Изменение знака  $r$  равносильно изменению фазы синусоиды (24) на  $\pi$ .

Наряду с этим, мода может быть неустойчива относительно возмущений в виде двух спутников с частотами, симметрично отстоящими от ее частоты. Рост таких возмущений можно трактовать как параметрическую неустойчивость, или 4-фотонный распад двух квантов сильной исходной моды на два кванта спутников. В случае, когда относительное превышение тока над стартовым велико по сравнению с коэффициентом отражения (в частности, при таких параметрах, когда передача мощности в нагрузку оптимальная), неустойчивыми относительно распада на спутники могут быть только моды, частоты которых лежат на краю частотного набора всех мод. Спутниковая неустойчивость при произвольном превышении тока над стартовым исследована численно во второй части статьи, [22].

Автор благодарен М.И. Петелину, Н.М. Рыскину и А.С. Сергееву за полезные дискуссии и внимание к работе.

## Приложение 1

### Устойчивость мод $|\cos 2\vartheta_c| \sim 1$ относительно распада на спутники при достаточно большом превышении над порогом генерации

При  $w \gg |r|$  и  $|\cos 2\vartheta_c| \sim 1$  в (52) можно пренебречь одним слагаемым:

$$\Omega \approx i\chi \cos 2\vartheta_c / 2. \quad (\text{П1.1})$$

Представим  $\Omega$  в виде суммы действительной и мнимой частей:  $\Omega = \Omega' + i\Omega''$ . Тогда из (П1.1), (41) для действительной и мнимой частей  $\Omega$  получим:

$$x = -R \sin x e^y, \quad (\text{П1.2})$$

$$y = R(1 - \cos x e^y), \quad (\text{П1.3})$$

где  $x = 2\Omega'\vartheta_0$ ,  $y = 2\Omega''\vartheta_0$ ,  $R = r\vartheta_0 \cos 2\vartheta_c$ . Поскольку  $\Omega'$  определена как положительная величина, для доказательства устойчивости необходимо показать, что при  $x > 0$  неустойчивых решений ( $y < 0$ ) не существует.

Если  $r \cos 2\vartheta_c > 0$ , то  $R > 0$ , и, как следует из (П1.3), действительно, таких решений нет. При  $r \cos 2\vartheta_c < 0$  воспользуемся методом D-разбиения. Частота спутника может быть действительна ( $y = 0$ ) в двух случаях:  $\cos x = 1$ ,  $x = 0$  или  $\cos 2\vartheta_c = 0$ ,  $x = 0$ . В обоих этих случаях  $\Omega'' = 0$ , то есть возмущения не являются спутниками. Следовательно, границы неустойчивости нет. Поскольку при  $|R| < 1$  нет решений  $x > 0$ ,  $y < 0$  (см. П1.2), то такие решения не появятся и при любых других значениях  $|R|$ . Таким образом, моды, для которых  $|\cos 2\vartheta_c| \sim 1$ , устойчивы относительно распада на спутники.

**Расположение областей устойчивости и неустойчивости  
вблизи граничной поверхности в пространстве параметров  
при достаточно большом превышении над порогом генерации**

Будем считать, что при  $w \gg |r|$  найдена граница устойчивости какой-либо моды относительно распада на сателлиты  $w_{\text{bound}}(r, \vartheta_0)$ . Изменение величины  $w$  по сравнению с граничным значением приводит к изменению  $\Omega$  и  $\chi$  (52). Как следует из (41), (52), эти приращения равны:

$$\Delta\chi = 2ir\vartheta_0 e^{-2i\Omega\vartheta_0} \Delta\Omega, \quad (\text{П2.1})$$

$$\Delta\Omega = \frac{i\chi\Delta\chi}{2w} + \frac{i \cos(2\vartheta_c) \Delta\chi}{2} - \frac{i\chi^2\Delta w}{4w^2}. \quad (\text{П2.2})$$

Предполагается, что изменение параметра надпороговости  $w$  происходит только в результате изменения величины  $\mu$ . При этом приращения  $\vartheta_0$ ,  $\vartheta_c$  и  $r$  не появляются (см. п.2). Подставляя (П2.1) в (П2.2) и учитывая (53), (54), получим:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Delta\Omega \times \left| 1 + \frac{\chi r \vartheta_0 e^{-2i\Omega\vartheta_0}}{w} + r \vartheta_0 \cos(2\vartheta_c) e^{-2i\Omega\vartheta_0} \right|^2 = \\ = \frac{r^2 \Delta w}{2w^2} (1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) \left( \cos(2\Omega\vartheta_0) + \frac{r^2 \vartheta_0}{w} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

Поскольку для существования границы сателлитной неустойчивости необходимо  $r^2\vartheta_0/w \geq 4.6$ , мода устойчива ( $\text{Im } \Delta\Omega > 0$ ) при  $\Delta w > 0$ , и неустойчива ( $\text{Im } \Delta\Omega < 0$ ) при  $\Delta w < 0$ .

**Библиографический список**

1. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. (Сер. Современная теория колебаний и волн). М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001.
3. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. (Сер. Синергетика: от прошлого к будущему). М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Параметры порядка в моделях лазеров с запаздывающей обратной связью / В кн.: Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука, 2002. С. 185.
5. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
6. *Ginzburg N.S., Petelin M.I., Shapiro M.A.* Automodulation and Stochastic Oscillation Regimes in Resonant Relativistic Electron Masers // 10-th European Conf. On Contr. Fusion and Plasma Physics. Moscow. 1981. Vol. 1. P. M2.

7. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.
8. Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S., Booske J., Sengele S., Ryskin N.M., Titov V.N. Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13, № 1. P. 013104.
9. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика двухрезонаторного клистрона-генератора с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 1. С. 72.
10. Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time serie // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 056216.
11. Losson J., Mackey M.C. Coupled Map Lattices as Models of Deterministic and Stochastic Differential Delay Equations // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 1. P. 115.
12. Глявин М.Ю., Запезалов В.Е., Куфтин А.Н., Лучинин А.Г. Экспериментальное исследование спектрального состава выходного излучения в гиротроне с отражением части выходного сигнала // Радиофизика. 2000. Vol. 43, № 5. С. 440.
13. Ginzburg N.S., Zaitsev N.I., Ilyakov E.V., Kulagin I.S., and Rozental' R.M. Self-modulated generation observed in a delayed feedback relativistic microwave gyrotron // Tech. Phys. Lett. 2002. Vol. 28, № 5. P. 395.
14. Rozental R., Ginzburg N., Glyavin M., Zaitsev N., Zapevalov V., Ilyakov E., Kulagin I. Self-modulation spectrum variation in gyrotrons with output reflector // Proceedings of Joint 29th International Conference on Infrared and Millimeter Waves and 12th International Conference on Terahertz Electronics. Karlsruhe. Germany. 2004. Vol. 2. P. 306.
15. Airila M.I., Dumbrajs O., Kall P. and Piosczyk B. Influence of reflections on the operation of the 2 MW, CW 170 GHz coaxial cavity gyrotron for ITER // Nucl. Fusion. 2003. Vol. 43, № 11. P. 1454.
16. Airila M.I., Kall P. Effect of reflections on nonstationary gyrotron oscillations // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 2004. Vol. 52, № 2. P. 522.
17. Dumbrajs O., Idehara T., Watanabe S., Kimura A., Sasagawa H., Agusu L., Mitsudo S., Piosczyk B. Reflections in gyrotrons with axial output // IEEE Trans. on Plasma Science. 2004. Vol. 32, № 3. P. 899.
18. Grudiev A., Jelonnek J., and Schunemann K. Time-domain analysis of reflections influence on gyrotron operation // Phys. Plasmas. 2001. Vol. 8, № 6. P. 2963.
19. Grudiev A., Schunemann K. Nonstationary behavior of a gyrotron in the presence of reflections // International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 2003. Vol. 24, № 4. P. 429.
20. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997.
21. Antonsen T.M., Cai S.Y., Nusinovich G.S. Effect of window reflection on gyrotron operation // Phys. Fluids B. 1992. Vol. 4, № 12. P. 4131.
22. Новожилова Ю.В., Сергеев А.С., Усачева С.А. Параметрическая неустойчивость в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. II. Численное исследование // Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 2. С. 128.

23. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
24. Фернандез А., Харчев Н.К., Новожилова Ю.В., Батанов Г.М., Бондарь Ю.Ф., Колик Л.В., Сарксян К.А., Толкачёв А. Реакция гиротрона на малое отражение от нестационарной нагрузки // Прикладная физика. 2009, № 6. С. 158.
25. Неймарк Ю.И. D-разбиение пространства квазиполиномов. (К устойчивости линеаризованных распределенных систем) // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 3, № 4. С. 349.

*Институт прикладной физики РАН*

*Поступила в редакцию 28.01.2011*

## PARAMETRIC INSTABILITY OF AUTOOSCILLATOR COUPLED WITH REMOTE LOAD

### I. Theory

*Yu.V. Novozhilova*

At the autooscillator with weakly reflected remote load the number of one-frequency states – longitudinal modes – increases with the growth of the reflection coefficient and the length of the delay line. A mode of this kind can be unstable in some parameter regions. There can be two types of perturbations: a) the perturbations resulting in a slow evolution of principal mode amplitude and frequency; b) the perturbations in the form of two satellites which frequencies are symmetric from that of the principal mode. The modes stability relative to each type of perturbations was studied analytically.

*Keywords:* Autooscillator operation at the load, delayed reflection, one-frequency mode stability.



*Новожилова Юлия Владимировна* – родилась в Горьком (1960), окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1982). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Область научных интересов – теория электронных СВЧ-приборов, влияние отражений на работу автогенератора. Имеет около 50 публикаций.

603950 Нижний Новгород  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: river@appl.sci-nnov.ru