

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ СПЕКТРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛЯПУНОВСКИХ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМАХ*

А.А. Короновский, В.А. Максименко, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

В работе проведен анализ поведения диода Пирса – эталонной пучково-плазменной системы, демонстрирующей хаотическую динамику – с позиций рассмотрения поведения спектра пространственных показателей Ляпунова. Описан метод расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем электронной природы. Рассмотрен как случай автономной динамики системы, так и динамика двух односторонне связанных диодов Пирса при установлении режима обобщенной хаотической синхронизации.

Ключевые слова: Показатели Ляпунова, диод Пирса, обобщенная хаотическая синхронизация, хаотические осцилляторы, динамическая система.

Введение

Диод Пирса является классической моделью физической электроники, которая позволяет при анализе некоторых режимов колебаний в электронном потоке ограничиться гидродинамическим описанием [1–4]. Эта модель интересна тем, что, несмотря на относительную простоту, она демонстрирует многие нелинейные явления, включая динамический хаос, классический сценарий перехода к хаотической динамике, перестройку хаотического аттрактора с изменением управляющего параметра, синхронизацию хаотических колебаний и др. Все это делает диод Пирса удобной базовой моделью пучково-плазменной системы для теоретического и численного анализа сложного поведения в потоках заряженных частиц со сверхкритическим током, для применения методов нелинейной динамики с целью анализа сложного поведения пространственно-распределенных автоколебательных систем, а также изучения методов управления сложными пространственно-временными колебаниями.

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

В настоящей работе рассматривается поведение этой эталонной системы с точки зрения пространственных показателей Ляпунова. Известно, что ляпуновские показатели представляют собой мощный инструмент для анализа сложной динамики систем с сосредоточенными параметрами. Они широко используются для описания сложных систем, являющихся предметом изучения различных областей науки, таких как физика [5], молекулярная динамика [6], астрономия [7], медицина [8], экономика [9] и др.

Одним из наиболее значимых приложений показателей Ляпунова является их использование для обнаружения качественных изменений в динамике системы при варьировании управляющих параметров. Например, ляпуновские экспоненты используются для обнаружения перехода от хаотического режима к гиперхаосу [10], для выявления наличия гиперболического аттрактора [5, 11], для диагностики обобщенной синхронизации [12, 13] или индуцированной шумом синхронизации [14–16].

Динамика диссипативной системы с *непрерывным временем* с малым числом степеней свободы, размерность фазового пространства которой равна N , может быть характеризована спектром ляпуновских показателей $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$:

- если динамическая система характеризуется одним положительным ляпуновским показателем, то в системе наблюдается *хаос*;
- если существует 2 или более положительных показателя Ляпунова, то имеет место *гиперхаос*;
- младшие отрицательные показатели Ляпунова характеризуют направления в фазовом пространстве, по которым осуществляется сближение фазовых траекторий;
- один ляпуновский показатель всегда равен нулю, он отвечает за возмущения вдоль траектории в фазовом пространстве системы.

Для систем с сосредоточенными параметрами с *дискретным временем* нулевой показатель Ляпунова, отвечающий за возмущения вдоль траектории, отсутствует, поэтому для отображений спектр показателей Ляпунова, как правило, состоит только из положительных и отрицательных величин, хотя в случае отдельных режимов (например, для квазипериодических колебаний) и для отображений может существовать нулевой показатель.

Нулевая ляпуновская экспонента играет важную роль в определенных физических приложениях. Так, например, для детерминированного периодического осциллятора этот показатель является наибольшим по величине. Следовательно, в таких системах, управляемых внешним сигналом (детерминированным или случайным), старшая условная ляпуновская экспонента (которая является нулевой в автономном случае) может стать отрицательной, что приведет к синхронизации. Полагают также, что в связанных хаотических осцилляторах переход нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений тесно связан с установлением режима фазовой синхронизации (см. [17, 18]). В то же самое время известно [19, 20], что точка, соответствующая установлению режима фазовой синхронизации, и момент перехода нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений не совпадают друг с другом и могут в значительной степени различаться. Наконец, нулевой показатель Ляпунова может обозначать наличие специфического режима в динамике системы, такого как неполная индуцированная шумом синхронизация [21].

Для систем с малым числом степеней свободы, демонстрирующих режимы сложной динамики, аналитически найти значения показателей Ляпунова удается исключительно редко. Как правило, для их нахождения приходится использовать численные методы, в основе которых лежит рассмотрение эволюции соответствующего числа векторов возмущения вдоль рассматриваемой траектории в фазовом пространстве. При этом, если не предпринимать специальных мер, то в каждом векторе возмущения будет представлена составляющая с максимальным показателем Ляпунова, которая будет доминировать на больших временах, и корректно оценить остальные показатели не удастся. Попытка рассчитать полную матрицу эволюции и найти ее сингулярные числа также, как правило, к успеху не приводит по той же самой причине: из-за доминирования возмущения с максимальным показателем Ляпунова задача оказывается плохо обусловленной [22]. Работоспособный метод нахождения спектра показателей Ляпунова для систем с малым числом степеней свободы основан на применении алгоритма Бенеттина, причем переопределение векторов возмущения должно состоять не только в изменении нормы, но и сопровождаться их ортогонализацией [23]. В свою очередь, ортогонализация основана на простой процедуре Грамма–Шмидта построения ортонормированной системы.

Таким образом, ляпуновские экспоненты являются мощным инструментом анализа поведения систем с малым числом степеней свободы, демонстрирующих сложную динамику. Очевидно, что этот инструмент можно использовать и для анализа динамики более сложных систем – систем с бесконечномерным фазовым пространством. Однако напрямую вычислить ляпуновские экспоненты для таких систем, используя алгоритмы, разработанные и апробированные для систем с малым числом степеней свободы, оказывается проблематично. Среди основных проблем, возникающих перед исследователем, поставившим себе целью рассчитать показатели Ляпунова для распределенных систем, можно выделить следующие:

- в силу пространственной распределенности анализируемой системы фазовое пространство оказывается бесконечномерным;
- количество показателей Ляпунова, характеризующих поведение пространственно-распределенной активной среды, также оказывается бесконечным;
- вместо конечномерного вектора малой размерности поведение пространственно-распределенной системы будет характеризоваться *состоянием*, которое для каждой системы необходимо определять по-своему;
- процедура перенормировки и ортогонализации векторов возмущений, имеющая место для систем с конечномерным фазовым пространством, должна быть модифицирована для перенормировки и ортогонализации состояний.

В то же самое время распределенные системы являются весьма распространенным классом моделей реальных физических систем, в частности, систем электронной природы, в том числе, приборов и устройств электроники сверхвысоких частот и радиофизики, таких как лампа обратной волны, виркаторы, клистронные автогенераторы, гиро-приборы [24–27]. Иными словами, при изучении пространственно-распределенных систем возникает проблема расчета характеристик, аналогичных спектру ляпуновских показателей для динамических систем с малым числом степеней свободы. Например, такие задачи возникают при исследовании обобщенной хаотической синхронизации, синхронизации, индуцированной шумом, и др.

Пространственно-распределенные системы представляют большой интерес также и с фундаментальной точки зрения. Для пространственно-распределенных систем, характеризующихся бесконечным числом пространственных ляпуновских экспонент, возникает необходимость определения нескольких (старших) пространственных ляпуновских экспонент.

Одной из первых работ в этом направлении была работа [28], в которой рассматривались показатели Ляпунова для уравнения Гинзбурга–Ландау. Однако, как уже отмечалось выше, напрямую вычислить ляпуновские показатели для систем с бесконечномерным фазовым пространством, используя алгоритмы, разработанные и апробированные для систем с малым числом степеней свободы, оказывается проблематично. Попытки адаптировать и обобщить понятие ляпуновского показателя для анализа динамики распределенных систем, как правило, сводятся в конечном итоге к расчету ляпуновского показателя теми же самыми способами, что и для систем с сосредоточенными параметрами. Один из возможных способов – это вычисление старшего ляпуновского показателя по временной реализации, полученной по сигналу, регистрируемому в одной из точек пространства распределенной системы (см., например, [29]), точно так же, как это делается для систем с сосредоточенными параметрами [30]. В качестве альтернативы можно также рассчитывать спектр ляпуновских показателей, пользуясь алгоритмом Бенеттина [23], работая с дискретной моделью распределенной системы. В этом случае дискретизованная распределенная система рассматривается как конечномерная динамическая система с очень большой размерностью. Соответственно, она будет характеризоваться спектром ляпуновских показателей, содержащим очень большое (но все же конечное) число таких показателей [31]. При этом возникает целый ряд особенностей, связанных с большой размерностью фазового пространства такой дискретизованной системы.

В настоящей работе рассматривается вопрос о расчете спектра пространственных показателей Ляпунова для эталонной пространственно-распределенной системы СВЧ-электроники – диода Пирса и использования его для диагностики различных динамических режимов. В основу метода положено непрерывное в пространстве описание состояния системы (по аналогии с работой [10]). В разделе 1 описывается используемый метод; в разделе 2 рассматриваются основные уравнения, описывающие поведение изучаемой системы; раздел 3 посвящен диагностике динамических режимов в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током с помощью пространственных показателей Ляпунова. Рассматривается как автономная динамика одной системы, так и установление режима хаотической синхронизации в двух связанных диодах Пирса.

1. Метод расчета

Рассмотрим метод расчета спектра пространственных показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем. Пусть

$$\hat{L}(\mathbf{U}(x, t)) = 0 \quad (1)$$

оператор, описывающий поведение пространственно-распределенной системы с течением времени; $\mathbf{U}(x, t)$ – состояние системы, величина, зависящая от пространственной координаты x и времени t . В целом ряде случаев выбор набора величин,

характеризующих поведение системы в качестве состояния, используемого для расчета показателей Ляпунова, является нетривиальной задачей. Более того, неправильное определение состояния системы приводит к ошибочным результатам.

Как уже отмечалось выше, для пространственно-распределенных систем число пространственных показателей Ляпунова оказывается бесконечным. При вычислении спектра ляпуновских показателей, очевидно, приходится ограничиваться расчетом первых N старших показателей. В этом случае $\mathbf{U}(x, t)$ будет выступать в качестве опорного состояния, относительно которого будет рассматриваться поведение N малых возмущений, которые тоже являются *состояниями*.

При расчете спектра пространственных ляпуновских экспонент функция $\mathbf{U}(x, t)$ будет выступать в качестве опорного состояния, относительно которого будет рассматриваться поведение малых возмущений. Для вычисления первых N старших пространственных ляпуновских экспонент необходимо ввести в рассмотрение набор возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (2)$$

где (\mathbf{U}, \mathbf{V}) – скалярное произведение состояний.

Важно отметить, что, если в роли состояния выступает действительная или комплексная функция (как в [32] или [10]), не возникает проблем с определением скалярного произведения. В то же самое время, если состояние системы определяется каким-либо иным образом (что может оказаться необходимым в целом ряде физических задач), то и определение скалярного произведения в этом случае также должно быть определено по-иному. При этом, как и в случае выбора состояния, неправильное определение скалярного произведения состояний системы также будет приводить к ошибочным результатам.

Дополнительно к условию ортогональности (2) все возмущения $\mathbf{V}_i(x, t)$ должны также удовлетворять условию нормировки

$$\|\mathbf{V}_i(x, 0)\| = 1. \quad (3)$$

Набор возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), может быть получен с помощью процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта

$$\begin{cases} \mathbf{V}_i = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)}{\|\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)\|} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)}{\sqrt{(\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0), \tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0))}}, \\ \tilde{\mathbf{V}}_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \tilde{\mathbf{V}}_{i+1}(x, 0) = \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (\mathbf{V}_k, \varphi_{i+1}) \mathbf{V}_k(x, 0), \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1), \end{cases} \quad (4)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)$ – набор линейно независимых произвольных состояний, определенных на длине L рассматриваемой системы.

Для вычисления спектра пространственных ляпуновских экспонент пространственно-распределенной системы необходимо рассматривать эволюцию во времени

как состояния $\mathbf{U}(x, t)$ исследуемой системы, так и всех возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$. Эволюция состояния $\tilde{\mathbf{U}}(x, t)$ определяется соотношением (1), в то время как эволюция возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$ будет определяться оператором эволюции

$$\partial \hat{L}(\mathbf{U}(x, t), \mathbf{V}_i(x, t)) = 0, \quad (5)$$

который получается линеаризацией оператора (1) в окрестности состояния $\mathbf{U}(x, t)$.

По истечении интервала времени длительностью T полученный набор возмущений $\mathbf{V}_i(x, T)$ снова подвергается процедуре ортогонализации и нормализации по Грамму–Шмидту, при этом в качестве набора функций $\varphi_i(x)$ выступает рассматриваемое множество возмущений $\mathbf{V}_i(x, T)$, иными словами,

$$\varphi_i(x) = \mathbf{V}_i(x, T). \quad (6)$$

Описанная последовательность действий повторяется M раз, где M – достаточно большое число, при этом по ходу вычислений подсчитываются суммы

$$S_i = \sum_{j=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{V}}_i(x, jT)\|, \quad (7)$$

в которых используются возмущения до перенормировки, но после ортогонализации. Оценка значений пространственных ляпуновских экспонент для пространственно-распределенных систем определяется как

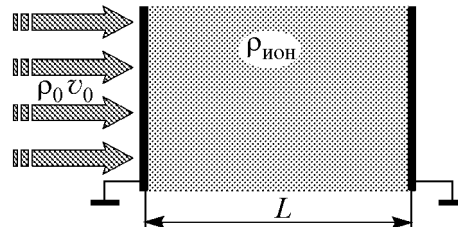
$$\Lambda_i = \frac{S_i}{MT}. \quad (8)$$

Следует также отметить, что в некоторых случаях нет необходимости в рассмотрении всего спектра пространственных показателей Ляпунова, а интерес представляет только старший из них. В этом случае достаточно рассматривать эволюцию опорного состояния $\mathbf{U}(x, T)$ и только одного возмущенного состояния $\mathbf{V}(x, T)$. При этом необходимо осуществлять процедуру перенормировки и подсчитывать первую ляпуновскую сумму S_1 .

2. Диод Пирса

Диод Пирса представляет из себя две бесконечных плоских параллельных сетки, пронизываемые моноэнергетическим на входе электронным потоком (рис. 1). Сетки, ограничивающие систему, заземлены и находятся на расстоянии L друг от друга. Плотность заряда ρ_0 и скорость v_0 на входе в систему поддерживаются постоянными. Пространство между сетками равномерно заполнено нейтрализующим фоном неподвижных ионов с плотностью заряда $|\rho_i/\rho_0| = 1$. Динамика подобной системы определяется единственным управляющим параметром

$$\alpha = \frac{\omega_p L}{v_0}, \quad (9)$$



(9) Рис. 1. Схематическое изображение диода Пирса

называемым параметром Пирса (ω_p – плазменная частота электронного пучка). При $\alpha > \pi$ в системе развивается неустойчивость, приводящая к образованию виртуального катода, от которого часть электронного потока отражается обратно к плоскости инжекции. Вместе с тем, при величине $\alpha \sim 3\pi$ возможно прохождение электронного потока через диодный промежуток без образования виртуального катода. В последнем случае рост неустойчивости Пирса ограничивается нелинейностью в системе, и в диоде наблюдается режим полного прохождения потока, и существует возможность описания пролетного промежутка со сверхкритическим током в рамках гидродинамического подхода. В тех случаях, когда в электронном потоке присутствуют отражения частиц, применение подобного описания неправомерно. Однако существует ряд задач, для которых гидродинамический подход является адекватным и оптимальным.

Динамика электронного потока в диоде Пирса в рамках гидродинамического приближения описывается самосогласованной системой уравнений движения, непрерывности и Пуассона относительно безразмерных переменных [33]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\alpha^2(\rho - 1), \quad (12)$$

с граничными условиями:

$$v(0, t) = 1, \quad \rho(0, t) = 1, \quad \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0. \quad (13)$$

В уравнениях (10)–(12) гидродинамической теории диода Пирса использованы безразмерные переменные потенциала поля пространственного заряда φ , плотности заряда ρ , скорость электронного потока v , пространственной координаты x и времени t , которые связаны с соответствующими размерными переменными соотношениями $\varphi' = (v_0^2/\eta)\varphi$, $\rho' = \rho_0\rho$, $v' = v_0v$, $x' = Lx$, $t' = (L/v_0)t$, где штрихом обозначены размерные величины, η – удельный заряд электрона.

Система уравнений (10)–(12) с граничными и начальными условиями (13) описывает динамику свободного диода Пирса и может быть решена с помощью численных методов в конечно-разностном представлении [34]. Уравнения непрерывности (11) и движения (12) решались с помощью схемы с разностями против потока, а уравнение Пуассона (10) – методом распространения вектора ошибки [35]. Основные параметры численной схемы, такие как шаг пространственной сетки Δx и шаг по времени Δt , были выбраны как $\Delta x = 0.005$ и $\Delta t = 0.003$.

В качестве состояния диода Пирса будем использовать вектор

$$\mathbf{U} = (\rho(x, t), v(x, t))^T, \quad (14)$$

скалярное произведение состояний будет определяться как

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \int_0^1 (\rho_1(x, t)\rho_2(x, t) + v_1(x, t)v_2(x, t)) dx, \quad (15)$$

где интегрирование осуществляется по длине рассматриваемой системы. Важно отметить, что потенциал $\varphi(x, t)$, входящий в уравнения, описывающие эволюцию рассматриваемой системы, не включен в состояние \mathbf{U} , поскольку он однозначно определяется через плотность заряда $\rho(x, t)$ в силу уравнения Пуассона (12) и граничных условий (13). Иными словами, уравнения (10)–(12) являются избыточными, поскольку динамический оператор эволюции, в принципе, можно переписать, исключив из рассмотрения потенциал $\varphi(x, t)$. Фактически, достаточно знать распределения плотности заряда $\rho(x, t)$ и скорости $v(x, t)$, чтобы однозначно характеризовать состояние системы и, опираясь на оператор эволюции $\hat{L}(\mathbf{U})$, в качестве которого выступает система уравнений (10)–(12) с граничными и начальными условиями (13), вычислять аналогичные состояния в следующие моменты времени.

Аналогично, в качестве возмущений \mathbf{V}_i будут выступать вектора

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^\rho(x, t), \xi_i^v(x, t))^T, \quad (16)$$

характеризующие малые отклонения от опорного состояния \mathbf{U} . Возмущение $\xi_i^\varphi(x, t)$ потенциала $\varphi(x, t)$ снова будет однозначно определяться распределением плотности заряда $\rho(x, t)$ и его малым возмущением $\xi_i^\rho(x, t)$.

Поведение диода Пирса с i -м возмущением состояния \mathbf{U} описывается следующей системой уравнений:

$$\hat{L}(\mathbf{U} + \mathbf{V}_i) = 0 \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \rho(0, t) + \xi_i^\rho(0, t) &= 1, \\ v(0, t) + \xi_i^v(0, t) &= 1, \\ \varphi(0, t) + \xi_i^\varphi(0, t) &= 0, \\ \varphi(1, t) + \xi_i^\varphi(1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Выполняя процедуру линеаризации вблизи синхронного состояния, раскладывая функции в правых частях уравнения (17) в ряды Тейлора по малым добавкам \mathbf{V} , пренебрегая членами второго и высших порядков малости, можно переписать уравнения (17), (18) в виде

$$\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i) = 0, \quad (19)$$

где $\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$ – линеаризованный вблизи опорного состояния $\mathbf{U}(x, t)$ оператор эволюции $\hat{L}(\cdot)$, описывающий, каким образом изменяются возмущения \mathbf{V}_i с течением времени. Для исследуемой системы оператор $\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_i^\varphi}{\partial x^2} &= -\alpha^2 \xi_i^\rho, \\ \frac{\partial \xi_i^\rho}{\partial t} &= -\xi_i^\rho \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial \xi_i^\rho}{\partial x} - \xi_i^v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial \xi_i^v}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi_i^v}{\partial t} &= -v \frac{\partial \xi_i^v}{\partial x} - \xi_i^v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i^\varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Соответственно, граничные условия (18) для малых отклонений V_i от синхронного состояния примут вид

$$\begin{aligned}\xi_i^p(0, t) &= 0, \\ \xi_i^v(0, t) &= 0, \\ \xi_i^q(0, t) &= 0, \\ \xi_i^q(1, t) &= 0.\end{aligned}\tag{21}$$

Полученный оператор $\partial\hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ является линейным относительно малых отклонений \mathbf{V} .

Теперь, с учетом введенных в рассмотрение состояния \mathbf{U} , возмущений V_i , оператора эволюции $\hat{L}(\mathbf{U})$, в качестве которого выступает система уравнений (10)–(12) с граничными и начальными условиями (13), и линеаризованного оператора $\partial\hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, определяемого соотношениями (20)–(31), может быть найден спектр пространственных показателей Ляпунова для диода Пирса, находящегося в автономном режиме.

3. Диагностика динамических режимов в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током

Как уже отмечалось выше, показатели Ляпунова широко используются для диагностики различных динамических режимов. В частности, одним из наиболее значимых приложений показателей Ляпунова является их использование для обнаружения качественных изменений в динамике системы при варьировании управляющих параметров. Еще одной важной областью применения является использование спектра показателей Ляпунова при установлении синхронных режимов связанных систем, демонстрирующих хаотические режимы. Поэтому в настоящем разделе будут рассмотрены как автономная динамика пучково-плазменных систем со сверхкритическим током, так и поведение связанных систем.

3.1. Автономная система. Поведение рассматриваемой пространственно-распределенной системы со сверхкритическим током определяется, как было показано выше, всего одним безразмерным параметром – параметром Пирса α . В рамках гидродинамического приближения в автономной модели диода Пирса в узкой области значений управляющего параметра α , соответствующей динамике электронного потока без отражений, система демонстрирует хаотические колебания [34]. Возникновению хаотической динамики предшествует последовательность бифуркаций удвоения периода. При уменьшении параметра α от 2.88л до 2.862л рассматриваемая модель демонстрирует переход от регулярной динамики к хаотической через каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся установлением слабохаотических колебаний с четко выраженным временным масштабом. С дальнейшим уменьшением величины управляющего параметра α происходит перестройка хаотических колебаний в системе: колебания существенно усложняются, исчезает четко выраженный временной масштаб колебаний, усложняется спектральный состав колебаний электронного потока. Это иллюстрирует рис. 2, на котором показаны зависимости

четырёх старших показателя Ляпунова от параметра Пирса α и, для сравнения, бифуркационная диаграмма колебаний плотности пространственного заряда в точке $x = 0.2$ пространства взаимодействия.

Из приведенного рисунка отчетливо видно, что спектр старших пространственных показателей Ляпунова позволяет четко диагностировать динамический режим, наблюдающийся в системе. В спектре пространственных показателей Ляпунова для всех значений управляющего параметра α присутствует один нулевой показатель, который соответствует возмущениям системы вдоль оси времени. В области периодических колебаний $\alpha \lesssim 2.862\pi$ этот нулевой пространственный показатель Ляпунова является максимальным, что свидетельствует об отсутствии в системе хаотической динамики. Все остальные старшие показатели Ляпунова оказываются отрицательными. В то же самое время видно, что в точках бифуркаций удвоения периода (например, $\alpha \simeq 2.87\pi$) второй показатель Ляпунова Λ_2 также становится равным нулю, что свидетельствует о качественных изменениях, происходящих в поведении системы при изменении управляющих параметров.

При дальнейшем уменьшении параметра α (см. рис. 2) старший пространственный показатель Ляпунова Λ_1 становится положительным, что является свидетельством перехода к хаотическим колебаниям. Второй по величине показатель Ляпунова по-прежнему остается равным нулю ($\Lambda_2 = 0$), а все остальные показатели являются отрицательными. Важно, что в окнах периодичности, где реализуются периодические колебания, положительный показатель Ляпунова снова становится отрицательным, максимальное значение в этом случае имеет нулевой ляпуновский показатель.

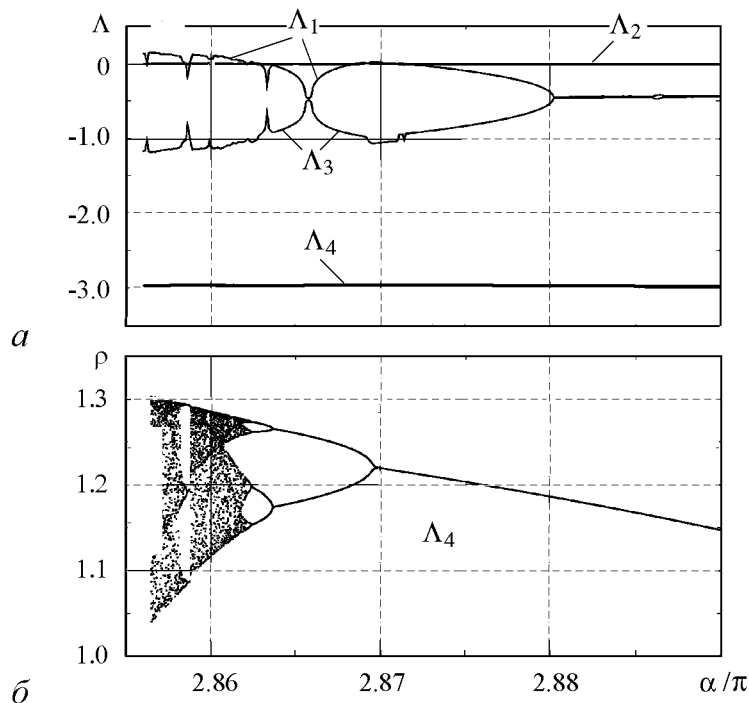


Рис. 2. *a* – Зависимость четырех старших показателя Ляпунова ; *б* – бифуркационная диаграмма колебаний в автономном диоде Пирса при изменении параметра α

Важно отметить, что в случае хаотических колебаний система характеризуется всего лишь одним положительным показателем Ляпунова, хотя для распределенной автоколебательной системы теоретически можно ожидать, что положительных ляпуновских показателей может быть несколько. Наличие только одного положительного показателя Ляпунова свидетельствует о том, что, несмотря на пространственную распределенность системы, хаотические колебания, реализующиеся в ней, достаточно просты. По всей видимости, именно благодаря этому оказалось возможным построить конечномерную модель динамики электронного потока в диоде Пирса с помощью метода Галеркина [35], представляющую собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений [34].

Таким образом, из проведенного рассмотрения видно, что пространственные показатели Ляпунова могут быть с успехом использованы для диагностики динамических режимов в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током. Однако область возможного применения спектра пространственных показателей Ляпунова не ограничивается только одной системой. Показатели Ляпунова играют важную роль при изучении явления синхронизации, с их помощью можно диагностировать возникновение того или иного типа синхронного поведения связанных систем, демонстрирующих хаотическую динамику. Поэтому в следующем разделе будет рассмотрен спектр показателей Ляпунова для двух связанных пучково-плазменных систем со сверхкритическим током.

3.2. Два однонаправлено связанных диода Пирса. Как было показано выше, два однонаправлено связанных диода Пирса могут демонстрировать различные режимы хаотической синхронизации, одним из которых является режим обобщенной хаотической синхронизации. Очевидно, что установление синхронного режима в этом случае должно найти свое отражение в поведении спектра пространственных показателей Ляпунова, характеризующих поведение связанных диодов Пирса.

Безразмерные уравнения, описывающие поведение однонаправлено связанных систем, имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varphi^{1,2}}{\partial x^2} = -(\alpha^{1,2})^2 (\rho^{1,2} - 1), \quad (22)$$

$$\frac{\partial \rho^{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho^{1,2} v^{1,2})}{\partial x}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial v^{1,2}}{\partial t} = -v^{1,2} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^{1,2}}{\partial x}, \quad (24)$$

с граничными условиями

$$v^{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho^{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi^{1,2}(0, t) = 0, \quad (25)$$

где верхние индексы «1» и «2» относятся к первой и второй пучково-плазменным системам, соответственно.

Связь между рассматриваемыми диодами Пирса вводится модификацией граничных условий на правой границе второй (ведомой) системы. Иными словами, граничные условия для системы гидродинамических уравнений (22)–(24), описывающих динамику связанных диодов Пирса, в случае однонаправленной связи запишут-

ся следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi^1(1, t) = 0, \\ \varphi^2(1, t) = \varepsilon(\rho^2(x=1, t) - \rho^1(x=1, t)), \end{cases} \quad (26)$$

где первая «1» (ведущая) система находится в режиме автономных колебаний, воздействуя на вторую «2» (ведомую) систему.

В качестве состояния системы из двух взаимодействующих диодов Пирса будем использовать вектор

$$\mathbf{U} = (\rho^1(x, t), v^1(x, t), \rho^2(x, t), v^2(x, t))^T, \quad (27)$$

а скалярное произведение состояний, в свою очередь, будет определяться как

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \int_0^1 (\rho_1^1(x, t)\rho_2^1(x, t) + v_1^1(x, t)v_2^1(x, t) + \rho_1^2(x, t)\rho_2^2(x, t) + v_1^2(x, t)v_2^2(x, t)) dx. \quad (28)$$

Интегрирование в соотношении (28) осуществляется по всей длине рассматриваемой системы, по аналогии с (15). Соотношения (22)–(24) с граничными условиями (25)–(26) для двух однонаправлено связанных диодов Пирса будут выступать в качестве оператора эволюции (1).

По аналогии с (16), в качестве возмущений \mathbf{V}_i для двух связанных диодов Пирса будут выступать векторы

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^{1\rho}(x, t), \xi_i^{1v}(x, t), \xi_i^{2\rho}(x, t), \xi_i^{2v}(x, t))^T, \quad (29)$$

характеризующие малые отклонения от опорного состояния \mathbf{U} , причем малые возмущения $\xi_i^{1\varphi}(x, t)$ и $\xi_i^{2\varphi}(x, t)$ потенциалов $\varphi^{1,2}(x, t)$, также как и для одного автономного диода Пирса, будут однозначно определяться распределениями плотности заряда $\rho^{1,2}(x, t)$ и их малыми возмущениями $\xi_i^{1,2\rho}(x, t)$.

Для исследуемой системы двух однонаправлено связанных диодов Пирса (22)–(26) оператор $\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$, определяющий эволюцию малых возмущений \mathbf{V}_i опорного состояния \mathbf{U} , записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_i^{1,2\varphi}}{\partial x^2} &= -(\alpha^{1,2})^2 \xi_i^{1,2\rho}, \\ \frac{\partial \xi_i^{1,2\rho}}{\partial t} &= -\xi_i^{1,2\rho} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} - v^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2\rho}}{\partial x} - \xi_i^{1,2v} \frac{\partial \rho^{1,2}}{\partial x} - \rho^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial t} &= -v^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial x} - \xi_i^{1,2v} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i^{1,2\varphi}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (30)$$

с граничными условиями для малых отклонений \mathbf{V}_i от синхронного состояния

$$\begin{aligned}\xi_i^{1,2p}(0, t) &= 0, \\ \xi_i^{1,2v}(0, t)_i &= 0, \\ \xi_i^{1,2\varphi}(0, t) &= 0, \\ \xi_i^{1\varphi}(1, t) &= 0, \\ \xi_i^{2\varphi}(1, t) &= \varepsilon(\xi_i^{2p}(1, t) - \xi_i^{1p}(1, t)).\end{aligned}\tag{31}$$

Таким образом, для двух однонаправлено связанных диодов Пирса расчет спектра пространственных показателей Ляпунова осуществляется точно также, как и в случае автономного диода Пирса, с тем лишь отличием, что состояние системы \mathbf{U} , малые возмущения \mathbf{V}_i , операция скалярного произведения $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ и операторы эволюции $\hat{L}(\mathbf{U})$ и $\partial\hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$ теперь определены с учетом взаимодействия двух систем.

Зависимость пяти старших пространственных показателей Ляпунова для двух однонаправлено связанных диодов Пирса (22)–(24) с граничными условиями (25)–(26) от величины параметра связи ε показана на рис. 3. Выбор значений управляющих параметров $\alpha^1 = 2.858\pi$, $\alpha^2 = 2.860\pi$ обеспечивает хаотическую динамику каждого из диодов Пирса в автономном режиме. Отчетливо видно, что при отсутствии связи между диодами $\varepsilon = 0$ два старших показателя Ляпунова положительны (что характеризует хаотическую динамику в каждом из диодов Пирса по отдельности), два являются нулевыми (эти показатели соответствуют возмущениям состояния систем вдоль оси времени), пятый показатель Ляпунова (и все последующие) оказываются отрицательными.

С увеличением параметра связи значения показателей Ляпунова начинают меняться. Из-за однонаправленного характера связи между рассматриваемыми диодами Пирса, в силу независимости поведения ведущей системы от состояния ведомого осциллятора, спектр ляпуновских показателей $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots$ может быть разделен на две части: ляпуновские показатели ведущей системы $\Lambda_1^1 \geq \Lambda_2^1 \geq \dots$ и условные ляпуновские показатели $\Lambda_1^2 \geq \Lambda_2^2 \geq \dots$. Поскольку динамика ведущего диода Пирса совершенно не зависит от величины параметра связи ε и состояния второго диода Пирса, соответствующие этому диоду Пирса показатели Ляпунова не должны

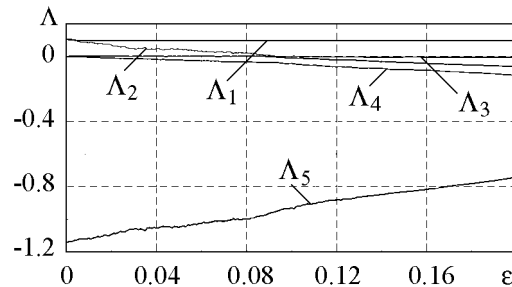


Рис. 3. Зависимость пяти старших показателя Ляпунова от параметра связи ε для двух однонаправлено связанных диодов Пирса

изменяться с увеличением интенсивности связи между рассматриваемыми системами. Что же касается ведомого диода Пирса, то его динамика изменяется с увеличением параметра связи (в частности, она может оказаться синхронизированной сигналом с ведущего диода Пирса), и, соответственно, изменяются значения условных показателей Ляпунова, что отчетливо видно на рис. 3. По мере увеличения параметра связи сначала становится отрицательным второй

условный показатель Ляпунова Λ_2^2 , который при $\varepsilon = 0$ отвечал за возмущения состояния второго диода Пирса вдоль оси времени и был равен нулю, а затем и старший условный показатель Ляпунова Λ_1^2 при $\varepsilon \approx 0.09$ переходит из области положительных значений в область отрицательных, что соответствует установлению режима обобщенной хаотической синхронизации в рассматриваемых диодах Пирса [36].

Заключение

В работе рассмотрен вопрос о спектре пространственных показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем электронной природы на примере диода Пирса, являющегося эталонной пучково-плазменной системой, демонстрирующей хаотическую динамику. Проведена диагностика динамических режимов в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током с помощью пространственных показателей Ляпунова, рассмотрена как автономная динамика одной системы, так и установление режима хаотической синхронизации в двух связанных диодах Пирса.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-3407.2010.2). А.К. благодарит также Фонд некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. т. 2. М.: Физматлит, 2004.
2. Klinger T., Schroder C., Block D., Greiner F., Piel A., Bonhomme G., and Naulin V. Chaos control and taming of turbulence in plasma devices // Phys. Plasmas. 2001. Vol. 8, № 5. P. 1961.
3. Godfrey B.B. Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. P. 1553.
4. Kuhn S. and Ender A. Oscillatory nonlinear flow and coherent structures in Pierce-type diodes // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 68. P. 732.
5. Thamilaran K., Senthilkumar D.V., Venkatesan A., and Lakshmanan M. Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. 036205.
6. Karakasidis T.E., Fragkou A., and Liakopoulos A. System dynamics revealed by recurrence quantification analysis: Application to molecular dynamics simulations // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, № 2. 021120.
7. Macek W.M. and Redaelli S. Estimation of the entropy of the solar wind flow // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. 6496.
8. Porcher R. and Thomas G. Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 1. 010902(R).

9. *Dünki R.M.* Largest Lyapunov-exponent estimation and selective prediction by means of simplex forecast algorithms // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. 6505.
10. *Kuznetsov S.P. and Trubetskov D.I.* Chaos and hyperchaos in a backward-wave oscillator // *Radiophysics and Quantum Electronics.* 2004. Vol. 47, № 5,6. P. 341.
11. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
12. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 5. R4508.
13. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, № 6. 067201.
14. *Goldobin D.S. and Pikovsky A.S.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, №4. 045201(R).
15. *Goldobin D.S. and Pikovsky A.S.* Synchronization of self-sustained oscillators by common white noise // *Physica A.* 2005. Vol. 351. P. 126.
16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 354, № 5-6. P. 423.
17. *Osipov G.V., Hu B., Zhou C.S., Ivanchenko M.V., and Kurths J.* Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91, № 2. 024101.
18. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., and Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 22. 4193.
19. *Politi A., Ginelli F., Yanchuk S., and Maistrenko Yu.* From synchronization to Lyapunov exponents and back // *Physica D.* 2006. Vol. 224. P. 90.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 3. 036205.
21. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Popov P.V.* Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77, № 2. 036215.
22. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. «Современная теория колебаний и волн». М.: Физматлит, 2001.
23. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., and Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I. Theory. P. II. Numerical application // *Meccanica* Vol. 15.1980. P. 9.
24. *Филатов Р.А., Калинин Ю.А., and Храмов А.Е.* Исследование влияния положительных ионов на свч-генерацию в низковольтном виркаторе // *Письма в ЖТФ.* 2006. Vol. 32, № 11. P. 61.
25. *Стародубов А.В., Короновский А.А., Храмов А.Е., Жарков Ю.Д., and Дмитриев Б.С.* Исследование обобщенной синхронизации в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса // *Письма в ЖТФ.* 2007. Vol. 33, № 14. P. 58.
26. *Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Starodubov A.V., Trubetskov D.I., and Zharkov Y.D.* First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators // *Physical Review Letters.* 2009. Vol. 102, № 7. 074101.

27. *Nusinovich G.S., Vlasov A.N., and Antonsen T.M.* Nonstationary phenomena in tapered gyro-backward-wave oscillators // *Phys.Rev.Lett.* 2001. Vol. 87, № 21. 218301.
28. *Keefe L.R.* Dynamics of perturbed wavetrain solutions to the ginzburg-landau equation // *Stud. Appl. Math.* 1985. Vol. 73. P. 91.
29. *Короновский А.А., Ремпен И.С., and Храмов А.Е.* Исследование неустойчивых периодических пространственно-временных состояний в распределённой автоколебательной системе со сверхкритическим током // *Изв. РАН, сер. физич.* 2003. Vol. 67, № 12. 1705.
30. *Wolf A., Swift J., Swinney H.L., and Vastano J.* Determining lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* 1985. Vol. 16. 285.
31. *Кунцов П.В.* Вычисление показателей ляпунова для распределённых систем: преимущества и недостатки численных методов // *Известия вузов. ПНД.* 2011. Vol. 18, № 5. С. 93.
32. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Фролов Н.С. and Храмов А.Е.* К вопросу о спектре пространственных ляпуновских показателей нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау // *Письма в ЖТФ.* 2010. Vol. 36, № 14. С. 19.
33. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., and Храмов А.Е.* Методы нелинейной динамики и хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. т. 2. нестационарные и хаотические процессы. М.: Физматлит, 2009.
34. *Трубецков Д.И. and Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
35. Роуч. П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
36. *Filatov R.A., Hramov A.E., and Koronovskii A.A.* Chaotic synchronization in coupled spatially extended beam-plasma systems // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 358. P. 301.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*4.10.2010
9.03.2011*

**ON THE PROBLEM OF COMPUTATION
OF THE SPECTRUM OF SPATIAL LYAPUNOV EXPONENTS
FOR THE SPATIALLY EXTENDED BEAM PLASMA SYSTEMS**

A.A. Koronovskii, V.A. Maximenko, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov

The behavior of the Pierce diode has been considered from the point of view of the spatial Lyapunov exponents. The method of calculation of the spectrum of the spatial Lyapunov exponents for the electron spatial extended systems has been proposed. The autonomous dynamics of the Pierce diode as well as the behavior of two unidirectionally coupled Pierce diodes when the generalized synchronization is taken place have been considered.

Keywords: Lyapunov exponents, Pierce diode, generalized synchronization, chaotic oscillators, dynamical system.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



Максименко Владимир Александрович – родился в Аткарске Саратовской области (1989). Студент факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Работает лаборантом в лаборатории №5 ОФНС НИИ ЕН СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: maximenkovl@gmail.com



Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 20 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru