



ГИПЕРМУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В МОДЕЛЯХ ЛАЗЕРОВ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е.В. Григорьева, И.С. Кащенко, С.А. Кащенко

В работе исследуется модель одномодового полупроводникового лазера с оптоэлектронной обратной связью, основанная на балансных уравнениях с запаздывающим аргументом. Методами локального анализа построены континуальные наборы семейств квазинормальных форм в окрестности бифуркационных значений параметров. Показана возможность сосуществования большого числа установившихся осциллирующих режимов.

Ключевые слова: Метод нормальных форм, большое запаздывание, малый параметр, локальный анализ.

1. Постановка задачи. Феномен мультистабильности, состоящий в сосуществовании двух или более устойчивых состояний системы при одних и тех же параметрах, находит широкое применение в технике и информационных системах. В последнее время вновь активно обсуждается мультистабильность, индуцированная запаздыванием (см. работы [1–3] и ссылки в них). Особенность эффекта состоит в том, что устойчивыми являются не стационарные, а осциллирующие с разными частотами режимы. Кроме того, при увеличении времени запаздывания число таких сосуществующих аттракторов может увеличиваться, тем самым целенаправленно контролироваться. Для оптоэлектронных лазерных систем мультистабильность релаксационных режимов была описана (см., например, [4,5]) специальными методами нелокального анализа при большом значении одного из параметров лазера. В этой статье на основе локального анализа показана возможность мультистабильности в лазерной системе с большим запаздыванием в оптоэлектронной цепи обратной связи, управляющей накачкой. Наряду с мультистабильностью, описанной в [6], которая проявляется как сосуществование периодических аттракторов с разными частотами, в данной статье показана дополнительная возможность существования множества промодулированных режимов (торов) в областях параметров, где могут также реализоваться и импульсные колебания.

Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y - 1), \\ \dot{y} &= q - y - yu + \alpha u(t - T), \end{aligned} \quad (1)$$

где переменная u пропорциональна плотности фотонов, переменная y пропорциональна инверсии населённостей, $q > 1$ – скорость накачки, v – отношение скорости затухания фотонов в резонаторе и скорости релаксации населённостей, потери резонатора нормированы к единице. Выражение $\alpha u(t - T)$ описывает дополнительную накачку, которую вводят с помощью оптоэлектронной цепи обратной связи (ОС), где T – время распространения и преобразования оптического сигнала в электрический в цепи ОС, α – коэффициент обратной связи. В лазерных системах имеют смысл значения $-1 < \alpha < 1$. Впервые схема воздействия на ток накачки использовалась для стабилизации частоты пиков полупроводниковых лазеров [6, 7], применялась для управления динамикой газового лазера [8], и может быть применена в современных твердотельных микрочип-лазерах. Математическая модель (1) справедлива при рассмотрении режимов с временами изменения характеристик излучения, значительно превышающими время прохода излучения по резонатору лазерного диода.

Динамика системы (1) изучалась многими авторами. В работах [4, 5] на основе специально разработанного [10, 11] асимптотического метода исследования нелокальной динамики уравнений с запаздыванием было показано, что при условии, когда параметр v достаточно велик (в реальных системах он имеет порядок 10^3 – 10^4), в системе (1) наблюдаются разнообразные пиковые колебания достаточно большой амплитуды. При этом существенно использовались фундаментальные результаты работы [12]. В работах [9, 10] тоже при условии достаточно большого v исследовалась локальная динамика системы (1), то есть динамика в малой окрестности состояния равновесия (u_0, v_0)

$$u_0 = \frac{q - 1}{1 - \alpha}, \quad y_0 = 1. \quad (2)$$

Показано, что в задаче об устойчивости (u_0, v_0) критический случай имеет бесконечную размерность. На основе предложенного в [15–18] метода построены квазинормальные формы – специальные универсальные нелинейные эволюционные уравнения, нелокальная динамика которых определяет поведение решений исходной задачи (1) в малой окрестности состояний равновесия (2). В зависимости от величины запаздывания T эти уравнения могут быть как уравнениями с запаздыванием, так и уравнениями параболического типа.

Основное предположение настоящей работы – достаточно большое время запаздывания T :

$$T \gg 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon = T^{-1} \ll 1. \quad (3)$$

При этом условии рассмотрим вопрос о поведении всех решений системы (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности состояния равновесия (2). На основе метода квазинормальных форм [17, 19]

ниже построены специальные континуальные наборы семейств нелинейных эволюционных уравнений, нелокальная динамика которых описывает решения (1) из окрестности (2). Каждый представитель соответствующих семейств определяет поведение тех или иных установившихся структур, а значит, соответствующая локальная динамика настолько богата, что имеет смысл говорить о явлении гипермультистабильности.

В (1) произведем замену, чтобы свести задачу к исследованию динамики в окрестности нулевого состояния равновесия. Положим

$$u = u_0 + u_1, \quad y = y_0 + y_1.$$

В результате, опуская индекс «1», приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{u} = vu_0y + vuy, \\ \dot{y} = -u - (1 + u_0)y + \alpha u(t - T) - uy. \end{cases} \quad (4)$$

В дальнейшем предполагаем, что выполнено условие локальности, то есть в (4) значения u и y достаточно малы.

2. Анализ линеаризованной системы. Важную роль для определения локальной (теперь уже в окрестности нулевого состояния равновесия) динамики (4) играет поведение решений линеаризованной в нуле системы

$$\dot{w} = Aw + \alpha Bw(t - T), \quad (5)$$

где $w = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a = 1 + u_0 = \frac{q - \alpha}{1 - \alpha}$,
 $b = vu_0 = \frac{v(q - 1)}{1 - \alpha}$.

В свою очередь, поведение решений (5) определяется корнями его характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = \alpha b \exp(-\lambda T). \quad (6)$$

В том случае, когда все корни (6) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси, при $\varepsilon \rightarrow 0$ все решения (4) из малой (и не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Тем самым локальная динамика демонстрирует устойчивость состояния равновесия. Если же у (6) при каждом достаточно малом ε найдется корень с положительной (и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$) вещественной частью, поставленная задача становится нелокальной. Здесь рассмотрены критические в задаче об устойчивости $u = y = 0$ случаи, когда у (6) нет корней с положительной (и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$) вещественной частью, и есть корни, находящиеся в малой (при $\varepsilon \rightarrow 0$) окрестности мнимой оси на комплексной плоскости. Для определения условия существования таких корней положим в (6) $\lambda = iv$. Получим, что

$$-v^2 + iva + b = \alpha b \exp(-ivT). \quad (7)$$

Отсюда, в частности,

$$(b - z)^2 + a^2 z = \alpha^2 b^2, \quad (8)$$

где $z = v^2 \geq 0$. Уравнение (8) разрешимо относительно $z \geq 0$ при некоторых α , в частности, $z = v^2 = 0$ при $\alpha = \pm 1$. В то же время, при $\alpha = 0$ это уравнение не имеет решений.

Отметим, далее, что при $\alpha = 0$ система (4) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, и все решения из окрестности нуля ($u = y = 0$) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ и, соответственно, все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Нас интересует «первое» положительное значение $\alpha = \alpha_+ \leq 1$ и первое отрицательное значение $\alpha = \alpha_- \geq -1$ такие, что при $\alpha = \alpha_{\pm}$ уравнение (8) разрешимо, а при $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ уравнение (8) не имеет неотрицательных решений.

Займемся определением α_+ и α_- . Уравнение (8) перепишем в виде

$$z^2 - (2b - a^2)z + b^2(1 - \alpha^2) = 0. \quad (9)$$

При $\alpha^2 < 1$ свободный член квадратного трехчлена (9) положителен, значит, если действительные корни существуют, то они одного знака. В случае $2b - a^2 < 0$ они получаются отрицательными, а в случае $2b - a^2 \geq 0$ – положительными. Значит, если $2b - a^2 < 0$, то $\alpha_- = -1$, $\alpha_+ = 1$. Если $2b - a^2 \geq 0$, то значения α_{\pm} определяются как наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $d(\alpha) = 0$, где $d(\alpha)$ – дискриминант квадратного трехчлена (9) – имеет вид

$$d(\alpha) = P(\alpha)(1 - \alpha)^{-4},$$

$$P(\alpha) = (q - \alpha)^4 - 4v(q - 1)(q - \alpha)^2(1 - \alpha) + 4v^2(q - 1)^2\alpha^2(1 - \alpha)^2.$$

Интересно отметить, что при достаточно больших v имеем $2b - a^2 > 0$ и

$$\alpha_{\pm} = \pm v^{-1/2} \frac{q}{\sqrt{q-1}} + O(v^{-1}). \quad (10)$$

Через $z_{\pm} = v_{\pm}^2$ обозначим решение уравнения (9) соответственно при $\alpha = \alpha_+$ и $\alpha = \alpha_-$. В дальнейшем через α_0 будем обозначать либо α_+ , либо α_- (в зависимости от знака параметра α), а через v_0 , соответственно, либо v_+ , либо v_- . Легко видеть, что, если $|\alpha_0| = 1$, то $v_0 = 0$, а если $|\alpha_0| < 1$, то

$$z_0 = v_0^2 = v(q - 1)(1 - \alpha_0)^{-1} - 2^{-1}(q - \alpha_0)^2(1 - \alpha_0)^2. \quad (11)$$

Введем затем ещё несколько обозначений. Пусть $\Theta = \Theta(\varepsilon)$ – такое значение из промежутка $[0, 2\pi)$, которое дополняет величину $v_0 T$ до кратного 2π числа. Число $\kappa \in [0, 2\pi)$ определим из равенства

$$\alpha_0 b_0 \exp(-i\kappa) = b_0 - v_0^2 + i v_0 a_0, \quad (12)$$

где $a_0 = (q - \alpha_0)(1 - \alpha_0)^{-1}$, $b_0 = v(q - 1)(1 - \alpha_0)^{-1}$. Эти обозначения позволяют в удобной форме выписать некоторую совокупность таких корней характеристического уравнения (6), которые при малых ε находятся в малой окрестности мнимой оси.

Утверждение 1. При условии

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1 \quad (13)$$

характеристическое уравнение (6) имеет такое множество корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), для каждого из которых верно асимптотическое представление

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\nu_0 + i\varepsilon(\Theta + 2k\pi + \kappa) + \varepsilon^2 \lambda_{k1} + \varepsilon^3 \lambda_{k2} + O(\varepsilon^4), \quad (14)$$

где

$$\lambda_{k1} = -i\Delta[\Theta + 2k\pi + \kappa], \quad (15)$$

$$\Delta = -i(a_0 - 2\nu_0)(\alpha_0 b_0)^{-1} \exp(i\kappa), \quad (\text{Im } \Delta = 0),$$

$$\lambda_{k2} = \sigma(\Theta + 2k\pi + \kappa)^2 + i\Delta^2(\Theta + 2k\pi + \kappa) + c, \quad (16)$$

$$\sigma = -\frac{1}{2}\Delta^2 + \Delta(a_0 - 2\nu_0 i)[4\nu_0^2 + a_0^2]^{-1},$$

$$c = [i\nu_0 a_1 + (1 - \alpha_0)b_1 + \alpha_1 b_0 \exp(-i\kappa)] \Delta(a_0 - 2i\nu_0)[4\nu_0^2 + a_0^2]^{-1},$$

$$a_1 = \alpha_1(q - 1)(1 - \alpha_0)^{-2}, \quad b_1 = \alpha_1 v(q - 1)(1 - \alpha_0)^{-2}.$$

При условии $\text{Re } \sigma < 0$ задача о динамике решений (4) из малой окрестности нулевого состояния равновесия является нелокальной: существуют корни (6), вещественные части которых положительны и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ниже дополнительно предполагаем, что

$$\text{Re } \sigma > 0. \quad (17)$$

Обратим внимание, что при больших значениях параметра v неравенство (17) выполнено.

Отметим, что $\lambda_k(\varepsilon)$ разрывны по ε (в силу разрывной зависимости от ε функции $\Theta(\varepsilon)$), а главное – асимптотические равенства (14) неравномерны по номеру k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Как оказывается, некоторые совокупности корней (14) можно представить и по-иному. Для того чтобы показать это, введем ещё несколько обозначений. Фиксируем произвольно параметр $\gamma \in (0, 1)$ и натуральное n . Выберем произвольно n положительных чисел ν_1, \dots, ν_n . Обозначим через $\Theta_j = \Theta_j(\varepsilon)$ такое число из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что выражение $\nu_j \varepsilon^{\gamma-1} + \Theta_j(\varepsilon)$ является целым кратным 2π . Положим $\Omega = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$, $K = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_j \in Z$ (Z – множество всех целых чисел на числовой оси, $j = 1, \dots, n$).

Положим затем

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^{2\gamma} \alpha_1. \quad (18)$$

Непосредственно проверяется, что характеристическое уравнение (6) имеет совокупность корней (вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$) вида

$$\begin{aligned} \lambda_K(\Omega, \varepsilon) = & i \left(\nu_0 + (\Omega, K) \varepsilon^\gamma + \varepsilon \left(\Theta_0 + (\Theta, K) + \kappa \right) - \right. \\ & \left. - \Delta \varepsilon^{1+\gamma} (\Omega, K) + o(\varepsilon^{1+\gamma}) \right) + \varepsilon^{1+2\gamma} (\sigma(\Omega, K)^2 + c) + o(\varepsilon^{1+2\gamma}). \end{aligned} \quad (19)$$

В заключение этого пункта отметим, что собственным значениям — корням $\lambda_k(\varepsilon)$ и $\lambda_K(\Omega, \varepsilon)$ характеристического уравнения (6) отвечают собственные решения линейной системы (5) при $\alpha = \alpha_0 + o(1)$ вида

$$w(t, \varepsilon) = [w_0 + o(1)] \exp \left[i \nu_0 \varepsilon^{-1} (1 + o(1)) t \right],$$

где вектор $w_0 = \begin{pmatrix} b_0 \\ i \nu_0 \end{pmatrix}$ является собственным для матрицы $C = A_0 + \alpha_0 \exp(-i\kappa) B_0$

$$i \nu_0 w_0 = C w_0.$$

3. Построение квазинормальной формы при условии (13)

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1.$$

Напомним, что при этом условии вещественные части бесконечного множества корней характеристического квазиполинома (6) стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это, в частности, означает, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия системы (4) реализуется критический случай бесконечной размерности. Стандартные методы исследования, базирующиеся на использовании методов локальных инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм непосредственно не применимы, однако формализм этих методов существенно используется. Соответствующие построения детально разработаны в [9, 17, 19]. Согласно результатам этих работ, сначала введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{aligned} U(t, \varepsilon) = & \varepsilon \left[w(\tau, \tau_1) \exp(i \nu_0 t) w_0 + \bar{w}(\tau, \tau_1) \exp(-i \nu_0 t) \bar{w}_0 \right] + \\ & + \varepsilon^2 U_2(t, \tau, \tau_1) + \varepsilon^3 U_3(t, \tau, \tau_1) + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

в котором $\tau = \varepsilon^3 t$, $\tau_1 = \varepsilon(1 - \varepsilon \Delta)t$; константа ν_0 и вектор w_0 были определены в предыдущем пункте;

$$w(\tau, \tau_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp \left[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1 \right];$$

а $U_2(t, \tau, \tau_1)$ и $U_3(t, \tau, \tau_1)$ являются $2\pi/\nu_0$ -периодическими функциями по первому аргументу.

Систему (4) удобно записать в векторной форме относительно $U = (u_1, u_2)$,
 $(u_1 = u, u_2 = y)$

$$\dot{U} = AU + \alpha BU(t - T) + u_1 u_2 V, \quad V = \begin{pmatrix} v \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Подставим (20) в (21) и будем, учитывая (13), собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . При первой степени ε соответствующее тождество выполнено. Собирая коэффициенты при ε^2 , приходим к системе уравнений для определения $U_2 = U_{21} \exp(iv_0 t) + \bar{U}_{21} \exp(-iv_0 t) + U_{22} \exp(2iv_0 t) + \bar{U}_{22} \exp(-2iv_0 t)$:

$$CU_{21} = -i \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa) \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1] \right) w_0 + \quad (22)$$

$$+ i\alpha_0 \Delta \exp(-i\kappa) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa) \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1] \right) B_0 w_0,$$

$$C_0 U_{22} = iv_0 b_0 w^2(\tau, \tau_1) V, \quad (23)$$

где $C_0 = 2iv_0 I - A_0 - \alpha_0 \exp(-2i\kappa) B_0$.

Система (23) всегда разрешима и

$$U_{22} = iv_0 b_0 w^2(\tau, \tau_1) C_0^{-1} V = iv_0 b_0 w^2(\tau, \tau_1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Для разрешимости системы (22) относительно U_{21} необходимо и достаточно, чтобы вектор, стоящий в правой части, был ортогонален вектору

$$w_1 = (a_0 - iv_0, b_0)^T. \quad (24)$$

В силу определения фигурирующих в (22) параметров, это условие выполнено, поэтому U_{21} из (22) определяется следующим выражением:

$$U_{21} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa) \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1] \right) w_{00}. \quad (25)$$

Здесь w_{00} – решение системы

$$C w_{00} = i[\alpha_0 \Delta \exp(-i\kappa) B_0 - I] w_0. \quad (26)$$

Соберем коэффициенты при ε^3 . В результате приходим к линейной неоднородной системе уравнений относительно $U_3(t, \tau, \tau_1)$, причем неоднородность содержит гармоники по первому аргументу $\exp(inv_0 t)$ с номерами $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Тем самым, решение $U_3(t, \tau, \tau_1)$ тоже содержит эти же гармоники. Соответствующие коэффициенты обозначим через $U_{3n}(\tau, \tau_1)$. Для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ вектор-функции $U_{3n}(\tau, \tau_1)$ легко определяются, а для $U_{31}(\tau, \tau_1)$ (и $U_{3-1}(\tau, \tau_1) = \bar{U}_{31}(\tau, \tau_1)$) получаем систему уравнений

$$CU_{31} = \Gamma, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma = & w[A_1 + \alpha_1 \exp(-i\kappa)B_0]w_0 + \alpha_0 \frac{dw}{d\tau} \exp(-i\kappa)B_0w_0 - \\
& - i\delta \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\Theta + 2k\pi + \kappa)^2 \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\varepsilon_1] \right) w_{00} - \\
& - \frac{1}{2}\Delta \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\Theta + 2k\pi + \kappa)^2 \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1] \right) \times \\
& \quad \times \alpha_0 \exp(-i\kappa)B_0w_0 + v_0b_0[v_0v_1 + ib_0v_2]|w|^2wV, \\
A_1 = & (q-1)(1-\alpha_0)^{-2}\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Условие разрешимости системы (27) состоит в выполнении равенства $(\Gamma, z_0) = 0$. Учитывая здесь соотношения (24)–(26), (28), получаем систему уравнений относительно $w(\tau, \tau_1)$. Обратим внимание, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \tau_1} &= i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa) \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1], \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_1^2} &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)(\Theta + 2k\pi + \kappa)^2 \exp[i(\Theta + 2k\pi + \kappa)\tau_1].
\end{aligned}$$

Имея это в виду, уравнение для $w(\tau, x)$ можно записать в форме параболического уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Delta^2(\Theta + \kappa) \frac{\partial w}{\partial x} + [\sigma(\Theta + \kappa)^2 + c]w + \delta|w|^2w \tag{29}$$

с периодическими краевыми условиями

$$w(\tau, x+1) \equiv w(\tau, x). \tag{30}$$

В (29) через δ обозначена величина

$$\delta = v_0[v_0v_1 + ib_0v_2](v(a_0 + iv_0) + b_0)(\alpha_0b_0^{-1}) \exp(i\kappa).$$

Коэффициенты (29) зависят от Θ , а значит, от малого параметра ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\Theta(\varepsilon)$ бесконечно много раз принимает каждое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$. Отсюда, в частности, вытекает, что динамика (4) весьма чувствительна к изменению малого параметра ε : при $\varepsilon \rightarrow 0$ может наблюдаться неограниченное число раз процесс рождения и гибели тех или иных установившихся режимов. Ниже через $\varepsilon_n(\Theta_0)$ обозначим такую последовательность, что $\varepsilon_n(\Theta_0) \rightarrow 0$ и $\Theta(\varepsilon_n(\Theta_0)) = \Theta_0$.

Сформулируем основной результат.

Утверждение 2. Пусть при некотором $\Theta = \Theta_0 \in [0, 2\pi)$ краевая задача (29), (30) имеет ограниченное решение $u^*(\tau, x)$. Тогда система (4) при $\varepsilon = \varepsilon_n(\Theta_0)$ имеет асимптотическое по невязке при $n \rightarrow \infty$ решение $x(t, \varepsilon)$ такое, что

$$\begin{aligned}
x(t, \varepsilon) = & \varepsilon u^* \left(\varepsilon^3, \varepsilon (1 + \varepsilon\Delta + \Theta(\varepsilon^2)) t \right) \exp \left[i \left(\frac{v_0}{\varepsilon} + \Theta_0 + \kappa + \Theta(\varepsilon) \right) t \right] + \\
& + \bar{u}^* \left(\varepsilon^3 t, \varepsilon (1 + \varepsilon\Delta + \Theta(\varepsilon^2)) t \right) \exp \left[-i \left(\frac{v_0}{\varepsilon} + \Theta_0 + \kappa + \Theta(\varepsilon) \right) t \right] + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{31}$$

В простейших ситуациях, когда, например, $u^*(\tau, x)$ – в определенном смысле – грубое периодическое решение, можно показать, что формула (31) доставляет в качестве решения (4) тот же, что $u^*(\tau, x)$ устойчивости.

В заключение этого пункта заметим, что краевая задача (30), (31) является уравнением типа Гинзбурга–Ландау. Известно (см. например [20]), что она может обладать достаточно богатой динамикой. Из приведенных выше построений следует, что тот же вывод справедлив и для локальной динамики системы (4). В частности, бегущим волнам в уравнении Гинзбурга–Ландау будут соответствовать периодические решения разной частоты в исходной системе. На рис. 1 приведены фурье-спектры четырех сосуществующих периодических аттракторов, полученных численно при различных начальных условиях.

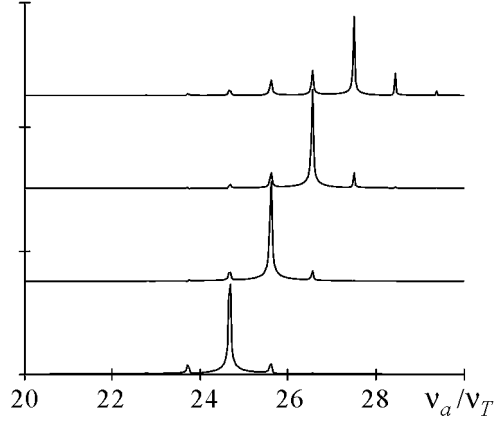


Рис. 1. Фурье-спектры четырех сосуществующих периодических аттракторов, полученных численно при различных начальных условиях. Параметры системы (1): $v = 20$, $q = 3.5$, $\alpha = 0.66$, $T = 16$, критическое значение $\alpha_+ = 0.633$. Частоты аттракторов ν_a нормированы на частоту цепи обратной связи $\nu_T = 2\pi/T$

Количество таких аттракторов может расти с увеличением запаздывания, как обсуждается в [6].

4. Построение систем квазинормальных форм при условии

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^{2\gamma}\alpha_1, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (32)$$

Это условие означает, что параметр α сильнее отличается от α_0 , чем в предыдущем пункте (формула (13)). Используем построения, предложенные в [21, 22].

Положим в (21)

$$U = \varepsilon^\gamma \left[\exp [i(v_0 + \varepsilon(\Theta + \kappa))t] \sum_k \xi_k(\tau) \exp(i(K, T_1))w_0 + \exp [-i(v_0 + \varepsilon(\Theta + \kappa))t] \sum_k \bar{\xi}_k(\tau) \exp(-i(K, T_1))\bar{w}_0 \right] + \varepsilon^{2\gamma}U_2 + \varepsilon^{3\gamma}U_3 + \dots \quad (33)$$

Здесь использованы обозначения из п. 2, $\tau = \varepsilon^{2\gamma+1}t$, $T_1 = (t_1, \dots, t_n)$, $t_j = (v_j\varepsilon^{1-\gamma} + \varepsilon\Theta_j + \varepsilon^{\gamma+1}v_j\Delta)t$. Суммирование в (33) происходит по всевозможным целочисленным наборам $K = (k_1, \dots, k_n)$, а вектор-функции $U_j = U_j(t, \tau, t_1, \dots, t_n)$ ($j = 2, 3$) периодичны с периодом 2π по каждому из последних n аргументов. Подставляя формальный ряд (33) в (21) и последовательно приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем, что квазинормальные формы в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 w + cw + \delta|w|^2w \quad (34)$$

с периодическими краевыми условиями по каждой пространственной переменной

$$w(\tau, x_1, \dots, x_j + \frac{2\pi}{\nu_j}, x_{j+1}, \dots, x_n) \equiv w(\tau, x_1, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (35)$$

Утверждение 3. Пусть при некоторых n и ν_1, \dots, ν_n краевая задача (34), (35) имеет ограниченное решение $w^*(\tau, x_1, \dots, x_n)$. Тогда система уравнений (21) имеет асимптотическое по невязке решение

$$U(t, \varepsilon) = \varepsilon^\gamma \left[\exp(i[\nu_0 + \varepsilon(\Theta_0 + \kappa)]t) w^*(\varepsilon^{1+2\gamma}t, t_1, \dots, t_n) + \exp(-i[\nu_0 + \varepsilon(\Theta_0 + \kappa)]t) \overline{w^*(\varepsilon^{1+2\gamma}t, t_1, \dots, t_n)} \right] + O(\varepsilon^{2\gamma}).$$

Краевая задача (34), (35) является вырожденной параболической краевой задачей. Известно, что её динамика может быть весьма сложной. Кроме этого, уравнение (34) и краевые условия (35) содержат произвольный числовой параметр n ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) и n континуальных параметров ν_1, \dots, ν_n . Для каждого набора параметров решению (34), (35) соответствует асимптотическое по невязке решение (21). Поэтому можно говорить о явлении гипермультистабильности. На рис. 2 и 3 показаны некоторые аттракторы, полученные численно, и их фурье-спектры, где частоты нормированы на частоту цепи обратной связи $2\pi/T$. Отметим, что существование подобных квазипериодических решений подтверждают и численные результаты [23].

Отметим ещё, что, несмотря на кажущуюся сложность краевых задач (34), (35), они позволяют существенно упростить изучение локальной динамики (21). Как показано выше, решения (21) включают в себя как решения (34), (35), так и относительно быстро осциллирующие функции.

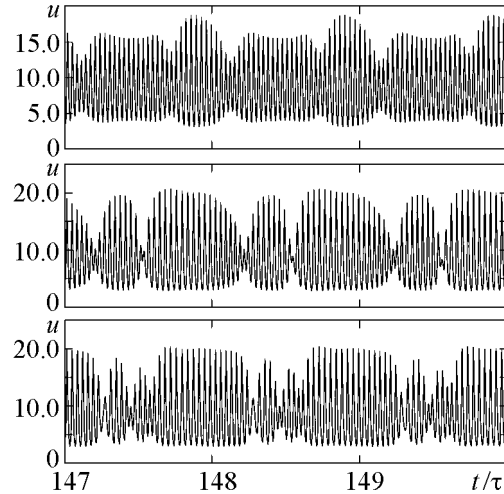


Рис. 2. Динамика трех сосуществующих периодических аттракторов, полученных численно при различных начальных условиях. Параметры системы (1) $v = 20$, $q = 3.5$, $\alpha = 0.7$, $T = 16$ соответствуют достаточно большой надкритичности при критическом значении $\alpha_+ = 0.633$

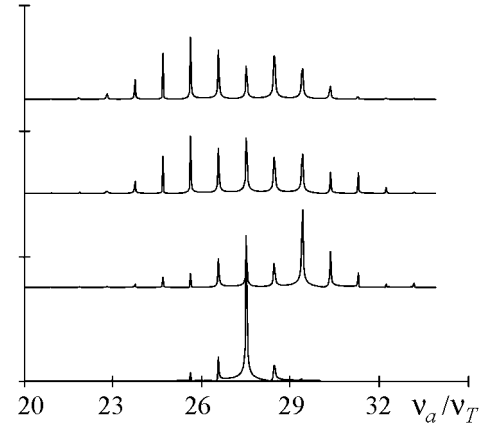


Рис. 3. Фурье-спектры четырех сосуществующих аттракторов, полученных численно при различных начальных условиях. Нижний спектр соответствует простому периодическому решению, другие спектры соответствуют аттракторам, показанным на рис.2. Параметры системы (1) те же, что и на рис.2, и соответствуют достаточно большой надкритичности при критическом значении $\alpha_+ = 0.633$

Ещё один важный вывод, подтверждающий возможность гипермультистабильности, связан с численным определением параметров в (1). Суть вопроса состоит в том, что параметры γ и α_1 , фигурирующие в (32), определяются при каждом фиксированном α неоднозначно и в довольно широком диапазоне. В силу того, что α_1 существенно влияет на динамику краевой задачи (34), (35), а значит, и на локальную динамику системы (1), заключаем, что в конкретных задачах необходимо рассматривать этот параметр во всем его диапазоне изменения. Поскольку при различных α_1 динамика, вообще говоря, различна, то получаем и здесь явное указание на возможность явления гипермультистабильности.

Рассмотрим это подробнее на примере. Фиксируем параметры v , q , α и T в исходном уравнении (1). При этом будем считать, что $q > 1$ произвольно, v такое, что выполняются все сформулированные выше условия. Величина T , в соответствии со всеми предположениями, должна быть большой, а значение $\varepsilon = T^{-1}$ – маленькое. Например, $\varepsilon = 10^{-3}$. Полагаем, что это значение «достаточно мало». Параметр α пусть «не сильно» отличается от критического значения α_0 , то есть $\alpha = \alpha_0 + \mu$ и μ «не велико». Пусть этот параметр принимает одно из двух значений: $\mu = 10^{-1}$ и $\mu = 10^{-2}$. Положим $\mu = \varepsilon^{2\gamma}\alpha_1$. Параметр γ может принимать любое значение от 0 до 1, α_1 пусть будет «не мало» и «не велико». Дополнительно ограничив область значений $\gamma \in [1/4, 1/2]$, получим

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\in [\sqrt{10}, 10^2] && \text{при } \mu = 10^{-1}; \\ \alpha_1 &\in [1/\sqrt{10}, 10] && \text{при } \mu = 10^{-2}.\end{aligned}$$

Каждому значению α_1 из полученного диапазона может, вообще говоря, соответствовать свой установившийся режим исходного уравнения (1) при одних и тех же значениях параметров v , q , α и T .

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственные контракты № 02.740.11.0197 и № П2223).

Библиографический список

1. *Yanchuk S., Perlikowski P.* Delay and periodicity // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 046221.
2. *Loose A., Goswami B.K., Wunsche H.-J., Henneberger F.* Tristability of a semiconductor laser due to time-delayed optical feedback // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 036211.
3. *Erneux T., Grasman J.* Limit-cycle oscillators subject to a delayed feedback // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. 026209.
4. *Grigorieva E.V., Kaschenko S.A., Loiko N.A., Samson A.M.* Nonlinear dynamics in a laser with a negative delayed feedback // Physica D. 1992. Vol. 59. P. 297.
5. *Grigorieva E.V., Kaschenko S.A.* Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // Bifurcations and chaos. 1993. Vol. 6. P. 1515.
6. *Wolfrum M., Yanchuk S.* Eckhaus instability in systems with large delay // Phys. Rev. Letters. 2006. Vol. 96. 220201.

7. *Paoli T.L., Ripper L.E.* Frequency stabilization and narrowing of optical pulses from CW GaAs injection lasers // *IEEE J. Quan. Electron.* 1970. Vol. QE-6. P. 335.
8. *Giacomelli G., Calzavara M., Arecchi F.T.* Instabilities in a semiconductor laser with delayed optoelectronic feedback // *Opt. Commun.* 1989. Vol. 74. P. 97.
9. *Arecchi F.T., Giacomelli G., Lapucci A., Meucci R.* Dynamics of a CO₂ laser with delayed feedback: The short-delayed regime // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43. P. 4997.
10. *Кащенко С.А.* Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва // *Докл. АН СССР* 1982. Т. 266, № 4. С. 792.
11. *Кащенко С.А.* Об установившихся режимах уравнения Хатчинсона с диффузией // *ДАН СССР.* 1987. Т. 292, № 2. С. 327.
12. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
13. *Grigorieva E.V., Haken H., Kaschenko S.A.* Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Optics Commun.* 1999. Vol. 165. P. 279.
14. *Bestehorn M., Grigorieva E.V., Haken H. and Kaschenko S.A.* Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // *Physica D.* 2000. Vol. 145. P. 111.
15. *Кащенко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // *ДАН СССР.* 1988. Т. 299, № 5. С. 1049.
16. *Кащенко С.А.* О коротковолновых бифуркациях в системах с малой диффузией // *Докл. АН СССР.* 1989. Т. 307, № 2. С. 269.
17. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // *Дифференциальные уравнения.* 1989. Т. 25, № 8.
18. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // *International Journal of Bifurcations and chaos.* 1996. Vol. 6, № 7. P. 1093.
19. *Кащенко С.А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // *Журнал вычисл.матем. и матем. физ.* 1998. Т. 38, № 3. С. 457.
20. *Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие.* М.: Российская академия наук и издательство «Наука», 2002. 478 с.
21. *Кащенко И.С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // *Доклады Академии Наук.* 2008. Т. 421, № 5. С. 586.
22. *Кащенко И.С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2008. Т. 48, № 12. С. 2141.
23. *Кащенко И.С.* Буферность в уравнениях второго порядка с большим запаздыванием // *Моделирование и анализ информационных систем.* Ярославль, 2008. Т. 15, № 2. С. 31.

*Белорусский государственный
экономический университет
Ярославский государственный
университет им. П.Г.Демидова*

Поступила в редакцию 15.02.2011

HYPERMULTISTABILITY IN LASER'S MODELS WITH LARGE DELAY

E.V. Grigorieva, I.S. Kashchenko, S.A. Kaschenko

We study model of monomode semiconductor laser with optoelectronic feedback, based on balanced equations with delay. We built sets of quasinormal forms in neighbourhood of bifurcation values. The possibility of coexistence of large amount of stable oscillating solutions is shown.

Keywords: Method of normal forms, large delay, small parameter, local analysis.



Григорьева Елена Викторовна – родилась в 1957, окончила Белорусский государственный университет (1974). Работала в институте физики АН БССР, БГУ, в настоящий момент работает в БГЭУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в БГУ (2004) в области нелинейной динамики лазерных систем. Опубликовала 100 научных и научно-методических трудов.

Республика Беларусь 220070 Минск, пр. Партизанский, д. 26
Белорусский государственный экономический университет
E-mail: grigorieva@tut.by



Кащенко Илья Сергеевич – родился в Ярославле (1982), окончил Ярославский государственный университет (2004). После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЯрГУ (2006) в области нелинейной динамики уравнений с запаздыванием. Является автором 30 научных и научно-методических трудов.

150000 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru



Кащенко Сергей Александрович – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1990) в области теории нелинейных колебаний. Автор пяти монографий. Опубликовал 220 научных статей по направлению, указанному выше.

150000 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru