



## УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ ОБРАЗОВАНИЯ КЛАСТЕРОВ

*А.Б. Шаповал*

Рассмотрен самоорганизующийся критический процесс кластеризации. Доказана устойчивость равновесного состояния для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей этот процесс.

*Ключевые слова:* Самоорганизованная критичность, кластеризация, равновесие, устойчивость.

### Введение

Неравновесные стационарные состояния, без сомнения, принадлежат к числу наиболее сложных природных явлений. Существенный вклад как в формулировку проблемы, так и в её решение внесла широко известная теория однородной турбулентности, предложенная Колмогоровым [1]. Согласно этой теории, жидкость под воздействием случайной силы достигает критического состояния, в котором интенсивность возмущений не имеет выделенных масштабов. При малой вязкости возникает так называемый инерционный интервал масштабов, через который происходит недиссипативное перераспределение энергии от больших вихрей к малым. Таким образом, критическое состояние оказывается неравновесным [2].

В последние десятилетия активно обсуждается гипотеза, что многие физические системы приходят в критическое состояние, не подвергаясь внешнему воздействию. Этот феномен называется самоорганизованной критичностью (СОК). О СОК сообщают при наблюдении за плазмой [3], землетрясениями [4], вспышками на солнце [5], фондовым рынком [6], кластеризацией городского населения [7] и другими явлениями. Возникает вопрос, существует ли простой (и одновременно универсальный) механизм СОК, который может реализовываться в рамках столь непохожих физических явлений.

Первая модель СОК введена Баком, Тангом и Визенфельдом (модель БТВ) в 1987 году [8]. В этой модели на двумерную решётку падают песчинки, одна за одной.

Место падения очередной песчинки выбирается наугад. Как только количество песчинок в клетке превышает некоторое пороговое значение, песчинки перераспределяются по решётке. Перераспределение консервативно внутри решётки и диссипативно на границе. Диссипация происходит редко, но, как правило, значительными «квантами» песка. Постоянное медленное накопление и редкая быстрая диссипация песка уравнивают друг друга, и система оказывается в динамическом равновесии. Динамическому равновесию (другими словами, балансу песка в решётке) соответствует приближение к стационарному состоянию, которое существует в некотором корректно определённом пространстве мер. Распределение различных характеристик системы является степенным [9] вблизи стационарного состояния, что свидетельствует о его критичности.

Механизм медленного накопления нагрузки и редкого быстрого освобождения напряжения оказался достаточно универсальным. Он реализует СОК при моделировании разрыва волокон [10], скольжении прижатых друг к другу шероховатых поверхностей [11], в моделях блоков и пружин [12], иерархических моделях землетрясений [13]. Однако описать критическое состояние аналитически удаётся лишь в редких случаях [14].

Остановимся на иерархической модели образования кластеров [15], в которой отсутствие выделенных масштабов в стационарном состоянии строго доказано. Предполагается, что каждый кластер характеризуется двумя величинами: рангом и массой. При слиянии кластеров их массы складываются, но ранг нового кластера определяется как максимум из рангов меньших кластеров. Увеличение ранга кластера возможно только при слиянии кластеров одинакового ранга. В основе такого определения лежит классификация рек, предложенная в [16]. В [15] доказано, что равновесное распределение кластеров как по их рангу, так и по их массе является степенным.

Цель настоящей работы – показать, что модель [15] действительно предлагает общую схему, при которой образуется самоорганизованная критическая структура. Для этого математически строго устанавливается, что равновесие в модели кластеризации [15] является устойчивым.

В следующем разделе 1 строго определена модель и сформулирован основной результат. Его доказательство приведено в разделе 2. В Заключение подведены итоги и сделаны выводы по результатам работы.

## 1. Модель

Для моделирования кластеризации статья [15] определяет некоторое пространство, состоящее из элементов (физический смысл которых зависит от приложений). Элементы располагаются внутри двумерной области. Предполагается, что каждый кластер определяется его рангом и массой. Эволюция происходит за счет добавления новых элементов (в каждый момент времени) и удаления достаточно больших кластеров (когда они возникают). В каждый момент времени в рассматриваемую область добавляется наименьший элемент системы. Наименьший элемент имеет ранг 1 и массу 1. В качестве примера области можно рассматривать ограниченное подмножество плоскости, разделённое на клетки. Тогда наименьшие элементы занимают одну клетку (элемент  $A$  на рисунке).

Кластером назовём связанное множество элементов. При добавлении нового элемента два несвязных кластера могут образовать новое связанное множество – новый кластер (как при добавлении элемента  $D$  на рисунке). Если добавление нового элемента привело к слиянию двух кластеров ранга 1 и массы 1, то получившийся кластер имеет ранг 2 и массу 3 (в случае «клеточной» области получившейся кластер состоит из трёх клеток). В общем случае при слиянии кластеров одинакового ранга  $r$  и масс  $m_1$  и  $m_2$  получившийся кластер имеет массу  $m_1 + m_2 + 1$  и ранг  $r + 1$ . Если объединяются кластеры разных рангов  $R$  и  $r$ ,  $R > r$ , то новый кластер наследует больший из рангов  $R$ , тогда как массы складываются. Добавленный элемент может также соприкасаться с одним существующим кластером. Тогда ранг этого кластера не меняется, а масса увеличивается на единицу. Наконец, добавленный элемент может соединять более, чем два кластера. Вероятность этого события мала, поэтому его можно игнорировать.\* Кластеры достаточно большого ранга  $\bar{R}$  удаляются, как только они возникают.

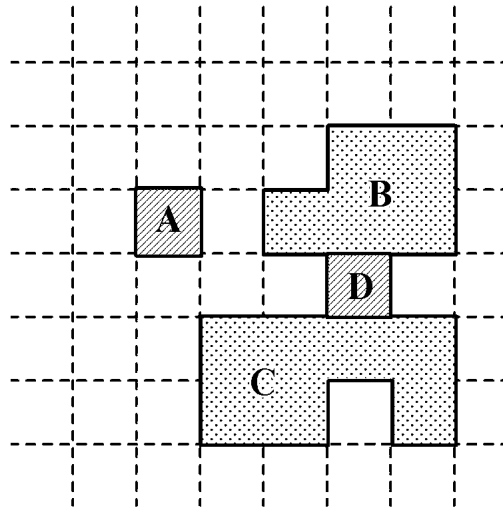


Рис. Появление кластеров на «клеточной» области; наименьший элемент  $A$  имеет ранг 1 и массу 1; в результате добавления элемента  $D$  кластеры  $B$  и  $C$ , имеющие ранг 2 и массы 5 и 7, соответственно, образовали один кластер ранга 3 и массы 13

Таким образом, масса кластера определяется однозначно по его виду, тогда как ранг зависит от очередности появления элементов. Легко понять, что кластер  $B$  на рисунке может иметь как ранг 1, так и ранг 2. Пусть кластеры  $B$  и  $C$  имеют ранг 2. Их массы равны 5 и 7, соответственно. Тогда при появлении элемента  $D$ , имеющего общие стороны с  $B$  и  $C$ , образуется кластер ранга 3 и массы 12.

Пусть  $N_i$  – это количество кластеров ранга  $i$ ,  $M_i$  – суммарная масса этих кластеров. Через  $r_{ij}$  обозначается интенсивность соединения кластеров рангов  $i$  и  $j$  новым элементом. Предполагается, что

$$r_{ij} \sim L_i L_j, \quad (1)$$

где  $L_i$  – суммарный периметр кластеров ранга  $i$ . Это предположение соответствует стандартному евклидовому расстоянию между точками двумерной области. За счёт перемасштабирования времени можно добиться того, что коэффициент пропорциональности окажется равен единице. Тогда в соответствии с теорией средних полей, количество кластеров изменяется согласно следующим уравнениям [15]:

$$\dot{N}_1 = C - 2L_1^2 - \sum_{j=2}^{\infty} L_1 L_j, \quad (2)$$

$$\dot{N}_i = L_{i-1}^2 - 2L_i^2 - \sum_{j=i+1}^{\infty} L_i L_j. \quad (3)$$

\*Если этот случай произошёл при численном моделировании, то следует отменить последнее добавление элемента и повторить выбор места для нового элемента.

Первое слагаемое уравнения (3) показывает, что количество кластеров возрастает если произошло слияние кластеров предыдущего ранга. Вероятность этого события пропорциональна  $r_{i-1,i-1} = L_{i-1}^2$ . Второе и третье слагаемые отвечают за убывание количества кластеров ранга  $i$ . Если произошло слияние *двух* кластеров ранга  $i$ , то  $N_i$  уменьшается на два. Отсюда – коэффициент два перед вторым слагаемым. Бесконечная сумма соответствует слиянию кластера ранга  $i$  с кластерами большего ранга. Удаление больших кластеров не учитывается уравнением (3). Уравнение для  $i = 1$  имеет специальный вид, потому что увеличение наименьших кластеров происходит только в результате добавления элементов. Величина  $N_1$  увеличивается со скоростью  $C$  (вместо единицы) из-за перемасштабирования временной шкалы.

Аналогично записываются уравнения, задающие баланс масс  $M$ ,

$$\dot{M}_1 = C - 2L_1^2 - \sum_{j=2}^{\infty} L_1 L_j, \quad (4)$$

$$\dot{M}_i = 2L_{i-1}^2 m_{i-1} + \sum_{k=1}^{i-1} L_i L_k m_k - 2L_i^2 m_i - \sum_{j=i+1}^{\infty} L_i L_j m_i, \quad i > 1. \quad (5)$$

Действительно, при слиянии двух кластеров ранга  $i - 1$  появляется один кластер ранга  $i$ . В результате общая масса  $M_i$  увеличивается на удвоенную массу  $2m_{i-1}$  типичного кластера ранга  $i - 1$ . Одновременно общая масса  $M_{i-1}$  уменьшается на ту же самую величину  $2m_{i-1}$ . В соответствии с выбранным масштабом временной оси и предположением (1) интенсивность слияния кластеров ранга  $i - 1$  равна  $L_{i-1}^2$ , что объясняет первое и третье слагаемые в правой части (5), соответствующие слиянию кластеров одинакового ранга.

Напротив, второе и четвёртое слагаемые описывают изменение масс при слиянии кластеров разных рангов. Масса  $M_i$  кластеров ранга  $i$  увеличивается при слиянии кластера ранга  $i$  с кластером произвольного меньшего ранга  $k$  на величину  $m_k$  – среднюю массу кластера ранга  $k$ . Коэффициент  $L_i L_k$  в сумме по переменной  $k$  (второе слагаемое в (5)) является следствием предположения (1). Аналогично получается четвёртое слагаемое, отвечающее за уменьшение  $M_i$  при слиянии кластера ранга  $i$  с кластером большего ранга  $j$ . Уравнение (4) для кластеров единичного ранга имеет специальный вид.

При формулировке динамики масс в виде уравнений (4), (5) игнорируется единичная масса элементов (элемента D на рисунке), соединяющих кластеры. Как будет указано ниже, в стационарном состоянии массы  $m_i$  возрастают по  $i$  как степенная функция, поэтому при оценке асимптотики масс по  $i$  допустимо пренебрегать единичной массой элементов.

Стационарное состояние системы (2)–(5) достигается при равенстве нулю производных по времени.

**Теорема 1** [15]. В равновесии  $L_i = C^{1/2} x^{i-1}$ ,  $m_i \approx (1/x^2)^{i-1}$ , где  $x \approx 0.55$  – решение уравнения  $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ .

Так как предполагается выполненным евклидово соотношение  $l_i \sim \sqrt{m_i}$ , то из Теоремы 1 следует, что  $N_i \sim 1/m_i$ . Таким образом, в равновесии распределение кластеров по массе является степенным с показателем степени, равным единице.

Далее формулируется, в каком смысле стационарное состояние оказывается устойчивым. Положим  $s_i = N_i x^{-2i}$ . Тогда система (2)–(5) для пары вектор-функций  $(\vec{s}, \vec{M})$  записывается следующим образом:

для  $i = 1$

$$\dot{s}_1 = a^2 x^{-2} - 2M_1 s_1 - \sum_{j=2}^{\infty} \sqrt{M_1 M_j s_1 s_j} x^{j-1}, \quad (6)$$

$$\dot{M}_1 = a^2 - 2M_1^2 - \sum_{j=2}^{\infty} \sqrt{M_j M_1^3 \frac{s_j}{s_1}} x^{j-1}; \quad (7)$$

для  $i > 1$

$$\dot{s}_i = M_{i-1} x^{-2} s_{i-1} - 2M_i s_i - \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{M_i M_j s_i s_j} x^{j-i}, \quad (8)$$

$$\dot{M}_i = 2M_{i-1}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{M_i M_k^3 \frac{s_i}{s_k}} x^{i-k} - 2M_i^2 + \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{M_j M_i^3 \frac{s_j}{s_i}} x^{j-i}. \quad (9)$$

Пусть  $l_2$  – это пространство последовательностей, суммируемых в квадрате. Тогда пару вектор-функций

$$(\vec{s}(s_1(t), s_2(t), \dots), \vec{M}(M_1(t), M_2(t), \dots)) \in l_2 \times l_2$$

будем называть решением (6)–(9) с начальными условиями

$$\vec{s}|_{t=0} = \vec{s}_0, \quad (10)$$

$$\vec{M}|_{t=0} = \vec{M}_0, \quad (11)$$

если  $s_i(\cdot)$  и  $M_i(\cdot)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  – дважды дифференцируемые функции, удовлетворяющие (6)–(9) и начальным условиям (10), (11).

Основной результат статьи сформулирован в следующей Теореме.

**Теорема 2.** *Равновесие  $(\sigma, \mu)$  системы уравнений (6)–(9) асимптотически устойчиво.*

## 2. Устойчивость стационарного состояния

Для доказательства Теоремы 2 сформулируем три вспомогательные Леммы, доказательство которых приведено в приложении.

**Лемма 1.** *Зафиксируем произвольное  $T > 0$ . Пусть  $\vec{M}$  – это произвольная вектор-функция, такая что  $M_i(t)$  дважды дифференцируема на  $[0, T]$  и удовлетворяет неравенству*

$$|M_i(t) - \mu_i| \leq \varepsilon \gamma^i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \dots$$

для некоторого достаточно малого  $\varepsilon$  и  $\gamma = x^{1/2}$ . Пусть  $\vec{s}$  – решение задачи (6), (8), (10), у которого начальное условие удовлетворяет неравенству  $|s_{0i} - \sigma| \leq \varepsilon \gamma^i$ . Тогда

$$|s_i(t) - \sigma| \leq |s_{0i} - \sigma| e^{-\varphi t}, \quad \varphi > 0, \quad t > 0. \quad (12)$$

**Лемма 2.** Пусть  $T > 0$  – некоторое число. Предположим, что  $\vec{s}(t)$  – это произвольная дважды дифференцируемая на  $[0, T]$  вектор-функция, удовлетворяющая неравенству

$$|s_i(t) - \sigma| < \varepsilon\gamma^i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \dots,$$

где  $\gamma = x^{1/2}$ , а  $\varepsilon$  достаточно мало. Предположим также, что  $\vec{M}(t)$  является решением (7), (9), (11), где  $|M_{0i} - \sigma| < \varepsilon\gamma^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$|M_i(t) - \sigma| \leq |M_{0i} - \sigma|e^{-\varphi t}, \quad \varphi > 0, \quad t > 0. \quad (13)$$

**Лемма 3.** Система уравнений (6)–(11) имеет единственное решение

$$(\vec{s}(s_1(t), s_2(t), \dots), \vec{M}(M_1(t), M_2(t), \dots)),$$

удовлетворяющее неравенству

$$|M_i(t) - \mu_i| \leq |M_i(0) - \mu_i|e^{\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$|s_i(t) - \sigma| \leq |s_i(0) - \sigma|e^{\alpha t}. \quad (15)$$

**Доказательство Теоремы 1.** Зафиксируем такое достаточно малое  $\varepsilon$ , что условия Лемм 1 и 2 выполнены. Предположим, что начальные условия  $(\vec{s}_i, \vec{M}_i)$  удовлетворяют неравенствам

$$|s_{0i} - \sigma| < \varepsilon\gamma^i/2, \quad |M_{0i} - \mu_i| < \varepsilon\gamma^i/2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда, согласно (14) and (15), существует такое  $\tau$ , что решение  $(\vec{s}(t), \vec{M}(t))$  задачи (6)–(11) с начальными условиями  $(\vec{s}_0, \vec{M}_0)$  удовлетворяет неравенствам

$$|s_i(t) - \sigma| < \varepsilon\gamma^i, \quad |M_i(t) - \mu_i| < \varepsilon\gamma^i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, \tau].$$

Итак,  $\vec{M}(t)$  удовлетворяет условиям Леммы 1 на отрезке  $[0, \tau]$ . Согласно Лемме 1, неравенство (15) может быть изменено на убывающее по времени неравенство (12). Поэтому

$$|s_i(t) - \sigma| \leq |s_{0i} - \sigma|e^{-\varphi t} \leq \varepsilon\gamma^i/2, \quad t \in [0, \tau]. \quad (16)$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$|M_i(t) - \mu_i| \leq |M_{0i} - \mu_i|e^{-\varphi t} \leq \varepsilon\gamma^i/2, \quad t \in [0, \tau] \quad (17)$$

для  $M_i(t)$ . Повторяя предыдущие рассуждения, легко получить, что неравенства (16) и (17) справедливы на отрезках  $t \in [\tau, 2\tau]$ ,  $t \in [2\tau, 3\tau]$  и далее. Следовательно, функции  $s_i(t)$  и  $M_i(t)$  удовлетворяют неравенствам (16) и (17) для всех  $t > 0$ . Асимптотическая устойчивость стационарного состояния (6)–(11) доказана.

## Заключение

В статье доказана устойчивость стационарного состояния в модели кластеризации с самоорганизованной критичностью. Если модельная система находится в окрестности критического состояния, то структура системы (кластеры) медленно укрупняется. Имеет место обратный каскад: малые изменения нижнего уровня постепенно проникают на все более и более высокие уровни. Распространение возмущения по уровням происходит с сохранением массы.

Состояние системы в каждый момент времени задаётся точкой в фазовом пространстве, снабжённом  $l_2$ -нормой. Удаление кластеров большого ранга (что соответствует освобождению напряжения в других моделях с СОК) не меняет принципиально норму точки в фазовом пространстве за счёт сделанного выбора нормы, устанавливающей малый вес кластерам большого ранга. Таким образом, показано, что процесс медленного нагружения и быстрого освобождения напряжения не уводит рассматриваемую систему от критического состояния.

Этот результат характерен для моделей с СОК. Однако, в отличие от многих моделей с СОК, в данном случае критическое состояние описано аналитически. Из-за универсальности механизма СОК найденные в частном случае флуктуации системы около критического состояния могут оказаться типичными для целого класса систем.

Информация о критическом состоянии позволяет решать прикладные задачи, в частности, связанные с прогнозом катастрофических событий в сложных системах, демонстрирующих самоорганизованное критическое поведение [17, 18]. В течение долгого времени в теории прогноза оставалась популярной гипотеза, утверждающая, что экстремальные события (явления), порождаемые самоорганизованной критической системой, как правило, не предсказуемы. Аргументы оппонентов прогноза основаны на том, что степенные распределения в системах с СОК обычно возникают как следствие отсутствия внутренних выделенных масштабов [19]. Эти аргументы формализуются для классических моделей с СОК [20]. Однако критическое состояние в моделях определяется при стремящемся к бесконечности пространственному объёму. В приложениях (землетрясения, финансовые крахи, всплески преступности и др.) наблюдаемые системы пространственно ограничены. Они не находятся в критическом состоянии, а совершают колебания вокруг него. Точно также, в данной статье динамика конечной системы носит колебательный характер за счёт удаления крупнейших кластеров, тогда как в бесконечной системе будет наблюдаться приближение к степенному (критическому) распределению кластеров. Именно колебания вокруг критической точки существенны для прогноза [21, 22]. Эффективный прогноз крупных землетрясений мира [23], вспышек преступности [24], техногенных катастроф [4] основан на сравнении текущих характеристик системы с критическими характеристиками. Точное описание критического состояния, обоснованное в настоящей статье, может стимулировать дальнейшее развитие прогнозных алгоритмов.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00339 и 11-01-00887-а).*

Вспомогательные Леммы

**Доказательство Леммы 1.** Рассмотрим случай  $i > 1$ . (При  $i = 1$  вычисления упрощаются). Положим  $u_i = s_i - \sigma_i$ . Тогда линейная аппроксимация уравнения для  $u_i$  имеет вид

$$\dot{u}_i = x^{-2}M_{i-1}u_{i-1} - 2M_iu_i - \sum_{j=i+1}^{\infty} \left( \frac{1}{2}\sqrt{M_iM_j}\frac{\sigma_j}{\sigma_i}x^{j-i}u_i + \frac{1}{2}\sqrt{M_iM_j}\frac{\sigma_i}{\sigma_j}x^{j-i}u_j \right).$$

Умножая полученное уравнение на  $2u_i\gamma^i$ , суммируя по всем натуральным  $i$  и принимая во внимание равенство  $\sigma = \sigma_i$ , имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (\gamma^i u_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( 2x^{-2}M_{i-1}\gamma^i u_{i-1}u_i - 4M_i\gamma^i u_i^2 - \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{M_iM_j}x^{j-i}\gamma^i u_i^2 - \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{M_iM_j}x^{j-i}\gamma^i u_i u_j \right).$$

Пользуясь абсолютной сходимостью ряда, изменим порядок слагаемых. В силу очевидного неравенства  $2u_i u_j \leq \beta u_i^2 + \beta^{-1} u_j^2$  (для произвольного  $\beta > 0$ ) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \gamma^i u_i^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \left| \gamma^{i+1} x^{-2} M_i - \frac{1}{2} \gamma^i \sqrt{M_i M_{i+1}} x \right| (\beta u_i^2 + \beta^{-1} u_{i+1}^2) - \sqrt{M_i M_{i+1}} x \gamma^i u_i^2 - 4\gamma^i M_i u_i^2 - \gamma^i \sum_{j=i+2}^{\infty} \left( \sqrt{M_i M_j} x^{j-i} u_i^2 + \frac{1}{2} \sqrt{M_i M_j} x^{j-i} u_i^2 + \frac{1}{2} \sqrt{M_i M_j} x^{j-i} u_j^2 \right) \right).$$

Таким образом,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (\gamma^i u_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \gamma^i u_i^2$ , где

$$a_i \leq \left| x^{-2} \gamma M_i - \frac{1}{2} x \sqrt{M_i M_{i+1}} \right| \beta + \beta^{-1} \gamma^{-1} \left| x^{-2} \gamma M_{i-1} - \frac{1}{2} x \sqrt{M_{i-1} M_i} \right| - 4M_i - \sqrt{M_i M_{i+1}} x - \frac{1}{2} \sum_{j=i+2}^{\infty} \sqrt{M_i M_j} x^{j-i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-2} \sqrt{M_i M_j} \gamma^{-(i-k)} x^{i-k}.$$

Зафиксируем  $\beta = x^{-1/4}$ . Так как  $|M_i(t) - \mu_i| \leq \varepsilon \gamma^i$  для любого  $t > 0$  и  $\mu_j \geq \mu_i$  для всех  $j \geq i$ , то

$$a_i \leq \left( 2x^{-7/4} - x^{3/4} - x^{5/4} - 4 - x - \frac{1}{2} \sum_{j=i+2}^{\infty} x^{j-i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-2} x^{(i-k)/2} \right) \mu_i + C_\varepsilon,$$

где  $C_\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Вычисления показывают, что  $a_i$  отрицательны для достаточно малых  $\varepsilon$ .



**Доказательство Леммы 2.** Пусть  $v_i = M_i - \mu_i$ . Тогда линейризация уравнения для  $v_i$  имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_i = & 4\mu_{i-1}v_{i-1} + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{\mu_i \mu_k \frac{s_i}{s_k}} x^{i-k} v_k - \left( 4\mu_i + \frac{3}{2} \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{\mu_i \mu_j \frac{s_j}{s_i}} x^{j-i} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{\frac{\mu_k^3 s_i}{\mu_i s_k}} x^{i-k} \right) v_i - \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu_i^3 s_j}{\mu_j s_i}} x^{j-i} v_j. \end{aligned}$$

Умножая обе части уравнения на  $2x^{i/2}v_i$ , суммируя по всем  $i$  и изменяя порядок слагаемых, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (x^{i/2} v_i^2) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left( 8\mu_{i-1} v_{i-1} v_i x^{i/2} + \sum_{k=1}^{i-1} \left( 3x^{i/2} \sqrt{\mu_i \mu_k} x^{i-k} - \sqrt{\mu_k / \mu_i} x^{i-k} x^{k/2} \right) v_k v_i - \right. \\ & \left. - x^{i/2} v_i^2 \left( 8\mu_i + 3 \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{\mu_i \mu_j} x^{j-i} - \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{\mu_k^3 / \mu_i} x^{i-k} \right) \right) + C_\varepsilon, \end{aligned}$$

где  $C_\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При получении последнего неравенства использована близость  $s_i$  и  $\sigma$ . Сумма слагаемых, содержащих разности  $s_i - \sigma$ , обозначена через  $C_\varepsilon$ . Применив элементарное неравенство  $v_i v_j \leq v_i^2/2 + v_j^2/2$  для оценки попарных произведений, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (x^{i/2} v_i^2) \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i/2} v_i^2,$$

где  $a_i$  оценивается

$$\begin{aligned} a_i \leq & 4\mu_{i-1} + 4\mu_i x^{1/2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} \left| 3\sqrt{\mu_i \mu_k} x^{i-k} - \sqrt{\mu_k^3 / \mu_i} x^{(i-k)/2} \right| + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^{\infty} \left| 3\sqrt{\mu_j \mu_i} x^{3(j-i)/2} - \sqrt{\mu_i^3 / \mu_j} x^{j-i} \right| - 8\mu_i - \\ & - 3 \sum_{j=i+1}^{\infty} \sqrt{\mu_i \mu_j} x^{j-i} + \sum_{k=1}^{i-1} \sqrt{\mu_k^3 / \mu_i} x^{i-k} + C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Утверждение Леммы следует из отрицательности  $a_i$ , которая, в свою очередь, следует из последнего неравенства с помощью элементарных вычислений, которые используют асимптотическую независимость равновесного  $\mu_i$  от  $i$ . Мы опустим здесь вычисления, лишь упомянув, что каждую сумму следует разделить на две части. Первая часть относится к трем слагаемым с индексами  $j = i + 1, i + 2, i + 3$ ,  $k = i - 1, i - 2, i - 3$ . Вторая часть относится к остальным индексам. Если  $i \leq 3$ , то первая часть состоит из меньшего числа слагаемых.

**Доказательство Леммы 3.** Заметим, что аккуратные оценки при доказательстве Лемм 1 и 2 необходимы для получения *отрицательных* показателей в неравенствах (12) и (13). Аналогичные вычисления проведённые для уравнений (6)–(9)

одновременно обеспечивают (14) и (15) с положительным показателем  $\alpha$ . Тогда существование и единственность решения уравнений (6)–(11) следует из неравенств (14) и (15) стандартным образом.

### Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299.
2. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. М.: ФАЗИС, 1998. 360 с.
3. March T.K., Chapman S.C., Dendy R.O., Merrifield J.A. Off-axis electron cyclotron heating and the sandpile paradigm for transport in tokamak plasmas // Phys. of Plasmas. 2004. Vol. 11. P. 659.
4. Писаренко В.Ф., Родкин М.В. Распределения с тяжелыми хвостами: Приложение к анализу катастроф. М.: ГЕОС, 2007. 240 с.
5. Bershadskii A. and Sreenivasan K.R. Multiscale self-organized criticality and powerful x-ray flares // Eur. Phys. J. B. 2003. Vol. 35. P. 513.
6. Amaral L.A.N., Cizeau P., Gopikrishnan P., Liu Y., Meyer M., Peng C.-K., Stanley H.E. Econophysics: Can statistical physics contribute to the science of economics? // Computer Physics Communications. 1999. Vol. 121–122. P. 145.
7. Шунер В.А. Самоорганизация городского расселения. М.: Наука, 1995. 166 с.
8. Bak P., Tang C., and Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of  $1/f$  noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 381.
9. Dhar D. Theoretical studies of self-organized criticality // Physica A. 2006. Vol. 369. P. 29.
10. Hemmer P.C. and Hansen A. The distribution of simultaneous fiber failures in fiber bundles // ASME J. Appl. Mech. 1992. Vol. 59. P. 909.
11. Hallgass R., Loreto V., Mazzella O., Paladin G., and Pietronero L. Earthquakes statistics and fractal faults // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 1346.
12. Carlson J.M., Langer J.S. Properties of earthquakes generated by fault dynamics // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 2632.
13. Blanter E.M., Shnirman M.G., Le Mouél J.-L., and Allegre C.J. Scaling laws in blocks dynamics and dynamic self-organized criticality // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1997. Vol. 99. P. 295.
14. Dhar D., Majumdar S.N. Abelian sandpile model on the Bethe lattice // J. Physica A. 1990. Vol. 23. P. 4333.
15. Gabrielov A., Newman W.I., Turcotte D.L. An exactly soluble hierarchical clustering model: Inverse cascades, self-similarity, and scaling // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 5293.
16. Strahler A.N. Quantitative analysis of watershed morphology // Trans. Am. Geophys. Union. 1957. Vol. 38. P. 913.
17. Малинецкий Г.Г. Сценарии, стратегические риски, информационные технологии // Информационные технологии и вычислительные системы. 2002. № 4. С. 83.

18. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В., Кузнецов И.В.* Мониторинг, анализ и прогноз опасностей как задачи национальной информационной системы // Информационные технологии и вычислительные системы. 2004. № 4 С. 119.
19. *Bak P.* How nature works: The science of self-organized criticality. New York: Springer-Verlag, Inc. 1996. 205 pp.
20. *Bak P. and Paczuski M.* Complexity, contingency, and criticality // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1995. Vol. 92. P. 6689.
21. *Blanter E.M., Shnirman M.G., Le Mouel J.-L.* Temporal variation of predictability in a hierarchical model of dynamical self-organized criticality // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1999. Vol. 111. P. 317.
22. *Shnirman M.G., Shapoval A.B.* Variable predictability in deterministic dissipative sandpile // Nonlinear Processes in Geophysics. 2010. Vol. 17. P. 85.
23. *Keilis-Borok V.I.* Fundamentals of earthquake prediction: Four paradigms / in V.I. Keilis-Borok and A.A. Soloviev (eds.) Nonlinear dynamics of the lithosphere and earthquake prediction. Springer-Verlag, Heidelberg, 2003. P. 1.
24. *Кузнецов И.В., Родкин М.В., Серебряков Д.В., Урядов О.Б.* Иерархический подход к динамике преступности / В сб. Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение. Часть 1. Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Радиотехника, 2006. P. 103.

*Финансовый университет  
при Правительстве РФ, Москва*

*Поступила в редакцию  
После доработки*

*7.07.2010  
10.01.2011*

## STABILITY OF A STATIONARY CRITICAL STATE IN A MODEL OF CLUSTER FORMATION

*A.B. Shapoval*

The paper considers a self-organized critical process of clusterization. The stability of the equilibrium for infinite system of the differential equations approximating this process is proved.

*Keywords:* Self-organized criticality, clustering, equilibrium, stability.



*Шапвал Александр Борисович* – родился в 1972 году в Киеве, окончил Московский государственный университет (1994). После окончания МГУ работает в Международном институте теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН и Финансовом университете при Правительстве РФ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1999) в области динамических систем. Опубликовал 30 научных статей в реферируемых журналах о качественных свойствах уравнений математической физики, самоорганизованных критических системах, прогнозе экстремальных событий. Автор учебного пособия «Инвестиции: математические методы» (в соавторстве с В.Ю. Поповым).

125468 Москва, Ленинградский пр-т, 49  
Финансовый университет при Правительстве РФ  
E-mail: shapoval@mccme.ru