

## СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ МОД ВНЕШНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ\*

*Е.Н. Перегородова, Н.М. Рыскин, С.А. Усачева*

Исследуется вынужденная синхронизация автоколебательной системы с двумя степенями свободы в случае, когда нет никаких резонансных соотношений между собственными частотами и взаимодействие собственных мод носит чисто энергетический характер (конкуренция мод). Аналитически найдены условия устойчивости режимов одно- и двухчастотных колебаний. Численно исследована структура языков синхронизации на плоскости параметров частота – амплитуда внешнего воздействия и механизмы установления синхронного режима в зависимости от коэффициентов нелинейной связи мод.

*Ключевые слова:* Синхронизация, конкуренция мод, квазипериодические колебания, захват частоты, подавление колебаний, язык синхронизации, асинхронное возбуждение и подавление.

### Введение

В последнее время значительный интерес привлекает проблема синхронизации многочастотных квазипериодических колебаний. На эту тему опубликован ряд работ (см., например, [1–6]), основные результаты даже вошли в учебные пособия [7,8]. Выяснилось, что уже в простейшем случае двухчастотных колебаний процессы взаимодействия между различными собственными модами колебательной системы приводят к появлению ряда принципиальных отличий от известной картины синхронизации в системе с одной степенью свободы [9–19]. Однако в работах [1–6] главным образом рассматривался случай, когда собственные частоты колебательной системы близки друг к другу либо приближенно соотносятся как 1:3. При этом взаимодействие мод носит резонансный характер, то есть в автономной системе происходит образование резонансного предельного цикла на торе, а синхронизация происходит посредством захвата собственных частот внешним сигналом. В работах [4–6] была развита достаточно простая аналитическая теория синхронизации двухчастотных

\*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

колебаний в фазовом приближении, результаты которой хорошо согласуются как с численным моделированием, так и с данными экспериментов.

Однако не исследованным остается случай, когда никаких резонансных соотношений между собственными частотами нет, и взаимодействие собственных мод носит чисто энергетический характер (конкуренция мод). При этом в случае небольшого превышения над порогом генерации, когда колебания можно считать квазигармоническими, применение стандартных асимптотических методов теории колебаний приводит к хорошо известной системе уравнений для комплексных амплитуд мод  $A_{1,2}$  [9,10]

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \lambda_1 \left(1 - |A_1|^2 - \beta_1 |A_2|^2\right) A_1, \\ \dot{A}_2 &= \lambda_2 \left(1 - |A_2|^2 - \beta_2 |A_1|^2\right) A_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\lambda_{1,2}$  – параметры возбуждения соответствующих мод, коэффициенты  $\beta_{1,2}$  характеризуют влияние мод друг на друга и называются коэффициентами нелинейной связи мод. Без ограничения общности можно положить  $\lambda_1 = 1$ , чего всегда можно добиться перенормировкой времени.

Хотя система (1) формально имеет четвертый порядок (так как амплитуды  $A_{1,2}$  являются комплексными), она сводится к системе с одной степенью свободы, поскольку для фаз колебаний  $\varphi_{1,2} = \arg(A_{1,2})$  получаются тривиальные уравнения  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ . Это является следствием чисто энергетического характера взаимодействия.

Напомним основные сведения о динамике системы (1) [9,10]. Она имеет четыре неподвижные точки:

- 1)  $A_1 = A_2 = 0$ ;
- 2)  $|A_1| = 1, A_2 = 0$ ;
- 3)  $A_1 = 0, |A_2| = 1$ ;
- 4)  $|A_1|^2 = \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_1\beta_2}, |A_2|^2 = \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1\beta_2}$ .

Первая соответствует отсутствию колебаний. Поскольку мы рассматриваем случай  $\lambda_{1,2} > 0$ , очевидно, что первая неподвижная точка является неустойчивым узлом. Вторая и третья неподвижные точки отвечают режимам одномодовой генерации. Условия их устойчивости имеют вид  $\beta_2 > 1$  и  $\beta_1 > 1$ , соответственно. Четвертая неподвижная точка отвечает режиму двухмодовой генерации. Она существует лишь в том случае, если параметры  $\beta_1, \beta_2$  одновременно меньше или больше единицы, причем устойчивой эта точка является только при  $\beta_{1,2} < 1$ . Таким образом, возможны четыре типа поведения. При  $\beta_1 < 1, \beta_2 > 1$  и  $\beta_1 > 1, \beta_2 < 1$  реализуются одночастотные режимы генерации первой и второй моды, соответственно. При  $\beta_{1,2} < 1$  наблюдается одновременная генерация обеих мод, то есть режим двухчастотных квазипериодических колебаний. Наконец, при  $\beta_{1,2} > 1$  имеет место мультистабильность, то есть в зависимости от начальных условий устанавливаются колебания либо на первой, либо на второй моде.

Отметим, что задачи о взаимодействии конкурирующих мод имеют большое практическое значение, в частности, для электроники приборов коротковолновых диапазонов (гиротроны, лазеры на свободных электронах и др.), в которых используются принципиально многомодовые пространственно-развитые («сверхразмерные»)

колебательные системы (см., например, [11,12]). Весьма актуальной представляется проблема управления спектром генерации подобных систем, одним из возможных способов решения которой является воздействие внешним синхронизирующим сигналом [11]. В частности, в работе [13] рассматривался вопрос о переключении частоты субмиллиметрового гиротрона, используемого в экспериментах по нагреву плазмы, и было показано, что наиболее быстрое переключение можно осуществить за счет кратковременного воздействия внешним сигналом на частоте соответствующей моды. Таким образом, очевидный интерес представляет задача о синхронизации двухмодовой системы (1) при воздействии на нее внешним гармоническим сигналом, которой посвящена настоящая работа. Следует отметить, что подобная задача рассматривалась ранее рядом авторов [14–16], однако в «докомпьютерную» эпоху не было возможности подробно изучить механизмы установления синхронного режима и построить полную картину синхронизации.

### 1. Режимы синхронизации неавтономного генератора

Рассмотрим модель неавтономного генератора, когда на систему с двумя степенями свободы (1) действует гармонический внешний сигнал. Поскольку считается, что собственные частоты достаточно далеки друг от друга и не связаны какими-либо резонансными соотношениями, достаточно ввести внешнее воздействие лишь в одно из уравнений системы (1), в результате чего она модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \lambda_1 \left[ 1 - |A_1|^2 - \beta_1 |A_2|^2 \right] A_1 + f e^{i\omega t}, \\ \dot{A}_2 &= \lambda_2 \left[ 1 - |A_2|^2 - \beta_2 |A_1|^2 \right] A_2,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $f$  и  $\omega$  – амплитуда и частота внешнего воздействия\*. Далее без ограничения общности будем считать, что  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \lambda$ . Заменой  $A_1 \rightarrow A_1 e^{i\omega t}$  неавтономную систему уравнений (2) можно превратить в автономную:

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 + i\omega A_1 &= \left[ 1 - |A_1|^2 - \beta_1 |A_2|^2 \right] A_1 + f, \\ \dot{A}_2 &= \lambda \left[ 1 - |A_2|^2 - \beta_2 |A_1|^2 \right] A_2.\end{aligned}\tag{3}$$

Режиму синхронизации, то есть одночастотным колебаниям на частоте внешнего воздействия, соответствует неподвижная точка

$$A_1 = A_0 = \text{const}, \quad A_2 = 0.\tag{4}$$

Для нее из уравнений (3) получаем

$$\left( i\omega - 1 + |A_0|^2 \right) |A_0| = f,\tag{5}$$

откуда следует соотношение, позволяющее определить амплитуду колебаний как функцию амплитуды и частоты внешнего воздействия, то есть уравнение резонансных кривых

$$\rho \left( (1 - \rho)^2 + \omega^2 \right) = f^2.\tag{6}$$

\*Точнее говоря,  $\omega$  – отстройка частоты внешнего воздействия от собственной частоты первой моды.

Здесь  $\rho = |A_0^2|$ . Отметим, что уравнение (6) в точности совпадает с соответствующим уравнением для случая синхронизации одномодовой системы [7–10,17,18].

Найдем условия устойчивости режима синхронизации. Зададим малые возмущения стационарного состояния (4):

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + \tilde{a}_1(t), \\ A_2 &= \tilde{a}_2(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив (7) в исходные уравнения (3), после линеаризации получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_1 + i\omega\tilde{a}_1 &= (1 - 2\rho)\tilde{a}_1 - A_0^2\tilde{a}_1, \\ \dot{\tilde{a}}_2 &= \lambda(1 - \beta_2\rho)\tilde{a}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видим, система расщепляется на два независимых уравнения: первое содержит только  $\tilde{a}_1$ , второе – только  $\tilde{a}_2$ . Из первого уравнения следуют два условия неустойчивости, которые полностью совпадают с соответствующими соотношениями, возникающими при решении задачи о синхронизации системы с одной степенью свободы [7–10,17,18]:

$$\rho < \frac{1}{2}, \quad (9)$$

$$\omega^2 + (1 - \rho)(1 - 3\rho) < 0. \quad (10)$$

Напомним, что соотношение (9) дает условие бифуркации Андронова–Хопфа, что соответствует синхронизации через подавление собственных колебаний генератора (синхронизация гашением), а (10) есть условие седлоузловой бифуркации, что соответствует синхронизации посредством захвата частоты [7–10,17–19].

Однако в случае системы с двумя степенями свободы появляется еще один механизм неустойчивости одночастотного режима, связанный с возбуждением второй моды. Как видно из второго уравнения системы (8), условие неустойчивости имеет вид

$$\rho < \frac{1}{\beta_2}. \quad (11)$$

С помощью соотношений (9)–(11) можно построить границы устойчивости на плоскости  $\omega$ ,  $\rho$  и, наложив их на резонансные кривые, определить, какие участки являются устойчивыми, какие – неустойчивыми. Кроме того, используя уравнение резонансных кривых (6), можно построить язык синхронизации – границу устойчивости на плоскости параметров  $\omega$ ,  $f$ .

На рис. 1 в левой колонке представлены резонансные кривые с наложенными на них областями неустойчивости. Белый цвет соответствует устойчивому синхронному режиму, различными оттенками серого окрашены области неустойчивости. Темно-серым закрашена область, удовлетворяющая неравенству (10), при выходе из нее происходит захват частоты первой моды. Горизонтальная прямая на уровне  $\rho = 1/2$  есть граница подавления первой моды (неравенство (9)). Штриховой линией показана граница подавления второй моды (неравенство (11)). В правой колонке представлены соответствующие языки синхронизации. Показаны границы захвата

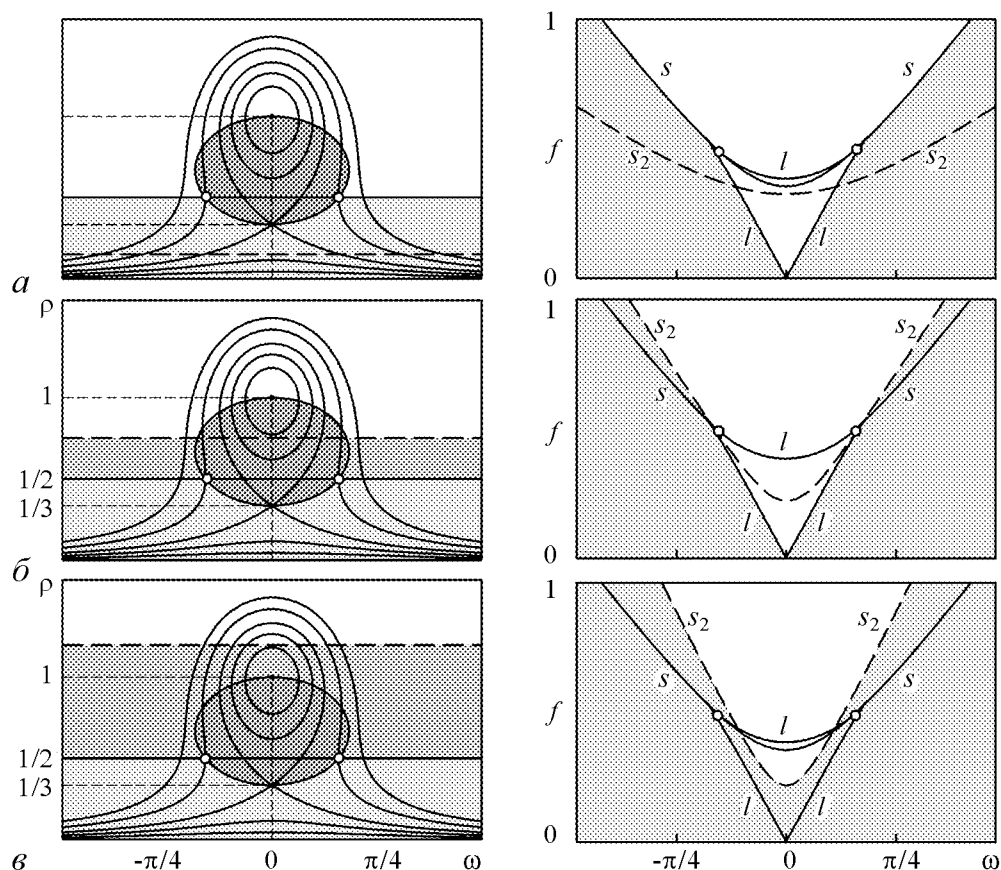


Рис. 1. Резонансные кривые (левая колонка) и языки синхронизации (правая колонка) для  $\beta_2 > 2$  (а),  $1 < \beta_2 < 2$  (б),  $\beta_2 < 1$  (в). Светлые кружки – точки Богданова–Такенса

(кривая  $l$ ) и подавления ( $s$ ) первой моды, а также граница подавления второй моды  $s_2$  (штриховая линия). Белыми кружками показаны точки Богданова–Такенса, в которых касаются друг друга границы захвата и подавления частоты [8].

Очевидно, что возможны три ситуации. Если  $\beta_2 > 2$  (рис. 1, а), граница подавления второй моды лежит ниже соответствующей границы для первой моды. В этом случае присутствие второй моды по существу не влияет на процессы синхронизации. Картина резонансных кривых и язык синхронизации выглядят точно так же, как и для системы с одной степенью свободы [7–10,17,18].

В случае, когда  $1 < \beta_2 < 2$  (рис. 1, б), граница области синхронизации частично определяется захватом частоты первой моды, частично – подавлением второй моды. Заметим, что подавление осуществляется воздействием на частоте, далекой от собственной частоты второй моды. Поэтому, следуя [10], будем называть данный эффект асинхронным подавлением.

Наконец, при  $\beta_2 < 1$  (рис. 1, в) границей области синхронизации является только кривая  $s_2$  – граница асинхронного подавления второй моды. При этом язык синхронизации отрывается от горизонтальной оси, то есть появляется порог синхронизации. Действительно, при  $\beta_2 < 1$  в автономном генераторе реализуется либо режим генерации второй моды, либо режим двухчастотной генерации, так что при  $f \rightarrow 0$  установление синхронного режима невозможно.

## 2. Двухмодовый режим и условия его устойчивости

Для полноты картины следует рассмотреть режим генерации двух мод. Ему отвечает неподвижная точка системы (3) вида  $A_1 = A_{10}$ ,  $A_2 = A_{20}$ , где константы  $A_{10}$ ,  $A_{20}$  не равны нулю. Тогда из уравнений (3) получаем

$$\begin{aligned} (i\omega - (1 - \rho_1 - \beta_1\rho_2)) A_{10} &= f, \\ \lambda(1 - \rho_2 - \beta_2\rho_1) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\rho_{1,2}$  – квадрат модуля соответствующей амплитуды.

Из второго уравнения системы следует, что

$$\rho_2 = 1 - \beta_2\rho_1. \quad (13)$$

Поскольку  $\rho_2$  – величина неотрицательная, двухмодовый режим существует, только если выполняется условие  $\rho_1 < 1/\beta_2$ , что в точности совпадает с полученным выше условием возбуждения второй моды (11).

Подставив (13) в первое уравнение системы (12), найдем уравнение резонансных кривых

$$f^2 = \rho_1 \left( \omega^2 + (1 - \beta_1 - (1 - \beta_1\beta_2)\rho_1)^2 \right) = \rho_1 \left( \omega^2 + (1 - \beta_1\beta_2)^2 (\rho_0 - \rho_1)^2 \right). \quad (14)$$

По структуре оно аналогично уравнению резонансных кривых для одномодового режима (6). Здесь

$$\rho_0 = \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_1\beta_2}$$

– квадрат амплитуды двухмодовой генерации в автономном генераторе.

Исследуем неподвижную точку на устойчивость. Зададим малые возмущения

$$A_1 = A_{10} + \tilde{a}_1(t), \quad A_2 = A_{20} + \tilde{a}_2(t),$$

подставим в (3) и линеаризуем. Получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_1 + i\omega\tilde{a}_1 &= (1 - 2\rho_1)\tilde{a}_1 - A_{10}^2\tilde{a}_1^* - \beta_1\rho_2\tilde{a}_1 - \beta_1A_{10}A_{20}^*\tilde{a}_2 - \beta_1A_{10}A_{20}\tilde{a}_2^*, \\ \dot{\tilde{a}}_2 &= \lambda(1 - 2\rho_2 - \beta_2\rho_1)\tilde{a}_2 - \lambda A_{20}^2\tilde{a}_2^* - \lambda\beta_2A_{20}(A_{10}^*\tilde{a}_1 + A_{10}\tilde{a}_1^*). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь знак «\*» означает комплексное сопряжение. Отметим, что величины  $a_2$  и  $A_{20}$  можно без ограничения общности считать вещественными. Тогда система (15) упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_1 + i\omega\tilde{a}_1 &= (1 - 2\rho_1 - \beta_1\rho_2)\tilde{a}_1 - A_{10}^2\tilde{a}_1^* - 2\beta_1A_{10}A_{20}\tilde{a}_2, \\ \dot{\tilde{a}}_2 &= \lambda(1 - 3\rho_2 - \beta_2\rho_1)\tilde{a}_2 - \lambda\beta_2A_{20}(A_{10}^*\tilde{a}_1 + A_{10}\tilde{a}_1^*). \end{aligned} \quad (16)$$

Будем искать решения системы (16) в виде  $\tilde{a}_{1,2} \sim \exp(pt)$  и исключим  $\rho_2$  с помощью уравнения (13). Получим

$$\begin{aligned} [p + i\omega - (1 - \beta_1 - (2 - \beta_1\beta_2)\rho_1)]\tilde{a}_1 + A_{10}^2\tilde{a}_1^* + 2\beta_1A_{10}A_{20}\tilde{a}_2 &= 0, \\ [p + 2\lambda(1 - \beta_2\rho_1)]\tilde{a}_2 + \lambda\beta_2A_{20}(A_{10}^*\tilde{a}_1 + A_{10}\tilde{a}_1^*) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Добавив к системе (17) уравнение, комплексно-сопряженное первому, из условия совместности получаем характеристическое уравнение третьего порядка

$$\left( (p - \Delta)^2 - \rho_1^2 + \omega^2 \right) (p + 2\lambda\rho_2) - 4\lambda\beta_1\beta_2\rho_1 (1 - \beta_2\rho_1) (p - \Delta - \rho_1) = 0, \quad (18)$$

где введено обозначение  $\Delta = 1 - \beta_1 - (2 - \beta_1\beta_2)\rho_1$ . Отметим, что, если положить в (18)  $\beta_{1,2} = 0$ , оно превратится в характеристическое уравнение для синхронизации системы с одной степенью свободы. Уравнение (18) можно окончательно переписать следующим образом:

$$p^3 + ap^2 + bp + c = 0, \quad (19)$$

где

$$a = 2(\lambda(1 - \beta_2\rho_1) - \Delta),$$

$$b = \omega^2 + \Delta^2 - \rho_1^2 - 4\lambda(1 - \beta_2\rho_1)(\Delta + \beta_1\beta_2\rho_1),$$

$$c = 2\lambda(1 - \beta_2\rho_1) [\omega^2 + (\Delta + \rho_1)(\Delta - \rho_1 + 2\beta_1\beta_2\rho_1)].$$

Поскольку на границе устойчивости характеристический показатель  $p$  является чисто мнимым, положим  $p = i\Omega$ , подставим в уравнение (19) и разделим его на два вещественных уравнения:

$$\begin{aligned} \Omega^3 &= \Omega b, \\ a\Omega^2 &= c. \end{aligned} \quad (20)$$

Первое уравнение системы (20) имеет очевидное решение  $\Omega = 0$ . Тогда из второго уравнения следует, что

$$c = 0. \quad (21)$$

Это решение соответствует условию седлоузловой бифуркации или захвата частоты первой моды внешним сигналом в присутствии второй (действительно, при этом период биений обращается в бесконечность). Если же  $\Omega \neq 0$ , то из первого уравнения (20) следует, что  $\Omega^2 = b$ , тогда из второго уравнения находим

$$ab = c. \quad (22)$$

Это есть условие бифуркации Андронова–Хопфа, то есть условие подавления собственных колебаний первой моды в присутствии второй. Очевидно, что одновременно должны также выполняться условия  $a > 0$ ,  $b > 0$ ; таким образом, найденные соотношения совпадают с условиями устойчивости для системы третьего порядка, следующими из известного критерия Рауса–Гурвица [9,20].

Отметим, что аналогичные аналитические условия устойчивости одно- и двух-частотного режима были получены ранее в [15,16]. В дальнейшем мы сопоставим их с результатами численного моделирования исходных уравнений (2).

### 3. Результаты численного моделирования

**3.1. Воздействие на генератор в режиме одномодовой генерации.** Рассмотрим вначале ситуацию, когда в автономном генераторе устанавливаются колебания на первой моде ( $\beta_1 < 1$ ,  $\beta_2 > 1$ ). Выберем для определенности следующие

значения параметров:  $\beta_1 = 0.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$ ,  $\lambda = 1$ . Случай  $\beta_2 > 2$  рассматривать нет необходимости, так как при этом вторая мода не возбуждается ни при каких условиях.

При небольшой отстройке частоты внешнего воздействия от собственной частоты первой моды наблюдается классический сценарий захвата частоты, подробно описанный в литературе [7–10,17–19]. При малой амплитуде воздействия наблюдаются двухчастотные квазипериодические колебания, в спектре которых присутствуют частота воздействия и собственная частота первой моды, то есть классический режим биений. Далее будем называть его двухчастотным режимом I типа. С увеличением  $f$  амплитуда биений возрастает, а их период увеличивается; при этом спектральная составляющая на собственной частоте приближается к частоте внешнего воздействия. Спектр обогащается комбинационными частотами, а зависимость амплитуды сигнала от времени приобретает вид релаксационных колебаний. При дальнейшем увеличении амплитуды воздействия происходит захват частоты, после чего возникает режим одночастотных колебаний с постоянной амплитудой. Поскольку возбуждение второй моды в данном случае не происходит, поведение полностью аналогично случаю системы с одной степенью свободы, так что мы не приводим соответствующие иллюстрации.

При большей отстройке частоты внешнего воздействия  $\omega$  наблюдается более сложная картина, которую иллюстрирует рис. 2, где построены зависимости амплитуд колебаний от времени и их спектры при различных значениях амплитуды внешнего воздействия  $f$ . Спектры нормированы на компоненту в спектре колебаний первой моды, имеющую максимальную интенсивность.

При малой амплитуде внешнего воздействия наблюдается двухчастотный режим I типа, а колебания второй моды, как и в предыдущем случае, затухают (рис. 2, *a*). Отметим, что затухание второй моды носит длительный и достаточно сложный характер. Спектр колебаний второй моды на рис. 2, *a* напоминает спектр модулированных колебаний, причем частота модуляции равна разности частот первой моды и внешнего воздействия. Однако в действительности это спектр затухающего переходного процесса, модулированного колебаниями первой моды: как видно, интенсивность максимальной компоненты второй моды примерно на 30 дБ меньше, чем у первой моды, и уменьшается с увеличением времени счета.

С ростом  $f$  происходит возбуждение второй моды, то есть осуществляется переход к трехчастотному режиму (рис. 2, *б*). Это происходит потому, что, как показано в разд. 1, первая мода подавляет вторую в процессе конкуренции, то есть нелинейного амплитудного взаимодействия мод. Воздействие внешней силы на частоте, достаточно удаленной от собственной частоты первой моды, уменьшает ее амплитуду, и подавление второй моды становится невозможным. Поскольку вторая мода возбуждается за счет воздействия сигнала на частоте, близкой к частоте первой моды, этот эффект называют асинхронным возбуждением [10].

При дальнейшем увеличении амплитуды внешнего воздействия амплитуда собственных колебаний первой моды уменьшается, а второй – увеличивается, соответственно ведут себя амплитуды биений (рис. 2, *в*). Затем внешнее воздействие полностью подавляет собственные колебания первой моды (рис. 2, *г*). Режим вновь становится двухчастотным, однако, если ранее в спектре присутствовали частота внешнего воздействия и собственная частота первой моды (рис. 2, *a*), то теперь это



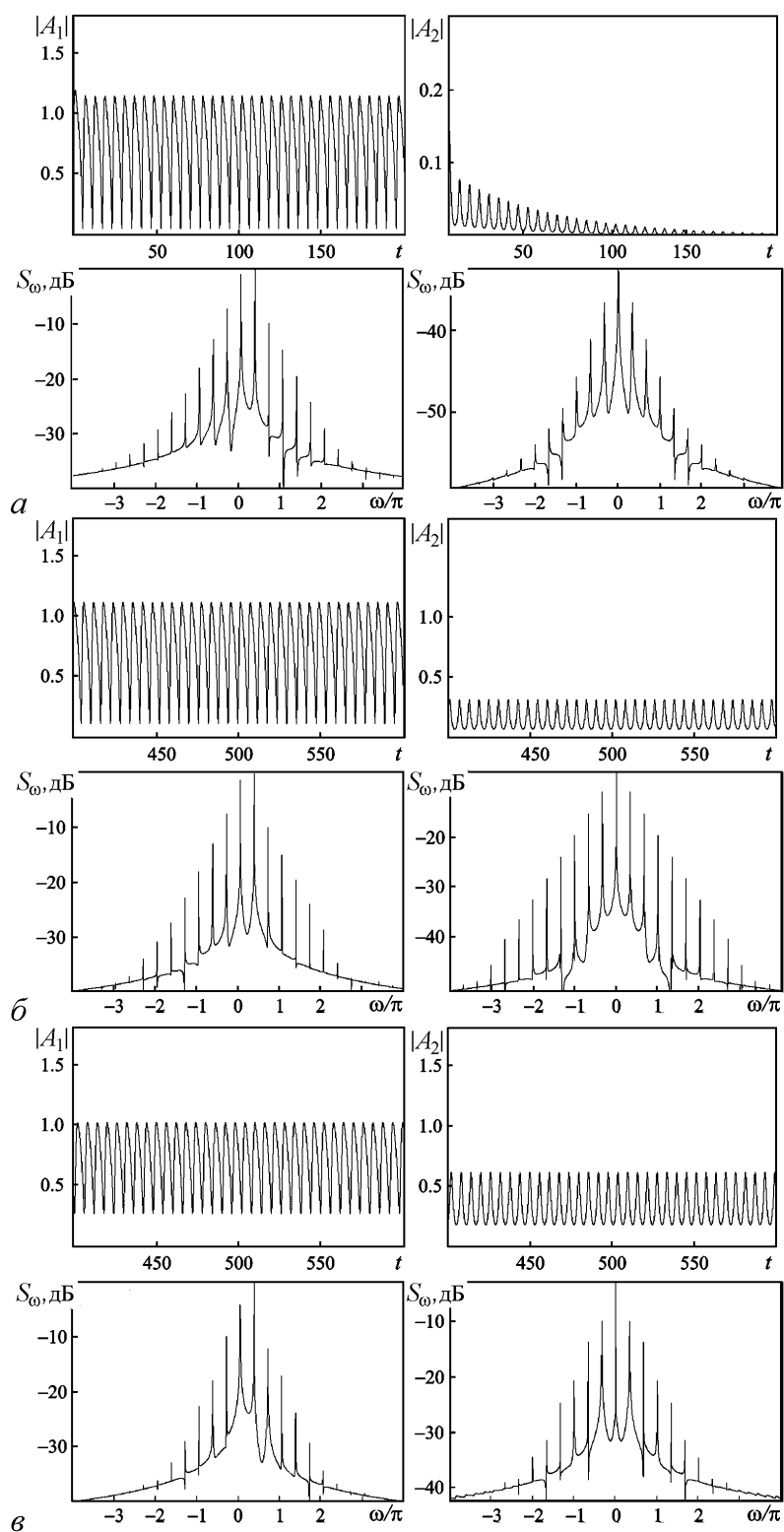


Рис. 2. Зависимости амплитуд колебаний от времени и соответствующие спектры при  $\beta_1 = 0.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 0.4\pi$ ;  $f=0.86$  (а),  $0.87$  (б),  $0.89$  (в)

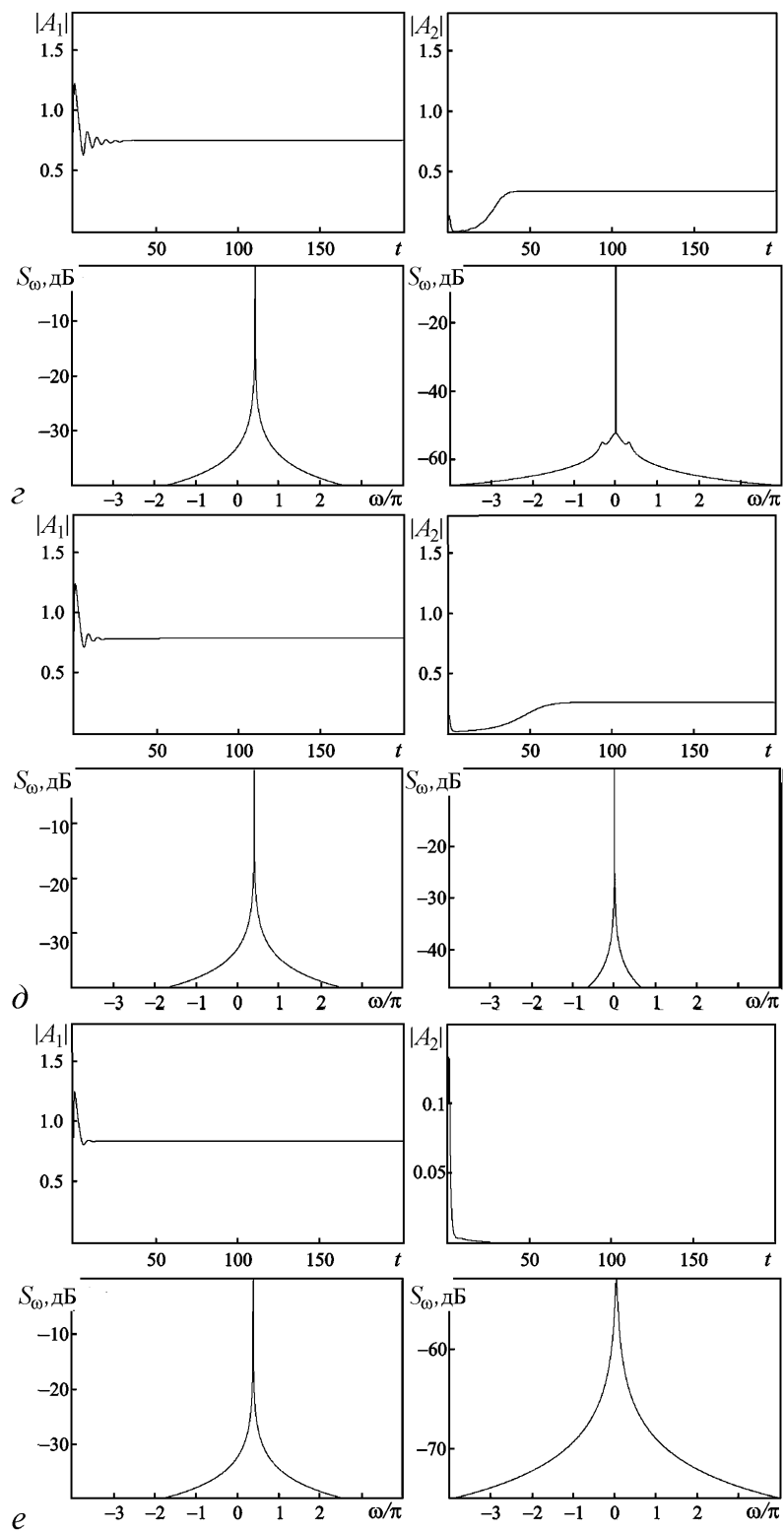


Рис. 2 (Продолжение)  $f=1.0$  (z), 1.03 (d), 1.09 (e)

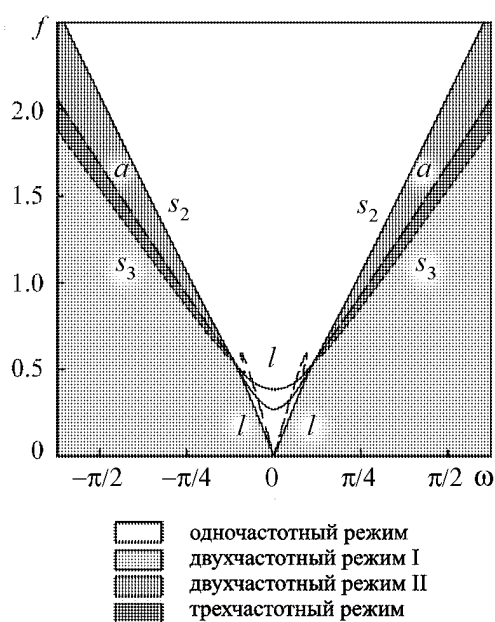


Рис. 3. Разбиение плоскости параметров  $f, \omega$  на области различных режимов при  $\lambda = 1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 1.5$

плоскости параметров  $f, \omega$  на области различных режимов. Отметим, что результаты численного моделирования полностью согласуются с теоретическими (разд. 1,2). Язык синхронизации, то есть область одночастотного режима, имеет тот же вид, что и на рис. 1, б. Он образован линией захвата частоты первой моды  $l$ , которая определяется соотношениями (6), (10), и линией асинхронного подавления второй моды  $s_2$ , которая задается соотношениями (6), (11). Однако картина является более сложной, чем показанная на рис. 1, б, так как с боков к языку синхронизации подходят области трехчастотного режима. Верхняя граница этих областей (линия  $a$ ) определяется условием (22). Нижняя граница – линия асинхронного возбуждения  $s_3$  – может быть получена только численно, так как возникновение трехчастотного режима не связано с бифуркацией неподвижной точки.

Случай  $\beta_1 > 1, \beta_2 < 1$ , когда в автономной системе генерируется вторая мода, нет необходимости рассматривать подробно. Поскольку в этом случае собственные колебания первой моды вообще не возбуждаются, картина на плоскости параметров  $f, \omega$  аналогична представленной на рис. 1, в. Границей языка синхронизации служит линия асинхронного подавления второй моды  $s_2$ . Ниже этой линии реализуется двухчастотный квазипериодический режим II типа, а трехчастотные режимы не наблюдаются.

**3.2. Воздействие на генератор в двухмодовом режиме.** Теперь рассмотрим ситуацию, когда в автономном генераторе устанавливается двухмодовый режим ( $\beta_{1,2} < 1$ ). Выберем следующие значения параметров:  $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5, \lambda = 1$ . Поскольку в этом случае воздействие осуществляется на систему, генерирующую двухчастотные колебания, при малой амплитуде воздействия колебания становятся трехчастотными. Сценарий перехода в режим синхронизации следующий: вначале, в зависимости от  $\omega$ , происходит либо захват, либо подавление собственных колебаний

частота внешнего воздействия и собственная частота второй моды. Будем называть этот режим двухчастотным режимом II типа. Условия его устойчивости были рассмотрены в разд. 2.

Последующее увеличение  $f$  приводит к подавлению колебаний второй моды (рис. 2, д,е) и переходу в одночастотный синхронный режим, что согласуется с результатами разд. 1. Следуя [10], будем называть этот эффект асинхронным подавлением.

Заметим, что спектр колебаний второй моды на рис. 2, е напоминает спектр квазигармонических колебаний. Однако в действительности это вновь, как и на рис. 2, а, спектр затухающего переходного процесса.

Общую картину иллюстрирует рис. 3, на котором показано разбиение

первой моды и колебания становятся двухчастотными. Дальнейшее увеличение  $f$  приводит к асинхронному подавлению колебаний второй моды.

На рис. 4 показано разбиение плоскости параметров  $f, \omega$  на области различных режимов. Область двухчастотного режима ограничена снизу линиями  $a$  и  $c$  (соотношения (22) и (21), соответственно), а сверху – линией подавления второй моды. Таким образом, область синхронизации отрывается от горизонтальной оси, что согласуется с рис. 1, *в*. Двухчастотный режим I типа в данном случае отсутствует.

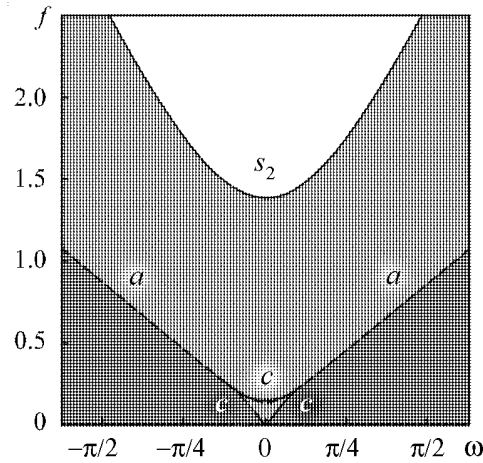


Рис. 4. Разбиение плоскости параметров  $f, \omega$  на области различных режимов при  $\lambda = 1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5$

**3.3. Воздействие на генератор в режиме мультистабильности.** Наконец, рассмотрим воздействие на генератор при  $\beta_{1,2} > 1$ , когда имеет место мультистабильность, что представляет особый интерес в связи с задачами управления частотой многомодовых генераторов. Именно этот случай рассматривался в [13], где обсуждалась возможность переключения частоты генерации гиротрона за счет кратковременного воздействия внешним сигналом на частоте соответствующей моды.

Здесь следует выделить две ситуации, а именно, когда  $1 < \beta_2 < 2$  и  $\beta_2 > 2$ . Более сложное поведение наблюдается в первом случае. Поскольку при наличии мультистабильности характер установившегося режима зависит от начальных условий, расчеты будем проводить, плавно увеличивая  $f$  с наследованием начальных условий. Рассмотрим вначале случай, когда до включения внешнего воздействия в системе установилась первая мода колебаний (рис. 5, *а*). Тогда внешнее воздействие приведет к возникновению двухчастотного режима типа I. При малых расстрой-

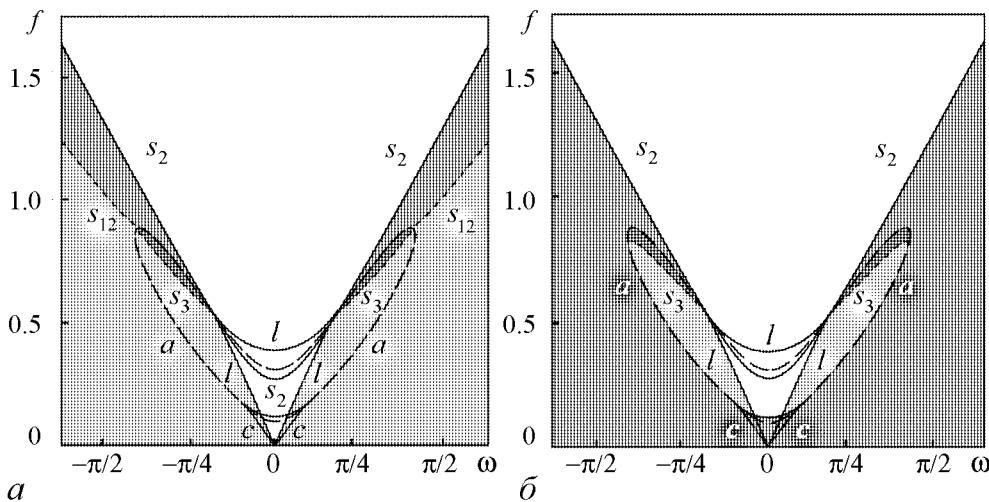


Рис. 5. Разбиение плоскости параметров  $f, \omega$  на области различных режимов при  $\lambda = 1, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1.5$  Воздействие осуществляется на систему в режиме генерации первой (*а*) и второй (*б*) моды

ках синхронизация происходит через захват частоты первой моды. С увеличением расстройки переходу в синхронный режим предшествует асинхронное возбуждение второй моды, поскольку внешнее воздействие приводит к уменьшению амплитуды собственных колебаний. Однако асинхронное возбуждение может происходить двумя различными способами. Внутри области, ограниченной линией  $a$ , асинхронное возбуждение происходит мягко и возникает трехчастотный режим (линия  $s_3$ ). При выходе из области, ограниченной линией  $a$ , происходит подавление собственных колебаний первой моды, то есть переход в двухчастотный режим II типа. При дальнейшем увеличении амплитуды воздействия произойдет подавление второй моды. Если же значения  $\omega$  будут выбраны вне области, ограниченной линией  $a$ , то при пересечении линии  $s_{12}$  происходит жесткий переход между двухчастотными режимами I и II типов (рис. 6); при этом трехчастотный режим отсутствует.

Если воздействие осуществляется на генератор, в котором установилась вторая мода колебаний, то разбиение плоскости параметров  $\omega, f$  на области различных режимов приобретет несколько иной вид (рис. 5, б). При любой частоте воздействия вначале возникает двухчастотный режим II типа. При малых  $\omega$  синхронизация наступает при переходе через верхнюю границу области, ограниченной линией  $c$  (условие (21)). Отметим, что, если воздействие осуществляется точно на собственной частоте первой моды, то есть  $\omega = 0$ , то

$$\rho_1 = \frac{1 - \beta_1}{3(1 - \beta_1\beta_2)}.$$

Тогда с учетом (14) можно найти аналитическое выражение для амплитуды воздействия, при которой происходит переключение мод

$$f^2 = \frac{4}{27} \cdot \frac{(1 - \beta_1)^3}{1 - \beta_1\beta_2}.$$

Расчет по этой формуле полностью согласуется с результатами, полученными в [13] путем численного моделирования.

При больших расстройках, когда мы попадаем внутрь области, ограниченной линией  $a$ , происходит жесткий переход к режиму биений, а затем повторяется тот

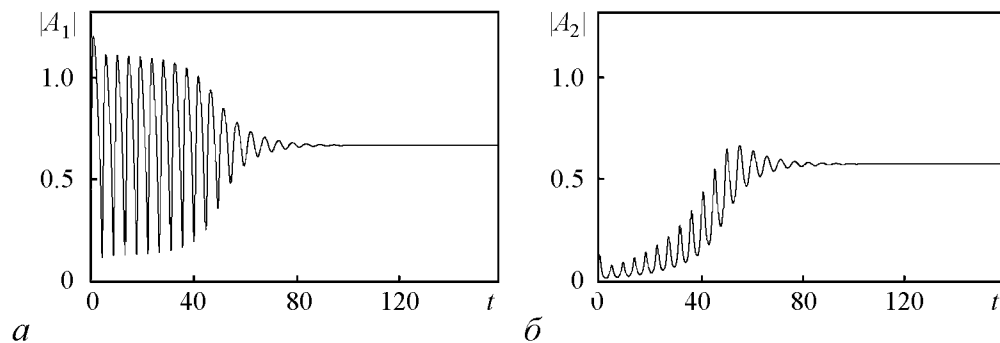


Рис. 6. Зависимости амплитуд колебаний от времени, иллюстрирующие жесткий переход между двухчастотными режимами I и II типа ( $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 0.5\pi$ ,  $f=1.05$ )

же сценарий, что и в предыдущем случае. Если же двигаться по плоскости параметров, обходя область, ограниченную кривой  $a$ , то единственной бифуркацией будет асинхронное подавление второй моды.

Таким образом, мультистабильность, имеющая место в автономной системе, сохраняется и в неавтономном случае в определенном диапазоне параметров. Сопоставление рис. 6,  $a$  и  $b$  наглядно демонстрирует область, в которой имеет место мультистабильность.

Более простая ситуация реализуется в случае  $\beta_2 > 2$ . Если до включения воздействия в генераторе установились колебания первой моды, то, как следует из результатов разд. 1, возбуждение второй моды при этом вообще не должно происходить, и картина на плоскости параметров  $\omega, f$  имеет тот же вид, что и на рис. 1,  $a$ .

Если же воздействие осуществляется на систему в режиме генерации второй моды, то вначале устанавливается двухчастотный режим типа II, а с увеличением  $f$  происходит жесткий переход к режиму типа I, после чего динамика носит тот же характер, что и в предыдущем случае. Пример разбиения плоскости параметров на области различных режимов приведен на рис. 7.

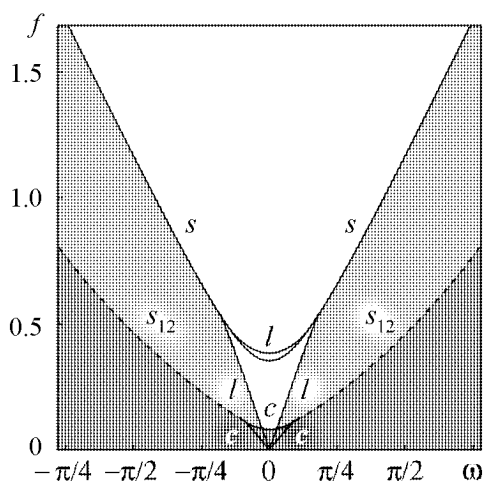


Рис. 7. Разбиение плоскости параметров  $f, \omega$  на области различных режимов при  $\lambda = 1, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 2.5$ . Воздействие осуществляется на систему в режиме генерации второй моды

### Заключение

В данной работе изучена вынужденная синхронизация генератора с двумя степенями свободы, в случае, когда никаких резонансных соотношений между собственными частотами нет, и взаимодействие носит чисто энергетический характер (конкуренция мод). Найлены аналитические условия устойчивости одночастотного (синхронного) режима и двухчастотного режима. Достаточно полная картина неавтономной динамики двухмодового генератора была получена за счет сочетания аналитических методов исследования и численного моделирования. Наряду с классическим режимом биений, в данном случае возможен еще один тип двухчастотного квазипериодического режима, когда в спектре колебаний присутствуют частота внешнего воздействия и собственная частота второй моды. Переходы между этими двумя режимами происходят либо жестко, либо мягко в результате образования трехчастотного режима и его последующего исчезновения.

Результаты численного моделирования полностью согласуются с теоретическими, а также позволяют установить наличие ряда интересных эффектов. Так, если внешний сигнал воздействует на систему в режиме одномодовой генерации, то при не слишком больших значениях коэффициента нелинейной связи ( $1 < \beta_2 < 2$ ) переходу в синхронный режим предшествует асинхронное возбуждение второй моды, которая в автономном генераторе не возбуждается. На плоскости параметров

частота – амплитуда внешнего воздействия появляются области трехчастотных квазипериодических колебаний, примыкающих к языку синхронизации. Далее увеличение амплитуды воздействия приводит к подавлению сначала собственных колебаний первой моды, а затем – второй моды.

При воздействии на систему в режиме двухмодовой генерации вначале происходит либо захват, либо подавление собственных колебаний первой моды, а затем – асинхронное подавление второй моды. Переход в режим синхронизации в этом случае носит пороговый характер.

Наиболее сложное поведение наблюдается, когда в автономной системе имеет место бистабильность. Картина режимов неавтономной динамики также зависит от начальных условий. Наблюдаются жесткие переходы между квазипериодическими режимами различных типов.

Полученные результаты дополняют теорию синхронизации колебаний в многомодовых системах, развитую в работах [1–8]. В дальнейшем предполагается исследовать синхронизацию более сложных многочастотных режимов, в частности, при наличии различных резонансов.

Авторы благодарят Г.С. Нусиновича за интерес к работе и полезные замечания.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 11-02-01411) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/1738). Н.М. Рыскин также благодарит фонд некоммерческих программ «Династия».*

#### **Библиографический список**

1. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. 046216.
2. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: synchronization of quasiperiodic motions // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 73. 056202.
3. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
4. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5, № 2. С. 237-252.
5. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // *Письма в ЖТФ.* 2010. Т. 36, № 10. С. 73.
6. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 4. С. 33.
7. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* Лекции по нелинейной динамике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2010.
8. *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация в задачах. Саратов: ООО Издательский центр «Наука». 2010.

9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука. 1984.
10. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит., 1997.
11. Nusinovich G.S. Review of the theory of mode interaction in gyrodevices // IEEE Trans. Plasma Sci. 1999. Vol. 27, No. 2. P. 313.
12. Гинзбург Н.С., Петелин М.И. Конкуренция и кооперация мод в лазерах на свободных электронах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 6. С. 3.
13. Nusinovich G.S., Sinitsyn O.V., Antonsen T.M. Mode switching in a gyrotron with azimuthally corrugated resonator // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98, № 20. 205101.
14. Берштейн И., Иконников Е. К математической теории вынужденных колебаний в автоколебательных системах с двумя степенями свободы // ЖТФ. 1934. Т. 4, № 1. С. 172.
15. Нусинович Г.С. К теории синхронизации многомодовых электронных СВЧ генераторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 11. С. 1689.
16. Мельникова В.А., Тарантович В.М. Конкуренция мод и режимы захвата автогенератора // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 8. С. 1156.
17. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
18. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
19. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005.
20. Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию  
После доработки*

*13.01.2011  
31.03.2011*

## **SYNCHRONIZATION OF THE SYSTEM OF TWO COMPETING MODES BY EXTERNAL HARMONIC SIGNAL**

*E.N. Peregorodova, N.M. Ryskin, S.A. Usacheva*

Forced synchronization of self-oscillating system with two degrees of freedom is studied in the case when there are no resonance relations between eigenfrequencies and interaction of the modes has the form of mode competition. Stability conditions for the regimes of one- and two-frequency oscillations are obtained analytically. The structure of synchronization tongues on the frequency–amplitude of external driving parameters plane is studied numerically. Mechanisms of establishing of the synchronous regime are considered depending on coefficients of non-linear mode coupling.

*Keywords:* Synchronization, mode competition, quasi-periodic oscillations, frequency locking, oscillation suppression, synchronization tongues, asynchronous excitation and suppression.





*Перегородова Екатерина Николаевна* – родилась в Саратове (1990). Обучается на 4 курсе факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета по специальности «Физика открытых нелинейных систем». Область научных интересов – синхронизация многомодовых нелинейных динамических систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: jinkss@yandex.ru



*Рыскин Никита Михайлович* – родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru



*Усачева Светлана Александровна* – родилась в Саратове (1987), окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2009). Аспирант факультета нелинейных процессов СГУ по специальности «Радиофизика». Область научных интересов – нелинейная динамика многомодовых автоколебательных систем, в том числе, распределенных систем с запаздыванием.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: usasva@mail.ru