



О КВАЗИСИНХРОННЫХ РЕЖИМАХ В СИСТЕМЕ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ФИЛЬТРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ УЧЕТЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ*

Г.М. Бакунов, В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев

Для типовой системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка и запаздыванием изучаются условия возникновения и характеристики регулярных и хаотических автомодуляционных режимов.

Ключевые слова: Фазовые системы, фазовая автоподстройка частоты, динамические режимы, автомодуляционные колебания, синхронизация, бифуркации.

Введение

Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) широко применяются в радиофизике, радиосвязи, радиолокации – в частности, в устройствах передачи и приема сигналов. Теория таких систем для регулярных сигналов достаточно хорошо развита [1]. В фазовом пространстве системы режиму синхронизации соответствует устойчивое состояние равновесия. В работах [2,3] на основе аналитических методов было показано, что учет запаздывания в цепи управления системы ФАП с наиболее простым интегрирующим фильтром первого порядка может приводить к нарушению устойчивости состояния равновесия и возникновению около него устойчивого предельного цикла. В этом случае в системе ФАП устанавливается квазисинхронный режим, при котором колебания с выхода генератора ФАП являются колебаниями с периодической угловой модуляцией и стабилизированной (по опорной частоте) центральной частотой. Детальный анализ таких автомодуляционных колебаний в системе ФАП с интегрирующим RC-фильтром в цепи управления проведен в работе [4] с использованием методов компьютерного моделирования. В частности, исследованы зависимости периода и глубины модуляции автомодуляционных колебаний от параметров системы (величины запаздывания, характеристик фильтра).

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4-9 октября, 2010.

В последнее время в связи с задачами передачи информации с использованием хаотических сигналов представляют интерес режимы динамического хаоса в системах ФАП [5,6]. В фазовом пространстве таким режимам соответствуют хаотические аттракторы. Количественное исследование характеристик хаотических аттракторов и бифуркаций, приводящих к их возникновению, требует, как правило, привлечения методов компьютерного моделирования. В частности, с помощью таких методов в работе [7] было показано, что наличие более сложного фильтра в цепи управления ФАП (второго порядка) приводит, даже без учета запаздывания, к нарушению устойчивости состояния равновесия и возникновению в фазовом пространстве предельного цикла, который в результате каскада бифуркаций удвоения периода может переходить в хаотический аттрактор.

Настоящая работа посвящена исследованию особенностей возникновения автомодуляционных режимов в случае, когда присутствуют оба вышеуказанных фактора: сложный фильтр в цепи управления и запаздывание.

1. Математическая модель

Базовая математическая модель типовой системы ФАП может быть представлена следующим операторным уравнением [1]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma, \quad (1)$$

где φ – разность фаз колебаний управляемого и опорного генераторов, Ω – максимальная расстройка по частоте, которая может быть скомпенсирована цепью управления, $\gamma = \Omega_H/\Omega$ – относительная начальная частотная расстройка подстраиваемого и опорного генераторов, $F(\varphi)$ – нормированная нелинейная характеристика фазового дискриминатора, $K(p)$ – коэффициент передачи фильтра ($p \equiv d/dt$).

При приближенном учете запаздывания в цепи управления ($e^{-T_3 p} \approx 1 - T_3 p$, где T_3 – время запаздывания) уравнение (1) можно записать в виде [3]

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)(1 - T_3 p)F(\varphi) = \gamma. \quad (2)$$

Будем рассматривать в (2) фильтр второго порядка с передаточной функцией вида $K(p) = (1 + ap + bp^2)^{-1}$ и $F(\varphi) = \sin \varphi$. Переходя в (2) к дифференциальной форме и вводя безразмерные время $\tau = \Omega t$ и параметры $\mu = \Omega^2 b$, $\varepsilon = \Omega a$, $d = T_3/a$, получаем из (2) систему дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \mu \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi - (1 - d\varepsilon \cos \varphi)y - \varepsilon z, \quad (3)$$

определенную в цилиндрическом фазовом пространстве $U = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), y, z\}$.

2. Структура пространства параметров

На рис. 1, а приведено сечение (ε, γ) пространства параметров $(\gamma, \varepsilon, \mu, d)$ системы (3) для $\mu = 0.5$, $d = 0.6$, построенное методом компьютерного моделирования с использованием пакета [8]. В пространстве параметров выделены следующие

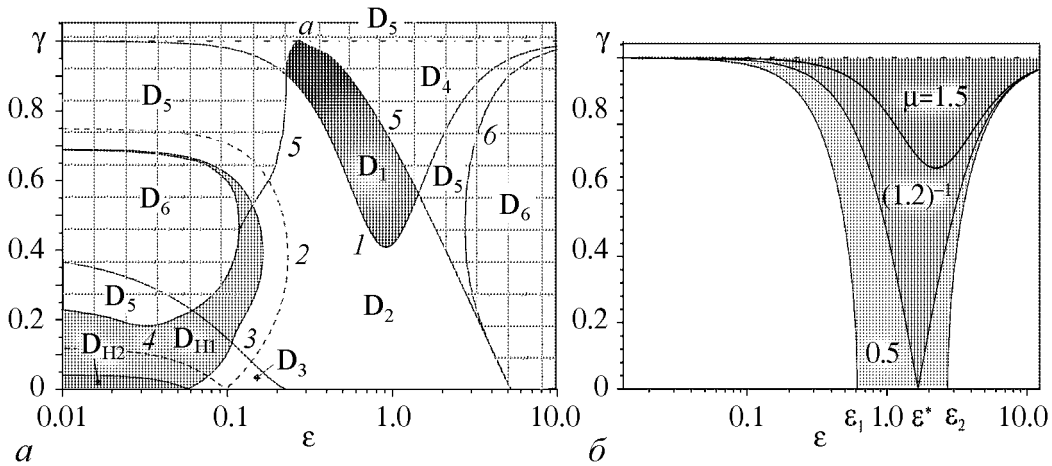


Рис. 1. *a* – структура пространства параметров модели (3) при $\mu = 0.5, d = 0.6$; *б* – эволюция областей устойчивости синхронного режима модели ФАП с фильтром второго порядка и малым запаздыванием при изменении μ в случае $d = 0.3$

области: область захвата в режим синхронизации D_1 , области захвата в режим регулярной квазисинхронизации D_2, D_3 , области существования режимов хаотической квазисинхронизации D_{H1} и D_{H2} , области существования режима биений D_4, D_5, D_6 .

Область D_1 – область глобальной устойчивости режима синхронизации. В этой области параметров все фазовые траектории модели (3) асимптотически стремятся к устойчивому состоянию равновесия O_1 с координатами $\varphi^* = \arcsin \gamma, y^* = 0, z^* = 0$, определяющему режим синхронизации колебаний управляемого генератора опорным сигналом. В режиме синхронизации частоты колебаний совпадают, однако имеет место стационарное рассогласование колебаний по фазе, равное φ^* .

Область D_2 – область глобальной устойчивости режима регулярной квазисинхронизации. В этой области параметров все фазовые траектории модели (3) стремятся к устойчивому колебательному предельному циклу $L_{01}^{(k)}$, где k характеризует кратность цикла. Цикл $L_{01}^{(k)}$ соответствует режиму регулярной квазисинхронизации, в котором на выходе ФАП имеют место периодически модулированные колебания со стабилизированной по опорному сигналу средней частотой. Цикл $L_{01}^{(1)}$ (рис. 2, *a*) возникает в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе из области D_1 через *линию 1*, циклы $L_{01}^{(k)}$ кратности больше единицы ($k = 2, 4, 8, \dots$) возникают в результате бифуркаций удвоения периода циклов $L_{01}^{(k/2)}$. Пунктирная *линия 2* на рис. 1, *a* соответствует мягкой смене устойчивости цикла $L_{01}^{(1)}$, сопровождающаяся рождением устойчивого предельного цикла $L_{01}^{(2)}$ (рис. 2, *б*).

Область D_3 . При значениях параметров из области D_3 в фазовом пространстве модели (3) имеют место колебательные предельные циклы $L_{02}^{(k)}$, которые, так же как циклы $L_{01}^{(k)}$, характеризуют режим регулярной квазисинхронизации. Цикл $L_{02}^{(1)}$ возникает в фазовом пространстве U при пересечении *линии 3* при уменьшении ε или γ в результате бифуркации двойного предельного цикла (мультипликатор цикла $\nu = +1$). Циклы $L_{02}^{(k)}$, где $k = 2, 4, 8, \dots$, появляются аналогично циклам $L_{01}^{(k)}$, через бифуркации удвоения периода циклов $L_{02}^{(k/2)}$. Пунктирная *линия 4* соответствует рождению цикла $L_{02}^{(2)}$ (рис. 2, *д*) в результате удвоения периода цикла $L_{02}^{(1)}$ (рис. 2, *з*).

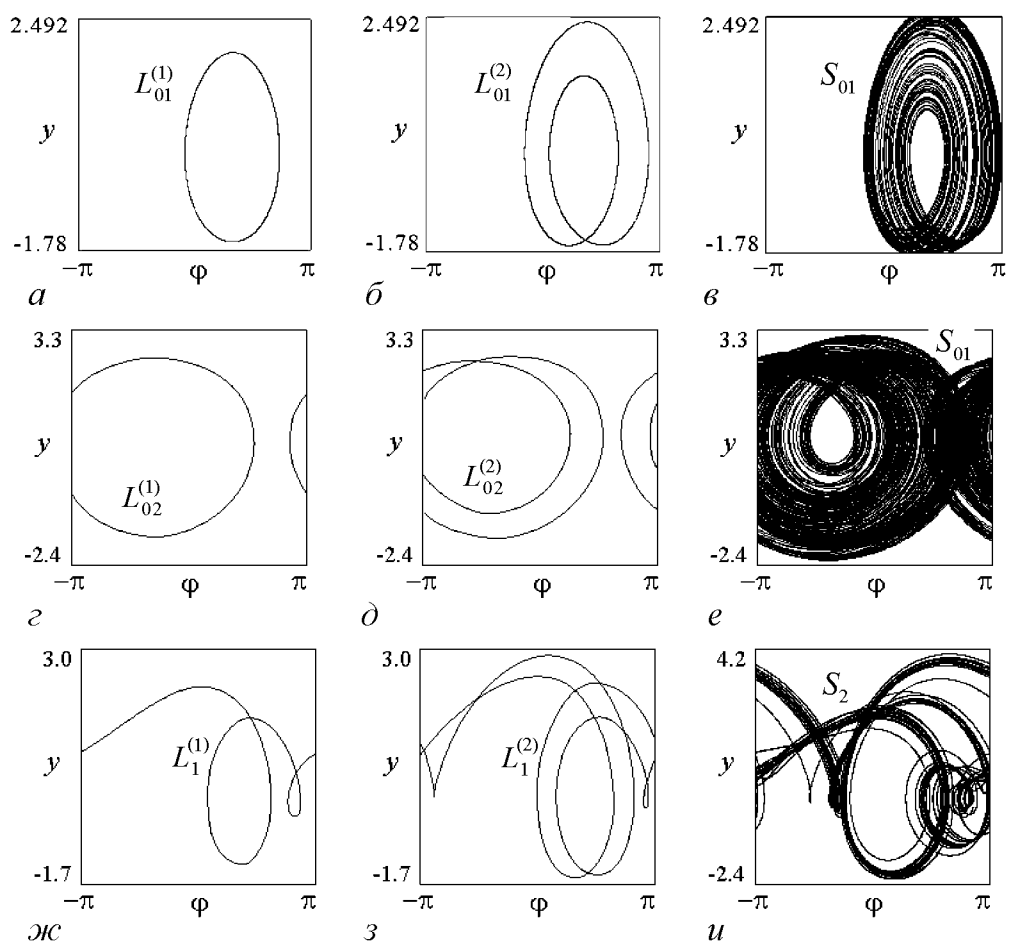


Рис. 2. Проекция фазовых портретов модели (3)

Области D_{H1} и D_{H2} . Каскад бифуркаций удвоения периода циклов $L_{01}^{(k)}$ начиная с $L_{01}^{(1)}$ приводит к возникновению хаотического аттрактора S_{01} . Область существования этого аттрактора D_{H1} на рис. 1, *a* выделена серым цветом. Каскад бифуркаций удвоения циклов $L_{02}^{(k)}$ приводит к возникновению хаотического колебательного аттрактора S_{02} (рис. 2, *e*), который имеет место в области параметров D_{H2} . Эта область на рис. 1, *a* отмечена темно-серым цветом. Аттракторы S_{01} (рис. 2, *в*) и S_{02} (рис. 2, *е*) соответствуют режимам хаотической квазисинхронизации. В этих режимах на выходе ФАП имеются хаотически модулированные колебания со стабилизированной по опорному сигналу средней частотой.

Области D_4 и D_5 . В области D_4 (D_5) глобальная устойчивость синхронного (регулярного квазисинхронного) режима нарушается появлением регулярных или хаотических аттракторов вращательного типа (охватывающих фазовый цилиндр U). В модели (3) аттракторы вращательного типа соответствуют режиму биений, в котором разность фаз синхронизируемых колебаний постоянно нарастает, а разность частот изменяется около некоторого значения, не равного нулю. В режимах биений на выходе ФАП имеют место периодически (хаотически) модулированные колебания, средняя частота которых не стабилизирована опорным сигналом. На рис. 1, *a* об-

ласть существования аттракторов вращательного типа выделена вертикально-горизонтальной штриховкой. Границей этой области служит пунктирная линия 5, которая разделена точкой a на две части. Справа от точки a линия 5 отвечает за бифуркацию петли сепаратрис седла или седло-фокуса с отрицательной седловой величиной. При пересечении этого участка кривой в сторону увеличения параметра γ в фазовом пространстве модели (2) появляется устойчивый вращательный предельный цикл $L_1^{(1)}$ (рис. 2, ж). Слева от точки a , в областях D_4 и D_5 численно установлено существование бифуркации петли сепаратрис седло-фокуса с положительной седловой величиной. Согласно [9, 10], в окрестности двояко-асимптотической траектории петли сепаратрисы седло-фокуса существует счетное множество устойчивых и неустойчивых периодических траекторий различных периодов. В области существования вращательных движений, расположенной левее точки a , циклы вращательного типа могут претерпевать бифуркацию удвоения периода, порождая циклы большей кратности (рис. 2, з), исчезать в результате касательных бифуркаций, а также трансформироваться в различного вида хаотические аттракторы (рис. 2, и).

Область $D_6 = D_6^1 \cup D_6^2 \cup D_6^3$. При значениях параметров из области D_6 в фазовом пространстве модели (2) существуют только аттракторы вращательного типа, то есть режимы биений глобально устойчивы. Область D_6^1 расположена выше бифуркационной кривой двукратного состояния равновесия (штрихпунктирная прямая $\gamma=1$); область D_6^2 ограничена бифуркационной кривой петли сепаратрис 1-го рода (линия б), граница разрушения хаотического аттрактора S_{01} выделяет область D_6^3 .

Сопоставление результатов приведенного выше анализа с результатами работ [4, 7] позволяет сделать следующий общий вывод. Для малых μ в области сравнительно малых значений параметра ε наблюдается динамика, характерная для системы ФАП со сложным фильтром без учета запаздывания, а в области больших значений ε наблюдается динамика, характерная для системы ФАП с фильтром первого порядка при учете запаздывания. Разделение на области малых и больших ε можно условно произвести по отношению к значению $\varepsilon^* = (\mu/d)^{-1/2}$, при котором достигается минимум бифуркационной кривой Андронова–Хопфа на плоскости (ε, γ) , или по отношению к значениям $\varepsilon_{1,2} = (0.5 \pm \sqrt{0.25 - d\mu})/n$ – точкам пересечения этой кривой с осью абсцисс (см. рис. 1, б, на котором приведены бифуркационные кривые Андронова–Хопфа при различных значениях параметра μ). В области $\varepsilon \sim \varepsilon^*$ (или $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$) оба фактора являются существенными, то есть динамика системы обладает свойствами, характерными как для системы ФАП со сложным фильтром, так и для системы ФАП с запаздыванием. Анализ расположения областей синхронизации и квазисинхронизации на рис. 1 позволяет заключить, что в рассматриваемой системе для малых значений γ характерно установление режима квазисинхронизации, который при увеличении начальной частотной расстройки γ сменяется режимом синхронизации.

3. Характеристики автомодуляционных колебаний

Перейдем к рассмотрению характеристик автомодуляционных колебаний (режима квазисинхронизации), то есть аттракторов колебательного типа [11]. В качестве таких характеристик будем использовать: амплитуды колебаний $\Delta\varphi$ и $\Delta\omega$ пе-

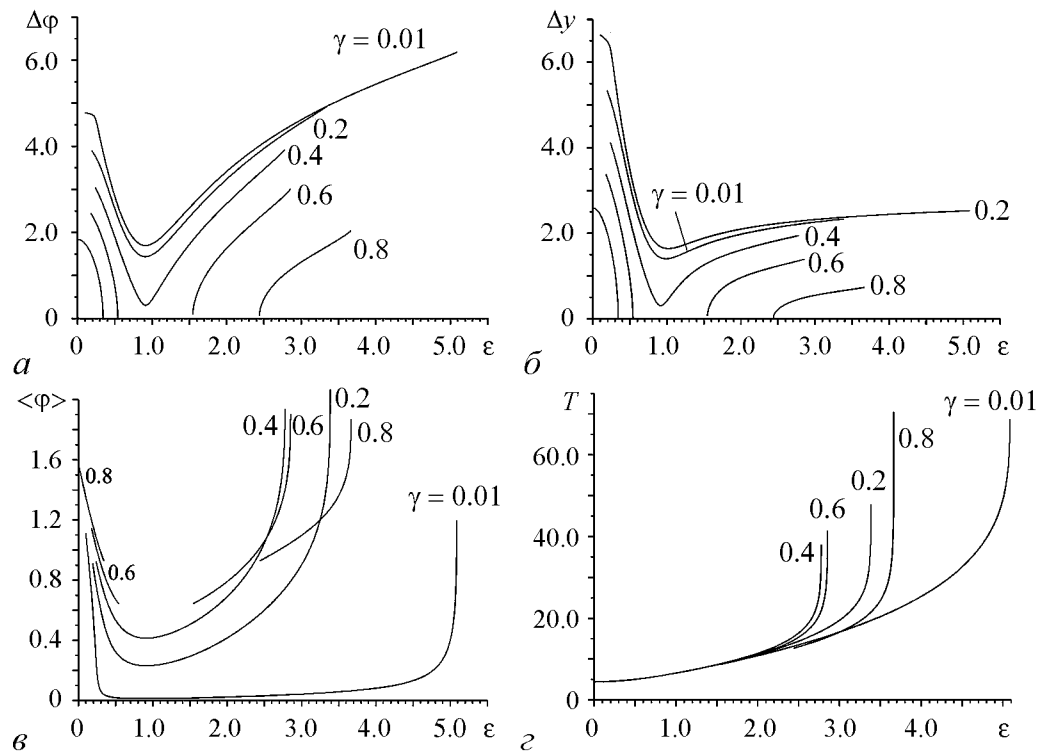


Рис. 3. Характеристики регулярных автомодуляционных колебаний

ременных φ и y при движении по аттрактору, поскольку они определяют глубины модуляции выходного сигнала по фазе и частоте; средние значения $\langle \varphi \rangle$ переменной φ , характеризующие средние фазовые ошибки стабилизации подстраиваемого генератора опорным сигналом; периоды автомодуляционных колебаний T . На рис. 3 представлены зависимости указанных характеристик автомодуляционных колебаний для регулярного режима квазисинхронизации от параметра фильтра ε и начальной расстройки γ , рассчитанные по особым траекториям модели (2) для $\mu = 0.5$, $d = 0.6$. Отметим, что, как следует из рисунка, кривые зависимостей $\Delta\varphi$, Δy , $\langle \varphi \rangle$ от ε имеют характерный минимум. Наличие такого минимума позволяет осуществить в некоторых пределах управление характеристиками автомодуляционных колебаний путем соответствующего выбора параметров. Период T автомодуляционных колебаний практически не зависит от γ , при увеличении ε , стартуя с некоторого постоянного значения, период сначала растет почти линейно, потом резко устремляется в бесконечность. Такой быстрый рост периода колебаний объясняется приближением параметров к бифуркационной кривой петли сепаратрис, где предельный цикл влипает в гомоклиническую кривую седла с бесконечным периодом обращения.

Заключение

В работе проведено исследование автомодуляционных режимов в системе ФАП с фильтром второго порядка при учете запаздывания. Показано, что учет инерционности фильтра и запаздывания приводит к нарушению устойчивости синхронного

режима и установлению режима квазисинхронизма – регулярных или хаотических автомодуляционных колебаний на выходе ФАП, средняя частота которых стабилизирована по опорной частоте. Изучены некоторые характеристики таких колебаний в зависимости от параметров системы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-02-00865), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракты № П2308, № 02.740.11.0565, № 02.740.11.0075).

Библиографический список

1. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Связь, 1972.
2. *Капранов М.В.* Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты // Радиотехника. 1956. Т. 11, № 12. С. 37.
3. *Белюстина Л.Н.* Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2, № 2. С. 277.
4. *Бакунов Г.М., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* О регулярных квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты // Вестник ННГУ. 2010. № 6. С. 43.
5. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Лактюшкин А.М. и др.* Широкополосная беспроводная связь на основе динамического хаоса // Радиотехника и электроника, 2006. Т. 51, № 10. С. 1193.
6. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* Динамический хаос в фазовых системах. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. С. 25.
7. *Бакунов Г.М., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* О квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Вестник ННГУ. 2011. № 3. С. 62.
8. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: учебно-методическая разработка // Нижний Новгород: ННГУ, 2002.
9. *Шильников Л.П.* О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Мат. сб. 1963. Т. 61, № 104. С. 443.
10. *Шильников Л.П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокуса // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 123. С. 92.
11. *Бакунов Г.М.* Об автомодуляционных колебаниях в системе фазовой автоподстройки частоты // Материалы 9-й Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», 4–9 октября 2010, Саратов, Россия. С. 74.

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского*

Поступила в редакцию 20.04.2011

ON QUASI-SYNCHRONOUS REGIMES IN A PHASE LOCK LOOP WITH THE SECOND-ORDER FILTER AND APPROXIMATE INCLUSION OF THE DELAY

G.M. Bakunov, V.V. Matrosov, V.D. Shalfeev

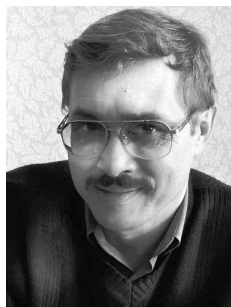
For a typical phase lock loop with the second-order filter and delayed feedback, conditions of appearance and characteristics of regular and chaotic automodulation regimes are studied.

Keywords: Phase lock loops, dynamic regimes, automodulation oscillations, synchronization, bifurcations.



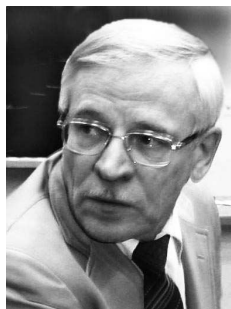
Бакунов Глеб Михайлович – родился в 1986 году в Нижнем Новгороде, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Опубликовал ряд работ по динамике моноимпульсных систем фазовой синхронизации.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: gleb@bakunov.com



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученых степеней кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: matrosov@rf.unn.ru



Шалфеев Владимир Дмитриевич – родился в 1941 году, окончил Горьковский университет в 1963 году. Заведующий кафедрой теории колебаний Нижегородского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук РФ. Область научных интересов: динамика нелинейных систем, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Соавтор монографий «Системы фазовой синхронизации», «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации», «Динамический хаос в фазовых системах», «Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках».

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: shalfeev@rf.unn.ru