



БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА И ЭФФЕКТЫ ШУМОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В МУЛЬТИСТАБИЛЬНОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова

Исследуется модель автоколебательной среды, составленной из элементов со сложным автоколебательным поведением. При периодических граничных условиях в среде сосуществуют устойчивые автоколебательные режимы в виде бегущих волн с различным сдвигом фазы на длине системы. Проведено исследование механизмов удвоения периода колебаний во времени для различных сосуществующих режимов. Для всех наблюдавшихся пространственно-неоднородных режимов (бегущих волн) удвоение периода происходит через возникновение квазипериодических во времени колебаний и дальнейшую их эволюцию. Удвоения периода ведут к развитию мультистабильности. Для каждой моды с заданным сдвигом фазы на длине системы возникают разные устойчивые неоднородные структуры, отличающиеся распределением характеристик колебаний в пространстве. Воздействие шумового сигнала приводит к сдвигу бифуркаций удвоения в сторону роста управляющего параметра. При фиксированном значении параметра с ростом интенсивности шума наблюдаются стохастические бифуркации связанности, проявляющиеся в уменьшении числа экстремумов вероятностного распределения. При достаточно сильном шуме происходит исчезновение пространственно-неоднородных режимов, соответствующих ненулевым фазовым сдвигам.

Ключевые слова: Автоколебательная среда, мультистабильность, удвоение периода, пространственные структуры, стохастическая бифуркация, Р-бифуркация, шум.

Введение

Автоколебания являются характерным режимом для широкого класса распределенных систем и сред. Во многих случаях непрерывную в пространстве автоколебательную среду можно представить как множество элементов, каждый из которых сам является автогенератором. В отличие от пространственно организованного ансамбля из конечного (хотя, возможно, и большого) числа генераторов, предполагается, что на единицу длины системы приходится бесконечно много элементарных генераторов, а размеры каждого элемента бесконечно малы. Классический пример такой модели – уравнение Гинзбурга–Ландау [1, 2]. В ней с ростом нелинейности

среды наблюдаются режимы хаотической во времени динамики и пространственно-го беспорядка (турбулентное состояние). Сложное поведение такой среды является следствием взаимодействия большого числа автоколебательных элементов, колебания которых в отсутствие связи были бы гармоническими. Можно предположить существование сред, состоящих из элементов со сложной динамикой. Такие модели сред могут, по-видимому, возникнуть в задачах биофизики и нейрофизиологии, где отдельный автоколебательный элемент способен в некоторых случаях демонстрировать сложное, в том числе хаотическое, поведение. Однако на сегодняшний день автоколебательные среды, состоящие из элементарных генераторов с собственной сложной динамикой, в научной литературе практически не рассматривались. Имеется значительное число работ, в которых исследуются пространственно организованные ансамбли, составленные из конечного числа генераторов со сложным индивидуальным поведением, например цепочки из осцилляторов Ресслера [3, 4], систем Чуа [5, 6] или генераторов Анищенко–Астахова [7]. Однако при фиксированном и, как правило, не очень большом числе элементов такие модели могут качественно отражать лишь некоторые, наиболее грубые, черты поведения распределенных систем, но не дают полной картины возможных явлений и не могут, строго говоря, рассматриваться в качестве моделей непрерывных сред. Еще меньше соответствуют непрерывным средам цепочки и решетки отображений последования [8, 9], так как в этом случае не только пространственные координаты, но и время оказывается дискретной переменной. Таким образом, исследование модели непрерывной во времени и пространстве автоколебательной среды со сложным поведением элементарных ячеек является на сегодняшний день актуальной задачей нелинейной динамики. Другой недостаточно исследованной проблемой являются эффекты, вызванные действием шума в распределенных системах, в частности влияние шума на бифуркационные переходы. Можно назвать монографию [10] и ряд статей, посвященных исследованию этих эффектов [11–17].

В работе предложена модель автоколебательной среды, элементы которой представляют собой автогенераторы, демонстрирующие при изменении управляющего параметра бифуркации удвоения периода и хаотическую динамику. В среде наблюдается мультистабильность – одновременно существуют несколько устойчивых пространственно-временных режимов, реализующихся при различных начальных условиях. Цель данной работы состоит в изучении следующих вопросов.

- Какие особенности перехода к колебаниям удвоенного периода могут быть связаны с непрерывным распределением динамических переменных в пространстве и одинаков ли сценарий удвоения периода для различных пространственных мод?
- Как может повлиять внешнее случайное воздействие на среду в режиме колебаний удвоенного периода? Будут ли при этом наблюдаться стохастические бифуркации связанности (обратные удвоения), имеющие место в конечномерных системах и какие новые эффекты могут возникать?

1. Модель автоколебательной среды

В качестве элементарной ячейки среды был взят генератор с инерционной нелинейностью (ГИН) Анищенко–Астахова [18, 19]. Рассмотрим замкнутую в кольцо цепочку из N таких генераторов с резистивной связью и перейдем к пределу

$N \rightarrow \infty$, считая размер элемента бесконечно малым. В результате получаем модель автоколебательной среды в виде следующей системы уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -gz + g\Phi(x).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y, z – безразмерные вещественные динамические переменные, являющиеся функциями безразмерного времени t и безразмерной пространственной координаты s ; m и g – управляющие параметры системы; γ – коэффициент диффузии, определяемый величиной связи между соседними элементами. Граничные условия предполагаются периодическими

$$\begin{aligned}\forall t \quad x(0, t) &= x(L, t), \quad y(0, t) = y(L, t), \quad z(0, t) = z(L, t); \\ \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L}, \quad \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L}, \\ \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=L},\end{aligned}\tag{2}$$

где L – длина системы. В проведенных исследованиях фиксировались следующие значения параметров: $L = 100$ безразмерных единиц, $\gamma = 0.1$ и $g = 0.2$. Управляющий параметр m изменялся в пределах от 0.9 до 1.5.

Система (1) интегрировалась с использованием спектрального метода. В проведенных экспериментах шаг по времени фиксировался всегда одинаковым $h_t = 0.01$. Шаг дискретизации по пространственной координате определяется как $h_s = L/2N$, где N – число учитываемых пространственных гармоник. Чтобы смоделировать поведение непрерывной по пространственной координате среды, для каждого исследуемого режима число рассматриваемых пространственных гармоник требуется выбирать таким образом, чтобы дальнейшее увеличение числа гармоник уже не приводило к существенным изменениям формы колебаний в пространстве и времени. Чем более сложным является исследуемый режим, тем большее число гармоник нужно учитывать. Приемлемая точность вычислений в режиме динамического хаоса достигается только при очень большом количестве учитываемых гармоник. В данной работе мы ограничили число рассматриваемых гармоник $N \leq 256$ и, соответственно, результаты интегрирования (1), полученные в режиме хаотической динамики являются неточными и дают только качественное представление о поведении среды. По этой причине хаотическая динамика среды в рамках данной работы детально не исследуется.

Для характеристики динамических режимов исследовались колебания во времени в отдельных точках среды, а также мгновенные пространственные профили переменных, получаемые при наложении определенного условия на состояние в начальной точке среды ($s = 0$). Также строились распределения выбранной переменной в сечении траекторий в каждой точке среды заданной плоскостью.

В силу периодических граничных условий в среде могут существовать различные волновые режимы (моды). В квазигармоническом режиме возможны моды, для которых в любой момент времени t выполняется условие:

$$\varphi(L, t) = \Phi(0, t) - \Phi(L, t) = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (3)$$

где $\Phi(s, t)$ – мгновенная фаза колебаний в точке s в момент t . Условие (3) означает, что на длине системы укладывается целое число длин волны, равное $|n|$. Будем называть число n номером моды. Мода, соответствующая значению $n = 0$, представляет собой пространственно однородный режим, когда все точки среды колеблются в одной фазе. Значениям $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ соответствуют пространственно неоднородные режимы, то есть режимы бегущих волн. Знак « \pm » определяет направление распространения бегущей волны. Какие из мод будут устойчивыми, зависит от коэффициента диффузии γ и других параметров системы. При значениях параметров, указанных выше, в системе сосуществует несколько устойчивых мод, соответствующих значениям $n = 0$ и $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. В дальнейшем будем рассматривать бегущие волны только с положительными значениями n , так как поведение соответствующих мод с отрицательными n полностью аналогично и они отличаются лишь направлением распространения: волны с положительными числами n распространяются по кольцу слева направо, а с отрицательными – в обратную сторону [17].

Выбор того или иного устойчивого режима в численных экспериментах первоначально достигался заданием начальных значений переменных в точках среды с различным пространственным периодом. «Настройка» на нужную моду проводилась в квазигармоническом режиме, затем выбранный режим отслеживался при движении с малым шагом по параметру.

С ростом параметра возбуждения m форма колебаний точек среды во времени перестает быть близкой к гармонической, наблюдаются удвоения периода колебаний и переход к хаосу. Форма пространственных профилей также усложняется. По виду мгновенных профилей становится невозможным определить количество волн на длине системы. Однако значение n для каждой моды остается неизменным. Для определения числа n вычисляется сдвиг фазы колебаний на длине системы и далее применяется условие (3). Чтобы определить сдвиг фазы $\varphi(L, t)$, предварительно находится мгновенная фаза как функция координаты s в фиксированный момент времени t . Мгновенную фазу $\Phi(s, t)$ можно определить как угол поворота траектории в проекции x, y [20]

$$\Phi(s, t) = -\operatorname{arctg} \frac{y(s, t)}{x(s, t)} \pm \pi i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где для фиксированного значения t целая величина i определяется исходя из непрерывного характера зависимости фазы от пространственной координаты. Знак минус связан с направлением вращения траектории, которое противоположно направлению отсчета угла. В отличие от квазигармонического режима, для более сложных колебаний условие (3) может выполняться нестрого, поэтому для них находилось среднее значение $\bar{\varphi}(L)$.

2. Механизм удвоения периода колебаний для различных волновых мод

В генераторе Анищенко–Астахова при $g = 0.2$ значение параметра $m = m_1 \approx 0.966$, соответствует первой бифуркации удвоения. При том же значении параметра происходит удвоение периода колебаний во времени для однородного решения ($n = 0$) системы (1). По всем наблюдаемым характеристикам удвоения периода данной моды аналогичны бифуркациям удвоения предельного цикла в ГИН. Бифуркационные значения параметра m в пределах точности расчетов совпадают с соответствующими бифуркационными значениями для конечномерного генератора. При переходе через критическое значение $m = m_{кр} \approx 1.355$ возникает хаотическая во времени динамика, а пространственная однородность колебаний при этом разрушается. Невозможность синфазных (в нашем случае – пространственно-однородных) хаотических колебаний в системах с бесконечной размерностью отмечалась, например, в [21].

Удвоение периода колебаний для пространственно неоднородных мод ($n \neq 0$) происходит по иному сценарию. Рассмотрим моду с номером $n = 1$. Ее можно назвать «одноволновой модой», так как в квазигармоническом режиме на длине системы укладывается одна длина волны $\lambda = L/n$. В точке $m = 0.966$ для данной моды еще имеет место квазигармонический режим. На рис. 1 приведены фрагменты сечения фазового пространства плоскостью $x = 0$ в отдельной точке среды, а также мгновенные профили, полученные для одноволновой ($n = 1$) и двухволновой моды ($n = 2$) при $m = 0.972$. Сечения имеют вид, характерный для квазипериодических колебаний. Мгновенные профили не повторяются.

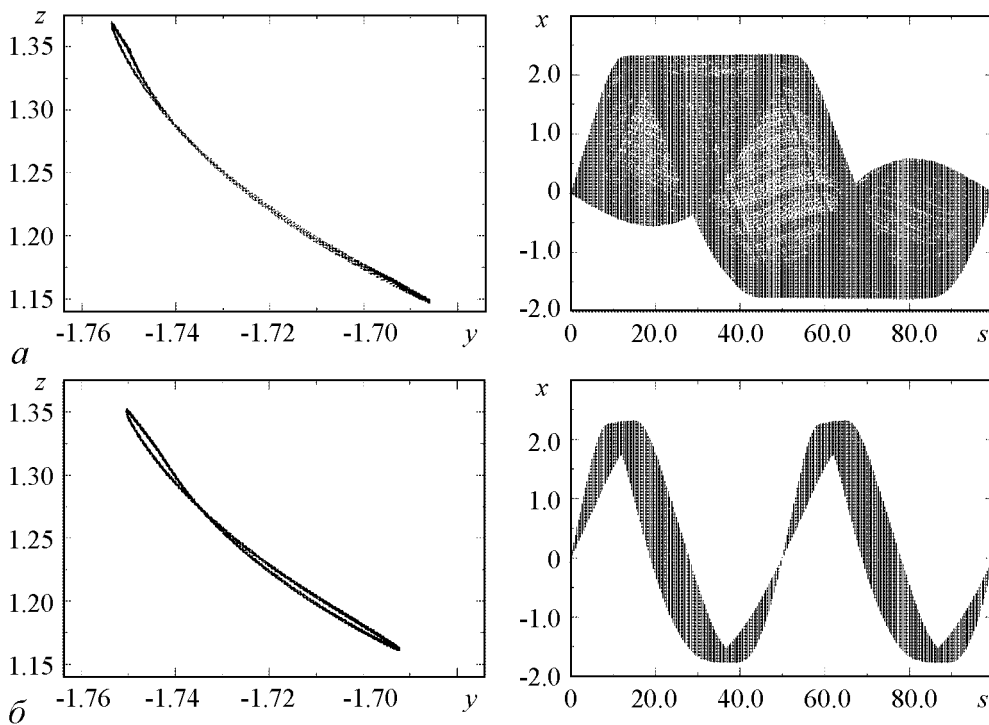


Рис. 1. Переход к колебаниям удвоенного временного периода. Слева – фрагменты сечений фазового пространства плоскостью $x = 0$, справа – пространственные профили режимов при переходе к колебаниям удвоенного во времени периода: $m = 0.972$; $n = 1$ (а); $n = 2$ (б)

Чтобы детальнее исследовать механизм удвоения периода одноволновой моды, были построены распределения точек в сечении. Полученные для нескольких значений параметра m распределения $x_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ приведены на рис. 2. Из представленных графиков видно, что при $m = 0.966$ бифуркация еще не произошла и имеют место периодические колебания с исходным периодом T_0 . Для любой точки среды траектории пересекают секущую плоскость в двух точках, что соответствует двум направлениям пересечения. Причем эти точки одинаковы для любого значения s , так как сами колебания отличаются только фазовым сдвигом. Поэтому на графике, представленном на рис. 2, а, значения $x_i(s)$ ложатся на две прямые горизонтальные линии. Далее происходит бифуркация и возникают квазипериодические колебания. При $m = 0.968$ на графике можно видеть две строго горизонтальные полосы постоянной ширины (рис. 2, б). При $m = 0.984$ на графике можно видеть, что в некоторых точках пространства сечение состоит из двух четких линий, а в некоторых – размыто (рис. 2, в). Причина этого – недостаточное время построения сечения в режиме медленной модуляции колебаний. При дальнейшем росте параметра m устанавливаются колебания удвоенного периода $2T_0$ (рис. 2, г). Однако колебания в различных точках уже не будут одинаковы (с точностью до сдвига фаз). На рис. 2, г можно видеть, что точки в сечении зависят от координаты s . Можно также отметить точку среды, где сечение состоит не из четырех, а только из двух точек, то есть визуально колебаниям соответствует цикл периода T_0 .

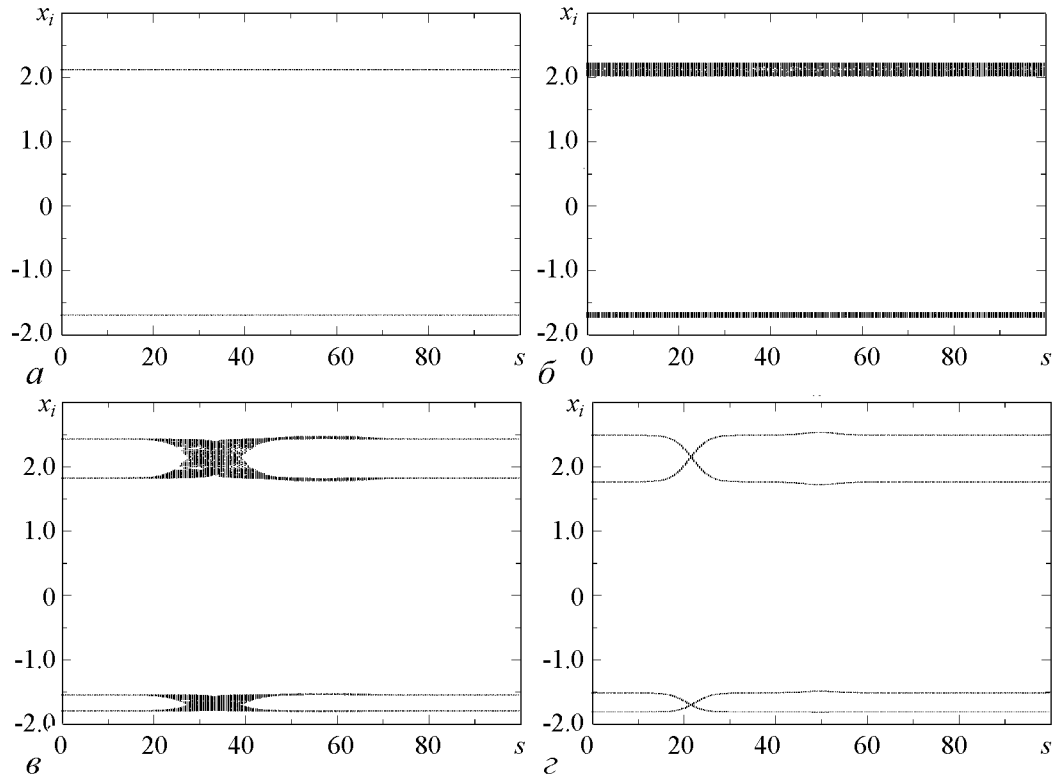


Рис. 2. Распределения $x_i(s)$ для одноволновой моды при различных значениях параметра m : 0.966 (а); 0.968 (б); 0.984 (в); 0.992 (г)

Режим медленной модуляции проиллюстрирован на рис. 3. На представленных на рис. 3, *a, б* графиках можно видеть, как меняется во времени распределение точек в сечении, построенное для ограниченного интервала наблюдения. Первые, начиная с некоторого момента t_0 , 500 точек в сечении (для каждого s) представлены на рис. 3, *a*, а последующие 500 точек – на рис. 3, *б*. Можно видеть смещение наблюдаемой на конечном времени структуры. С ростом параметра m такое смещение становится все более медленным. Указанное поведение точек сечения соответствует медленной модуляции колебаний во времени. О характере огибающей колебаний можно судить по графикам, приведенным на рис. 3, *в, г*. С ростом параметра m период модуляции увеличивается, стремясь к бесконечности при некотором значении параметра, соответствующем установлению периодических колебаний удвоенного периода.

Неоднородность характера колебаний удвоенного периода в пространстве проиллюстрирована на рис. 4 видом фазового портрета в различных точках среды. Таким образом, после бифуркации удвоения периода в некоторых точках пространства можно наблюдать цикл периода T_0 . Однако следует отметить, что режим колебаний в различных точках среды со взаимной связью между элементами должен быть топологически эквивалентен. Соответственно, существование в одних точках пространства колебаний удвоенного периода, а в других – исходного периода являются, скорее всего, только визуальным эффектом: расстояние между витками цикла оказывается меньше погрешности построения сечения.

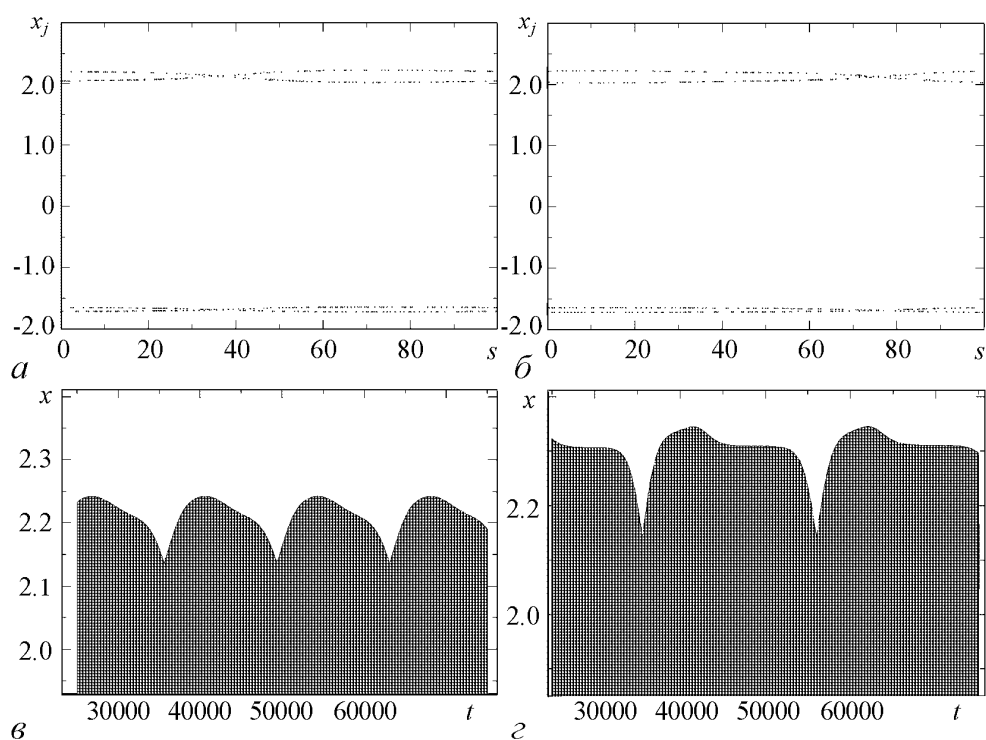


Рис. 3. Режим медленной модуляции, возникающий для одноволновой моды при переходе к колебаниям удвоенного периода: *a, б* – распределения $x_i(s)$, построенные при $m = 0.968$ для двух последовательных интервалов времени, в течении которых в каждой точке пространства было получено 500 точек в сечении траектории; *в, г* – фрагменты зависимости переменной x от времени в точке $s = 25$ при $m = 0.968$ и $m = 0.972$, соответственно. Черная область соответствует плотно «упакованным» колебаниям на основной частоте

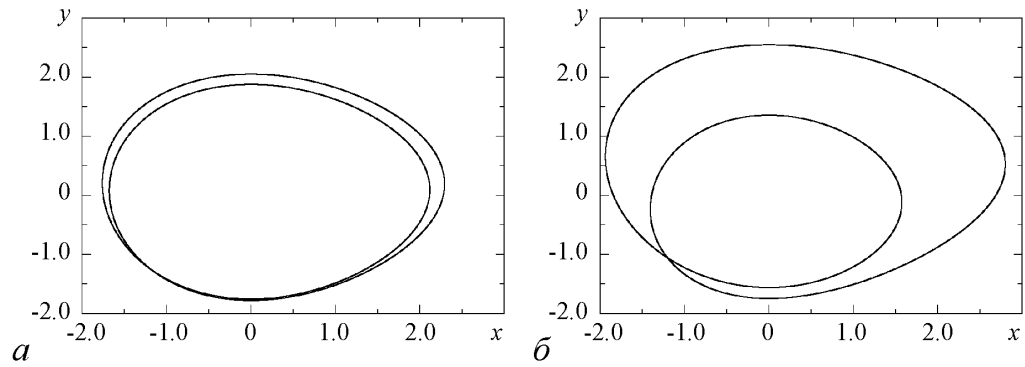


Рис. 4. Фазовые портреты колебаний, полученные для $n = 1$ при $m = 1.03$ в двух точках среды: $s = 2$ (а); $s = 20$ (б)

Полностью аналогичный сценарий, но при некотором малом смещении по параметру m , имеет место и для двух других устойчивых пространственно неоднородных мод ($n = 2$ и $n = 3$). Вместо «обычной» бифуркации удвоения периода для пространственно неоднородных мод удвоение периода колебаний во времени происходит сложным эволюционным путем, начинающимся с бифуркации рождения квазипериодических колебаний. Результаты проведенных нами вычислений говорят о том, что для разных мод бифуркационное значение параметра m_1 , при котором возникают квазипериодические колебания, оказывается неодинаковым. Оно несколько возрастает с увеличением номера моды.

Можно отметить, что рождение квазипериодических колебаний и переход к колебаниям удвоенного периода через резонанс на торе наблюдается для несинфазных режимов в системе двух взаимодействующих генераторов с бифуркациями удвоения периода [22]. Квазипериодические во времени колебания были обнаружены для пространственно неоднородных режимов в цепочках логистических отображений [8, 9, 23] и автогенераторов Чуа [6]. В этом отношении непрерывная среда ведет себя подобно пространственно дискретным моделям. Однако дискретные модели не могут демонстрировать в полной мере пространственно-временные структуры, возникающие в непрерывной среде после удвоения периода и нарушения квазигармоничности.

Мгновенные пространственные профили колебаний для $n \neq 0$ в результате удвоения периода во времени искажаются и уже не являются квазигармоническими. Профиль каждой пространственно неоднородной моды между двумя последовательными бифуркациями удвоения периода претерпевает сложную эволюцию. Увеличивая m , можно наблюдать, как «горбы» и «впадины» на мгновенном пространственном профиле трансформируются, образуя все новые экстремумы. Возникают все более мелкомасштабные пространственные осцилляции [24].

Наблюдаемое в непрерывной среде (1) усложнение пространственного профиля не было зафиксировано в пространственно дискретной модели автоколебательной среды с удвоениями периода колебаний во времени [6]. Возможно, это объясняется слишком малым количеством автогенераторов в цепочке, моделирующей среду.

3. Вторая бифуркация рождения квазипериодических колебаний и переход к хаосу для неоднородных мод

Второе удвоение периода для неоднородных мод при выбранном значении коэффициента диффузии не наблюдается. При некотором значении m_2 снова происходит рождение квазипериодических колебаний, уже на основе периодических колеба-

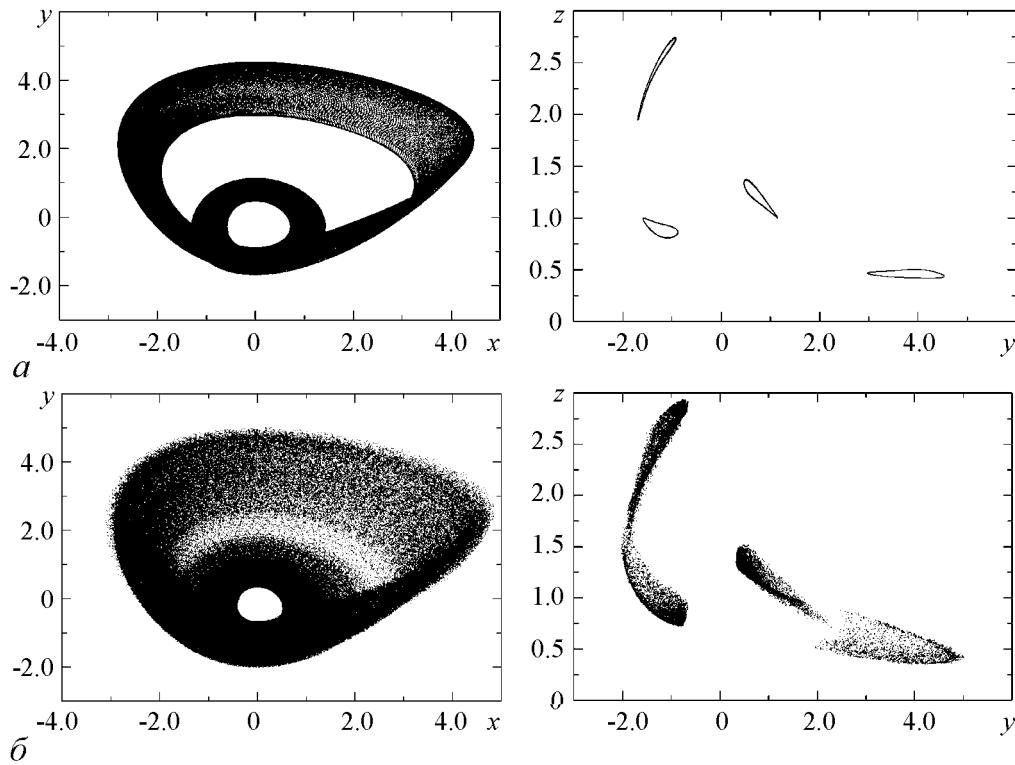


Рис. 5. Вторичное возникновение квазипериодических колебаний, их разрушение и переход к хаосу для моды $n = 1$: $m = 1.34$ (а), $m = 1.39$ (б). Слева – фазовые портреты в точке $s = 40$, справа – соответствующие сечения фазового пространства плоскостью $x = 0$

ний удвоенного периода. Это значение, как и m_1 , несколько различно для различных мод. При дальнейшем увеличении m квазипериодические колебания разрушаются и возникает хаотическая динамика точек среды во времени. По имеющимся у нас результатам исследования среды, задаваемой теми же уравнениями (1), но с открытыми концами, неоднородные моды также порождают квазипериодические колебания и переход к хаосу через их разрушение. Таким образом, возникновение и разрушение квазипериодических колебаний является типичным механизмом перехода к хаосу в автоколебательной среде. Рождение квазипериодических колебаний с удвоенным квазипериодом и их разрушение проиллюстрировано для моды $n = 1$ на рис. 5.

4. Воздействие шума на среду.

Бифуркации удвоения периода в присутствии шума

В работе рассматривалось воздействие аддитивного шума на среду в режимах с различными номерами n в окрестности первой бифуркации удвоения. Будем использовать шум, представляющий собой воздействие одной и той же случайной δ -коррелированной во времени силы $F(t) = \sqrt{2D}\xi(t)$ на все точки среды. Здесь $\xi(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума (со средним значением $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$ и корреляцией $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$); D – константа, характеризующая интенсивность шума. Если воздействовать такой силой только на некоторый участок среды, то каче-

ственных изменений наблюдаемых эффектов не будет. Уменьшение длины участка, подверженного действию случайной силы, оказывается эквивалентным уменьшению интенсивности шума [25]. Проведенные исследования показали, что разные моды по-разному устойчивы к шуму. Чем больше номер n , тем меньшей интенсивности шума D достаточно, чтобы данный режим перестал существовать. При этом система переключается в режим с номером $n - 1$ и не возвращается в режим с номером n ни с течением времени, ни при изменении начальных условий. Таким образом, можно говорить о том, что шум подавляет пространственно-неоднородные моды, начиная с больших значений номера n . При достаточно сильном шуме в кольце можно наблюдать только зашумленный пространственно-однородный режим, которому соответствует нулевой средний сдвиг фазы на всей длине системы: $\bar{\varphi}(L) = 0$ [25]. Похожие эффекты наблюдались в кольце периодических генераторов [17] и, по-видимому, носят достаточно общий характер.

Выберем значение интенсивности шума D таким, чтобы все устойчивые моды, наблюдаемые без шума, еще сохранялись, и рассмотрим, как влияет шум на удвоения периода колебаний. Зафиксируем значение m , соответствующее колебаниям удвоенного периода для данной моды. Увеличивая интенсивность шумового воздействия, можно наблюдать «смазывание» фазовых портретов колебаний настолько, что становится невозможно различить два витка на предельном цикле. Такое же поведение под действием шума имеет место в сосредоточенных системах малой размерности и отображениях последования [26].

В среде с ростом интенсивности шума имеют место стохастические бифуркации связанности (или обратные бифуркации удвоения). Они представляют собой бифуркации феноменологического типа (так называемые Р-бифуркации [27]), состоящие в качественном преобразовании плотности вероятности динамических переменных. Рассмотрим эволюцию распределения переменной $x(s, t)$ в точке пространства s . Если без шума имели место колебания удвоенного периода, то при достаточно малом шуме практически во всех точках среды устанавливается стационарное распределение $p(x, s)$, имеющее четыре локальных максимума. С ростом интенсивности шума D происходит постепенная эволюция распределения, приводящая к изменению числа максимумов: их становится два. Значение $D = D_c$, при котором происходит изменение числа максимумов, соответствует стохастической бифуркации. Стохастические бифуркации связанности наблюдались для всех существующих устойчивых мод. На рис. 6 приведены примеры распределений $p(x, s)$ в фиксированной точке s , полученные для моды $n = 0$ при различных значениях интенсивности шума D . Они иллюстрируют стохастические бифуркации связанности.

Проведенные исследования показывают, что изменение числа максимумов распределения $p(x, s)$ происходит одновременно во всех точках среды как для однородной моды $n = 0$, так и для неоднородных мод. Одновременность наблюдается даже при локальном характере шумового воздействия и несмотря на то, что для $n \neq 0$ расстояние между витками траектории на фазовом портрете сильно меняется в зависимости от координаты s ! Если и существует бифуркационный интервал значений $D_c(s)$, то он очень мал. Во всяком случае, для всех значений s переход от распреде-

ления с четырьмя максимумами к распределению с двумя максимумами наблюдался для очень близких значений интенсивности D_c , различия между которыми укладывались в пределы ошибки численного эксперимента.

Имеется некоторая особенность шумового воздействия на неоднородные моды в режиме удвоенного периода вблизи его возникновения. Шум как бы «возвращает» систему в квазипериодический режим, порождая медленную модуляцию колебаний во времени и характерные медленные изменения пространственной структуры точек сечения. Однако огибающая в данном случае является не периодическими колебаниями, а медленным случайным процессом. Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 7.

Если зафиксировать интенсивность шума и увеличивать параметр m , то число максимумов распределения при некотором бифуркационном значении параметра будет удваиваться. То есть вместо бифуркаций связанности в этом случае правильнее говорить о стохастических бифуркациях удвоения. В действительности, это одни и те

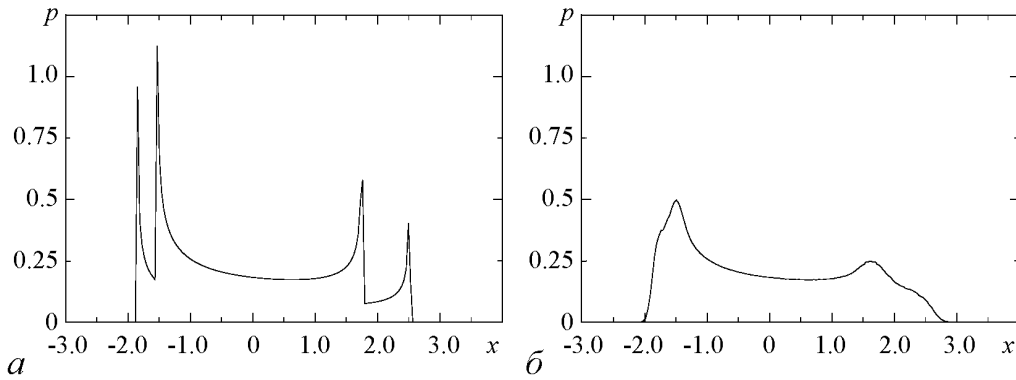


Рис. 6. Вызванные шумом бифуркации связанности в среде при $m = 0.972$: плотности вероятности $p(x, s)$ в точке $s = 25$, полученные для однородного режима $n = 0$ при однородном шуме с интенсивностью $D = 0.0000001$ (а) и $D = 0.0001$ (б)

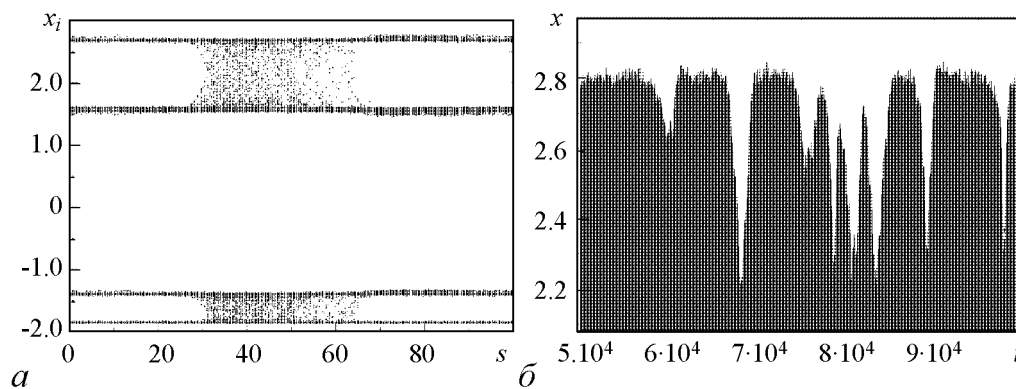


Рис. 7. Режим медленной случайной модуляции, наблюдающийся для моды $n = 1$ при $m = 1.03$ в результате действия шума с интенсивностью $D = 0.00001$: а – распределение $x_i(s)$; б – фрагмент зависимости переменной x от времени в точке $s = 40$

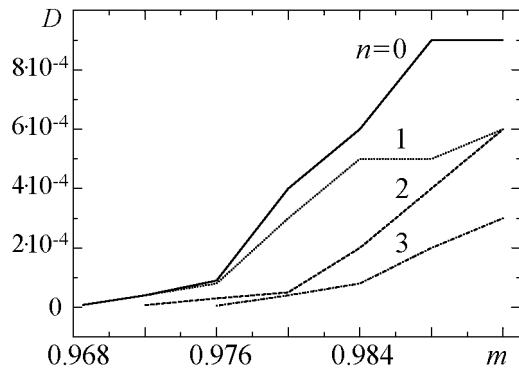


Рис. 8. Зависимость критического значения интенсивности шума D_c от параметра возбуждения m для мод с различным числом n .

же бифуркации, которым на плоскости параметров m, D соответствуют одни и те же бифуркационные линии, разделяющие области с разным числом экстремумов. Соответствующие линии, построенные для разных мод, представлены на рис. 8. Можно видеть, что бифуркации удвоения с ростом интенсивности шума все больше «запаздывают», смещаясь в сторону больших m . Это же происходит с ростом номера моды: удвоение происходит позже, а бифуркация связанности с ростом D наблюдается раньше.

Заключение

Предлагаемая нами модель автоколебательной среды со сложной динамикой элементарной ячейки демонстрирует большое разнообразие пространственно-временных режимов, бифуркации удвоения периода колебаний и переход к хаотической динамике. В среде при выбранных значениях параметров существует несколько устойчивых мод, отличающихся числом полных оборотов фазы колебаний на длине системы (номер моды n). Все они эволюционируют с ростом параметра возбуждения m . Однако для однородной моды $n = 0$, соответствующей одинаковым колебаниям всех точек среды, и для мод $n \neq 0$ эта эволюция различна. Если для однородной моды характерна фейгенбаумовская последовательность «обычных» удвоений периода, то для бегущих волн механизм удвоения периода связан с рождением квазипериодических колебаний и их постепенной эволюцией, приводящей к установлению колебаний удвоенного периода во всех точках среды.

Бифуркации мод $n \neq 0$ приводят к образованию пространственно неоднородных структур, для которых характеристики колебаний зависят от точки среды. С ними также связано отклонение пространственного профиля волны от гармонической формы и его постепенное усложнение с ростом параметра m . После вторичного возникновения квазипериодических колебаний происходит их разрушение и переход к хаосу.

Воздействие случайной силы на среду при достаточной интенсивности приводит к исчезновению режимов бегущих волн. Сохраняется только режим $n = 0$. Если интенсивность шума мала, то можно наблюдать различные сосуществующие моды. В присутствии шума время от времени должны происходить переключения между устойчивыми режимами, однако в численных экспериментах этого наблюдать не удавалось из-за ограниченности рассчитываемых реализаций во времени. Для любой существующей моды в случае колебаний удвоенного периода с ростом интенсивности шума наблюдались индуцированные шумом бифуркации связанности (обратные бифуркации удвоения). Они фиксировались по изменению числа максимумов вероятностного распределения переменной $x(s, t)$ в выбранной точке среды s . Бифурка-

ционное значение интенсивности шума было примерно одинаковым для всех точек среды и зависело от номера моды n . Чем больше значение n , тем раньше происходит бифуркация связанности. Таким образом, бегущие волны с большими номерами n (коротковолновые режимы) оказываются наиболее чувствительными к шуму.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (контракт №14.740.11.0074).

Библиографический список

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Уравнение Гинзбурга–Ландау и нелинейная динамика неравновесных сред // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1987. Т. 32, № 2. С. 131.
2. Aranson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Reviews of Modern Physics. 2002. Vol. 74, № 1. P. 99.
3. Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Physical Review E. 1997. Vol. 55, № 3. P. 2353.
4. Shabunin A.V., Feudel U., Astakhov V.V. Phase multistability, phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // Physical Review E. 2009. Vol. 80, № 2. P. 026211.
5. Belykh V.N., Verichev N.N., Kocarev L., Chua L.O. On chaotic synchronization in a linear array of Chua's circuits // Journal of Circuits, Systems, Computers. 1993. Vol. 3, № 2. P. 579.
6. Shabunin A.V., Astakhov V.V., Anishchenko V.S. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling: synchronization, hierarchy of multistability formation // International Journal of Bifurcation, Chaos. 2002. Vol. 12, № 8. P. 1895-.
7. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Доклады Академии Наук СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.
8. Kaneko K. Spatiotemporal Chaos in one-, two-dimensional coupled map lattices // Physica D. 1989. Vol. 37, № 1-3. P. 60.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079.
10. García-Ojalvo J., Sancho J.M. Noise in spatially extended systems. New York: Springer. 1999. P. 307.
11. García-Ojalvo J., Hernández-Machado A., Sancho J.M. Effects of external noise on the Swift–Hohenberg equation // Physical Review Letters. 1993. Vol. 71, № 10. P. 1542.
12. Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Reviews of Modern Physics. 1993. Vol. 65, № 3. P. 851.

13. *Viñals J., Hernández-García E., Miguel M.S., Toral R.* Numerical study of the dynamical aspects of pattern selection in the stochastic Swift-Hohenberg equation in one dimension // *Physical Review A*. 1991. Vol. 44, № 2. P. 1123.
14. *Kuznetsov S.P.* Noise-induced absolute instability // *Mathematics, Computers in Simulation*. 2002. Vol. 58, № 4–6. P. 435.
15. *Anishchenko V.S., Akopov A.A., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Mechanisms of chaos onset in an inhomogeneous medium under cluster synchronization destruction // *New Journal of Physics*. 2006. Vol. 8, № 6. P. 84.
16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems // *Physical Review E*. 2008. Vol. 77, № 3. P. 036215.
17. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13, № 4. С. 37.
18. *Анищенко В.С., Астахов В.В.* Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // *Радиотехника и электроника*. 1983. Т. 28, № 6. С. 1109.
19. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Москва: Наука, 1990. С. 312.
20. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Instantaneous phase method in studying chaotic, stochastic oscillations and its limitations // *Fluctuation, Noise Letters*. 2004. Vol. 4, № 1. P. L219.
21. *Pecora L.M.* Synchronization conditions, desynchronizing patterns in coupled limit-cycle, chaotic systems // *Physical Review E*. 1998. Vol. 58, № 1. P. 347.
22. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния диссипативно-связанных фейгенбаумовских систем // *Письма в Журнал Технической Физики*. 1988. Т. 15, № 3. С. 60.
23. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.* Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. 1991. Т. 34, № 1. С. 35.
24. *Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е., Листов А.С.* Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями // *Нелинейная Динамика*. 2010. Т. 6, № 4. С. 755.
25. *Слепнев А.В.* Фазовая мультистабильность и влияние локального источника шума в модели автоколебательной среды. Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. С. 94.
26. *Svensmark H., Samuelsen M.R.* Perturbed period-doubling bifurcation. I. Theory // *Physical Review B*. 1990. Vol. 41, № 7. P. 4181.
27. *Arnold L.* *Random Dynamical Systems*. Berlin: Springer. 2003. P. 586.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 8.11.2010
После доработки 8.07.2011*

PERIOD DOUBLING BIFURCATIONS AND NOISE EXCITATION EFFECTS IN A MULTISTABLE SELF-SUSTAINED OSCILLATORY MEDIUM

A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova

The model of a self-oscillatory medium composed from the elements with complex self-oscillatory behavior is studied. Under periodic boundary conditions the stable self-oscillatory regimes in the form of traveling waves with different phase shifts are coexisted in medium. The study of mechanisms of the oscillations period doubling in time is performed for different coexisted modes. For all observed spatially-non-uniform regimes (traveling waves) the period doubling occurs through the appearance of time-quasiperiodic oscillations and their further evolution. The period doubling result in multistability development. For each mode with the given phase shift the different stable non-uniform structures, which are differed by the distribution of oscillations characteristics in space, emerge. The influence of a noise signal leads to the shift of doubling bifurcation in the direction of the control parameter increasing. When the value of control parameter is fixed the stochastic bifurcations of contingency, which are shown in reduction of extremes numbers in the probabilistic distribution, are observed with the increasing of noise intensity. When the noise is sufficiently great the spatially-non-uniform modes corresponding to nonzero phase shifts disappear.

Ключевые слова: Self-oscillatory medium, multistability, period doubling, spatial structures, stochastic bifurcation, P-bifurcation, noise.



Слепнев Андрей Вячеславович – родился в Саратове (1987), окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (2009). В 2011 году получил в СГУ степень магистра физики по направлению «физика». Научные интересы: динамика распределенных систем, пространственные структуры, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: a.v.slepnev@gmail.com



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru