



**МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ
МЕЛЬНИКОВА И ОПТИМАЛЬНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ХАОСА
В ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗМУЩАЕМЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Ю.В. Талагаев, А.Ф. Тараканов

Представлены результаты, иллюстрирующие плодотворность идеи оптимальной коррекции параметров для анализа и оптимизации класса периодически возбуждаемых хаотических систем. С использованием критерия Мельникова решены две задачи, которые вскрывают особенности подавления хаотической динамики и предоставляют способ регуляризации поведения диссипативного нелинейного осциллятора. Полученные аналитические результаты сравнены с решением двухкритериальной задачи, использующим для нахождения оптимальных параметрических возмущений условия принципа максимума Понтрягина. Оценки эффективности различных форм параметрических воздействий на систему, определенные указанными двумя независимыми способами, находятся в соответствии между собой.

Ключевые слова: Многопараметрический анализ, нелинейные осцилляторы, оптимальное подавление хаоса, критерий Мельникова, принцип максимума.

Введение

Вот уже более двадцати лет внимание ученых привлекает проблема управления хаотическими системами [1–3]. Изучение разнообразных методов управления хаосом, практические приложения которых простираются от биомедицины до защиты информации, вскрыло две взаимосвязанные проблемы. С одной стороны, эффективность схем контролирования хаотического поведения зависит от того, насколько полно используются специфические свойства хаотических систем. Например, работоспособность популярного метода Отта–Гребоджи–Йорка (OGY) [4] обусловлена рекуррентностью хаотических траекторий. С другой стороны, часто хаотическая система имеет несколько доступных для управления параметров. Показательным здесь стало многопараметрическое обобщение метода OGY [5,6] и метода обратной связи с запаздыванием (метод Пирагаса) [7]. Многомерность параметрического пространства и высокая чувствительность хаотических систем к возмущениям параметров

существенно затрудняют понимание механизмов появления нерегулярного поведения. Часто остается неясным, какие из параметров и форм их возмущения будут наилучшими для достижения цели управления. Поэтому прогресс в области управления хаосом требует разработки средств многопараметрического анализа, опираясь на которые, можно повышать эффективность имеющихся или строить новые методы управления хаосом.

Согласно общепринятой классификации [3], методы управления хаосом делятся на две группы: с обратной связью (OGY и др.) и без обратной связи [8–12]. Признанию методов второй группы способствует следующее: объектом управления является важный в теоретическом и прикладном аспектах класс возмущаемых динамических систем – периодически возбуждаемые диссипативные нелинейные осцилляторы; простота практической реализуемости – контролируемое возмущение является гармонической функцией. Для нахождения критических значений параметров возмущения, при которых возникает (исчезает) хаотическое поведение, удобным аналитическим инструментом стала служить теория Мельникова [13–15]. Учитывая особенности возникновения сложной динамики, критерий Мельникова позволил оценить эффективность управляющего воздействия [16]. Совершенствование подхода связано с минимизацией амплитуды приложенного возмущения через выбор оптимальной формы внешнего и/или параметрического возбуждения (см. обзор [3]). В последнее время продвижение в этом направлении было достигнуто при более глубоком изучении влияния характеристик возмущения (phase control of chaos [17,18]).

Данная работа представляет результаты по многопараметрическому анализу, оптимизации и обобщению методов подавления хаотического поведения без обратной связи. Продуктивность развитого подхода показывается на примере осциллятора Дуффинга–Холмса. При многопараметрическом взгляде на эту «парадигмальную» [18] модель наибольший интерес представляет выявление связей между ключевыми параметрами осциллятора и нахождение оптимальных способов подавления хаотической динамики, а также сравнение таковых для различных видов возмущений параметров. Эта задача более общая и является развитием работ [19,20], где была предложена идея оптимальной многопараметрической коррекции, открывшая новое направление в анализе хаотических систем. Нами сформулированы несколько оптимизационных задач, в которых для данного вида возмущений вводится собственный, учитывающий условия хаотизации и требование малости воздействия, критерий оптимальности, и ищется удовлетворяющий ему способ подавления хаотической динамики. Полученные решения дают полезную информацию о скрытых особенностях подавления хаоса.

1. Структура параметрического пространства нелинейного диссипативного осциллятора: анализ на основе критерия Мельникова

Методы управления без обратной связи в основном используются для подавления хаоса в периодически возбуждаемых динамических системах. Среди них широкий класс представляют диссипативные нелинейные осцилляторы, общее уравнение которых может быть записано в следующем виде

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = -\gamma\dot{x} + F(t),$$

где $V(x)$ – нелинейный потенциал, характеризующий внутренние свойства системы (зависимость возвращающей силы от смещения); γ – уровень линейного демпфирования, описывающий механизм диссипации энергии в системе; $F(t) = f \cos(\omega t)$ – внешняя периодическая сила. При соответствующей комбинации параметров диссипации и возбуждения могут возникнуть условия, приводящие к хаотизации динамики осциллятора. Возможность аналитического изучения условий возникновения сложной динамики предоставляет критерий Мельникова (детальное изложение теории метода см. в [13–15]). Его идея состоит в вычислении функции Мельникова $M(t)$, которая описывает расщепление сепаратрисы гиперболической точки, вызываемое присутствием малого возмущения. Если в некоторый момент времени θ функция $M(t)$ меняет знак, то устойчивая и неустойчивая ветви сепаратрисы сложным образом пересекаются. При этом в окрестности гиперболической точки возникает образованная ветвями сепаратрисы структура (гомоклиническое сплетение), которая является причиной возникновения хаоса.

В случае, когда свойства осциллятора задает симметричный потенциал $V(x) = -\alpha x^2/2 + \beta x^4/4$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, получаем модель осциллятора Дуффинга–Холмса

$$\ddot{x} - \alpha x + \beta x^3 = -\gamma\dot{x} + f \cos(\omega t). \quad (1)$$

Параметрическое пространство осциллятора (1) пятимерно ($\{\alpha, \beta\} \cup \{\gamma, f, \omega\}$) и объединяет две группы параметров, различающихся их ролью в динамике. Оно включает собственные параметры α, β и параметры γ, f, ω , характеризующие внешние условия, в которых находится система. Многомерность параметрического пространства влечет многопараметричность функции Мельникова, вычисление которой для (1) дает объединяющее все параметры системы выражение

$$M(\theta) = M(\theta, P) = A(\alpha, \beta, f, \omega) \sin(\omega\theta) - C(\alpha, \beta, \gamma),$$

где

$$A = \sqrt{2\pi}(\beta)^{-1/2} f \omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right), \quad C = \frac{4\alpha^{3/2}\gamma}{3\beta}.$$

Если через P обозначить все множество возможных значений параметров осциллятора (1), то использование условия знакопеременности функции Мельникова позволяет выделить в P : область *регулярной* динамики $P_R \subset P$, соответствующую значениям параметров, для которых $A < C$ ($\operatorname{sign}(M(\theta, P_R)) = \operatorname{const}$); область *сложной* динамики $P_C \subset P$, где $A > C$ ($\operatorname{sign}(M(\theta, P_C)) \neq \operatorname{const}$); *границу* \tilde{P} (критические значения параметров) между областями регулярной и сложной динамики (далее – *граница* RC), определяемую условием $A = C$ ($M(\theta, \tilde{P}) = 0$). В качестве исходной ситуации в данной работе будет использована конфигурация параметров $P_0 \subset P_C$, $P_0 = \{\alpha_0, \beta_0\} \cup \{\gamma_0, f_0, \omega_0\} = \{1, 4\} \cup \{0.154, 0.095, 1.1\}$, при которых осциллятор (1) демонстрирует типичное хаотическое поведение.

Удобным способом наглядного изучения особенностей устройства пространства параметров осциллятора (1) является двухпараметрический анализ границы областей регулярной и сложной динамики. Преобразуем равенство $A = C$ сначала к

виду

$$\beta(\alpha) = \frac{8}{(3\pi)^2} \left(\frac{\gamma_0}{f_0 \omega_0} \right)^2 \alpha^3 \left(\cosh \left(\frac{\pi \omega_0}{2\sqrt{\alpha}} \right) \right)^2, \quad (2)$$

а затем –

$$f(\omega) = \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{\alpha_0^3}{2\beta_0}} \gamma_0 \omega^{-1} \cosh \left(\frac{\pi \omega}{2\sqrt{\alpha_0}} \right). \quad (3)$$

Полученные зависимости предоставляют две точки зрения для изучения системы. Для фиксированных значений параметров из группы $\{\gamma_0, f_0, \omega_0\}$ функция (2) определяет границу RC на плоскости (α, β) собственных параметров осциллятора. Функция (3) позволяет при фиксированных значениях $\{\alpha_0, \beta_0\}$ и γ_0 изучить границу RC на плоскости параметров хаотизирующего возбуждения (ω, f) .

Вид границы RC, построенной согласно функциям (2) и (3), показан на рис. 1. Для полноты представления дополнительно к исходной конфигурации параметров P_0 построены два варианта границы на плоскости параметров (α, β) , соответствующие вариации значений частоты возбуждения $\omega_0 \pm \delta\omega$, $\delta\omega = 0.1$ (рис. 1, а) и значений амплитуд возбуждения $f_0 \pm \delta f$, $\delta f = 0.005$ (рис. 1, б)). Также в трех вариантах построена граница RC на плоскости параметров (ω, f) : для исходного значения α_0 и двух различных значений $\alpha_0 \pm \delta\alpha$, $\delta\alpha = 0.5$ (рис. 1, в) и для β_0 и $\beta_0 \pm \delta\beta$, $\delta\beta = 0.5$ (рис. 1, г).

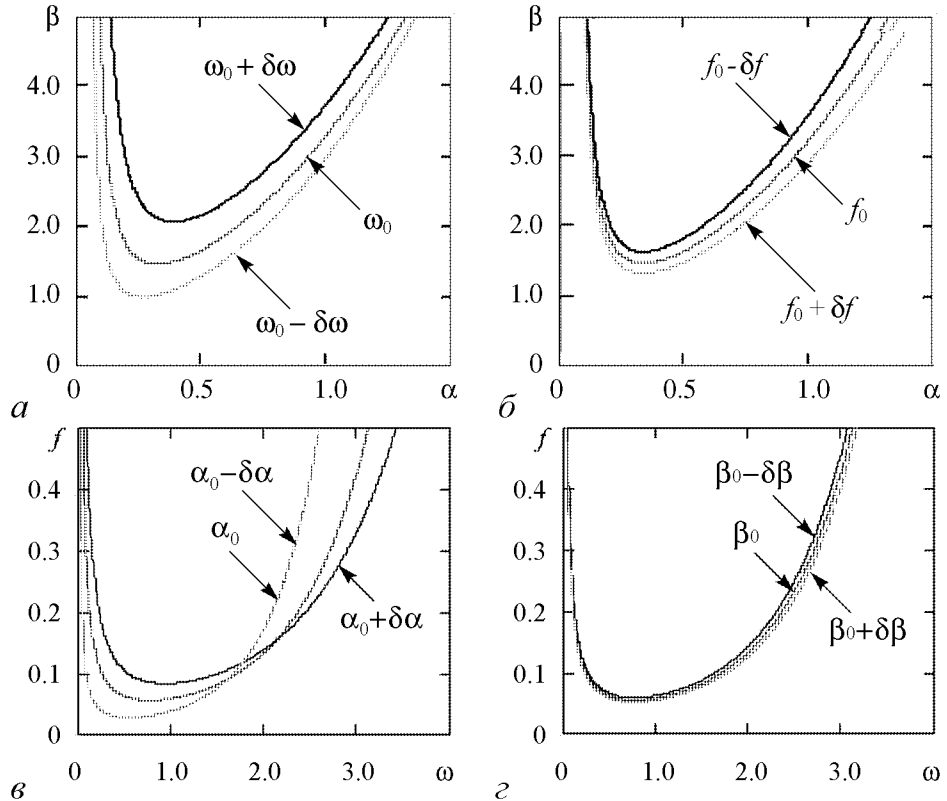


Рис. 1. Двухпараметрическая граница областей регулярной и сложной динамики осциллятора Дуффинга-Холмса

Иллюстрируя взаимозависимость двух основных групп параметров осциллятора, результаты на рис. 1 выявляют особенность границы RC, заключающуюся в том, что функции $\beta(\alpha)$ и $f(\omega)$ достигают минимума. Для конфигурации P_0 минимумами являются соответственно точки $(\alpha_{\min}, \beta_{\min}) = (0.329, 1.447)$ и $(\omega_{\min}, f_{\min}) = (0.764, 0.055)$, а область существования области сложной динамики дается условиями $\beta > \beta_{\min}$ и $f > f_{\min}$. При этом вариация значений параметров приводит к различному смещению положения границы RC и изменению положения минимума.

2. Оптимальное подавление хаоса на основе критерия Мельникова

В данной части представлено решение двух оптимизационных задач. Их особенность в том, что с использованием критерия Мельникова решение ищется непосредственно на границе RC. Такой подход позволяет обнаружить тонкие связи между параметрами системы и найти те их значения, которые обеспечивают оптимальное подавление хаоса.

2.1. Оптимальная коррекция параметров. Многопараметрический анализ оптимального подавления хаотической динамики начнем с изучения ситуации, когда происходит коррекция исходных значений параметров α_0 и β_0 . После добавления корректирующих поправок h_α и h_β уравнение осциллятора (1) запишется в виде

$$\ddot{x} - \alpha_0(1 + h_\alpha)x + \beta_0(1 + h_\beta)x^3 = -\gamma_0\dot{x} + f_0 \cos(\omega_0 t). \quad (4)$$

Наибольший интерес вызывает изучение совместного влияния поправок h_α и h_β , которое может обеспечить подавление хаоса. Претендентами на роль минимальных корректирующих поправок $h_{\alpha \min}$, $h_{\beta \min}$, с которыми решение уравнения (4) превратится из хаотического в устойчивое, являются значения h_α и h_β , которые лежат на границе RC.

Определим множество допустимых значений величин h_α и h_β в виде

$$K = \{h_\alpha, h_\beta \mid M_1(\theta, P_1) = 0 \quad \forall \theta\},$$

где $M_1(\theta, P_1) = M_1(\theta, \{\alpha_0(1 + h_\alpha), \beta_0(1 + h_\beta)\} \cup \{\gamma_0, f_0, \omega_0\})$ – функция Мельникова осциллятора (4). Тогда формализация требования малости корректирующих поправок, необходимых для оптимального подавления хаоса, приводит к задаче оптимальной коррекции

$$h_\alpha^2 + h_\beta^2 \rightarrow \min_{h_\alpha, h_\beta \in K}. \quad (5)$$

Для решения задачи (5) вместо повторного вычисления функции Мельникова M_1 можно воспользоваться выражением (2). Делая замену $\alpha_0 \rightarrow \alpha_0(1 + h_\alpha)$, $\beta_0 \rightarrow \beta_0(1 + h_\beta)$, преобразуем (2) к виду

$$h_\beta(h_\alpha) = \frac{8}{(3\pi)^2} \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\gamma_0}{f_0 \omega_0} \right)^2 (\alpha_0(1 + h_\alpha))^3 \left(\cosh \left(\frac{\pi \omega_0}{2\sqrt{\alpha_0(1 + h_\alpha)}} \right) \right)^2 - \beta_0. \quad (6)$$

В виде зависимости $h_\beta = h_\beta(h_\alpha)$ выражение (6) дает *связь* между значениями корректирующих поправок h_α и h_β , которые лежат на границе RC. Выражение (6) сразу

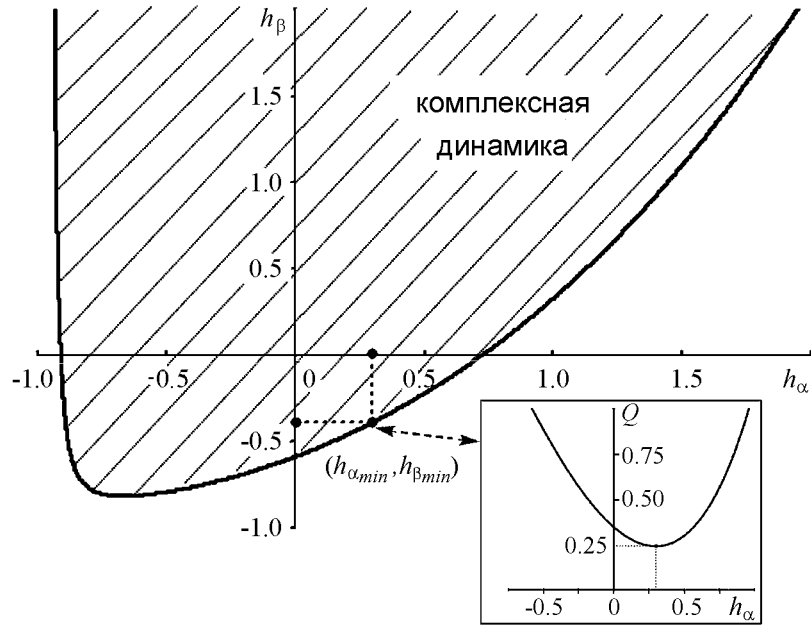


Рис. 2. Граница областей регулярной и сложной динамики осциллятора (6) и положение пары $(h_{\alpha \min}, h_{\beta \min})$, дающей оптимальное сочетание корректирующих поправок, обеспечивающих подавление хаоса

устанавливает ограничения на значения h_{α} . Из $\alpha_0(1 + h_{\alpha}) > 0$ следует, что $h_{\alpha} > -1$. На рис. 2 построена зависимость $h_{\beta} = h_{\beta}(h_{\alpha})$, показано расположение области сложной динамики и положение найденной ниже оптимальной пары $(h_{\alpha \min}, h_{\beta \min})$.

Фактически каждая точка кривой $h_{\beta} = h_{\beta}(h_{\alpha})$ может являться решением (5), но среди них только одна наилучшая. Например, при возмущении параметров α_0 и β_0 по отдельности получаем, соответственно, пары (h_{α}, h_{β}) : $(0.723, 0)$ и $(0, -0.588)$. Это означает, что устойчивость системы при коррекции параметра β_0 достигается с меньшей по критерию (5) поправкой, чем для α_0 . Для нахождения оптимальной пары $(h_{\alpha \min}, h_{\beta \min})$ необходимо, двигаясь вдоль границы РС, найти минимум функции $Q(h_{\alpha}) = h_{\alpha}^2 + (h_{\beta}(h_{\alpha}))^2$. Изменение критерия качества вдоль границы регулярной и сложной динамики в виде графика функции $Q(h_{\alpha})$ также показано на рис. 2. Минимуму $Q(h_{\alpha}) = 0.241$ соответствует значение $h_{\alpha \min} = 0.298$. С использованием (6) получаем $h_{\beta}(h_{\alpha \min}) = h_{\beta \min} = -0.39$.

Таким образом, решение оптимизационной задачи (5) дает взаимосвязанные значения поправок $h_{\alpha \min}$ и $h_{\beta \min}$, которые для данной конфигурации параметров $P_0 \subset P_C$ обеспечивают оптимальный переход в пространстве параметров из области хаотической динамики в регулярную.

2.2. Эффективное резонансное соотношение. Рассмотрим ситуацию, когда возмущение осциллятора (1) помимо внешнего хаотизирующего возбуждения $f \cos(\omega t)$ содержит контролируемую часть – параметрическое возбуждение $u(t) = \mu \cos(\Omega t)$, которому подвергается параметр при нелинейном слагаемом, где μ и Ω – амплитуда и частота параметрического возбуждения, соответственно. Тогда

$$\ddot{x} - \alpha_0 x + \beta_0(1 + u(t))x^3 = -\gamma_0 \dot{x} + f_0 \cos(\omega_0 t). \quad (7)$$

Пространство параметров осциллятора (7) дополняется двумя контролируемыми параметрами: $P_2 = P_0 \cup \{\mu, \Omega\}$. Вычисляя функцию Мельникова, получим

$$M_2(\theta, P_2) = M(\theta, P_0) - aB(\alpha_0, \beta_0, \mu, \Omega) \sin(\Omega\theta),$$

где $M_0(\theta, P_0)$ – функция Мельникова неконтролируемого осциллятора (см. п. 1) и

$$B(\alpha_0, \beta_0, \mu, \Omega) = \pi\mu(6\beta_0)^{-1}\Omega^2(\Omega^2 + 4)\operatorname{csch}\left(\frac{\pi\Omega}{2\sqrt{\alpha_0}}\right).$$

Целью внесения управления $u(t)$ является регуляризация динамики осциллятора (при $\mu = 0$ уравнение (7) превращается в (1) и имеет хаотическое решение). При выборе значений μ и Ω естественно потребовать, чтобы подавляющее хаос возмущение было малым. Это приводит к задаче минимизации амплитуды μ параметрического возбуждения, уже получившей рассмотрение в работе [16]. Применение критерия Мельникова дает два условия, необходимых для подавления хаотической динамики. Функция $M_2(\theta, P_2)$ сохраняет знак, если, во-первых, значение амплитуды удовлетворяет неравенству $\mu > \mu_{\min} = (A - C)/B$ и, во-вторых, выполняется резонансное соотношение частот $\Omega_z = z\omega_0$, z – целое.

Обеспечивающая подавление хаоса минимальная амплитуда μ_{\min} лежит на границе RC, где $M_2(\theta, P_2) = 0$. Однако оценка для μ_{\min} является «локальной», поскольку верна только для фиксированных значений параметров $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, f_0, \omega_0$ и z . Например, для частоты $\omega_0 = 1.1$ вычисление при $z = 1$ дает $\mu_{\min} = 0.095$, тогда как при $z = 2$ получим $\mu_{\min} = 0.081$. Это приводит нас к необходимости решения следующей оптимизационной задачи:

$$\mu_{\min}(\omega_0, z) \rightarrow \min_z.$$

Чтобы прояснить особенности подавления хаотической динамики функцией $u(t) = \mu_{\min} \cos(\Omega_z t)$, на рис. 3 показана общая картина зависимости $\mu_{\min}(\omega)$ при различных z (поскольку рассмотрение больших значений оказалось несущественным, мы ограничились резонансами $z = 1, 2, 3, 4$). На рис. 3 видно, что на интервале

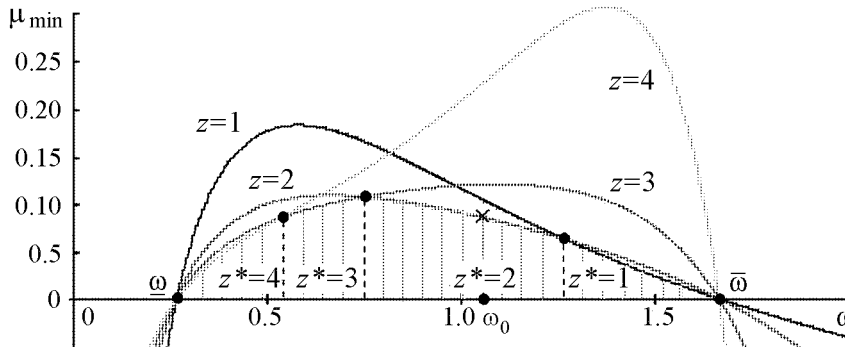


Рис. 3. Оптимальная граница областей регулярной и сложной динамики осциллятора (7), образованная эффективным резонансным соотношением

частот $(\underline{\omega}, \bar{\omega}) = (0.265, 1.661)$ с увеличением z граница РС претерпевает значительные изменения. В действительности наименьшее значение амплитуды μ достигается только при некотором z и только для вполне определенного интервала частот $w_i = (\omega_i, \omega_{i+1}) \in (\underline{\omega}, \bar{\omega})$, $i = 5 - z$, где $\underline{\omega} = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_5 = \bar{\omega}$, $\bigcup_{i=1}^4 w_i = (\underline{\omega}, \bar{\omega})$ (на рис.3 $\omega_2 = 0.531$, $\omega_3 = 0.746$, $\omega_4 = 1.265$).

Каждый из интервалов w_i однозначно определяет для стабилизирующей функции $u^*(t) = \mu_{\min}(\omega, z^*) \cos(z^* \omega t)$ эффективное резонансное соотношение

$$\Omega_z = z^* \omega,$$

где $z^* \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\omega \in w_{5-z^*}$, такое что на каждом интервале w_i для значения z^* выполняется

$$\mu_{\min}^*(\omega) = \mu_{\min}(\omega, z^*) \leq \mu_{\min}(\omega, z).$$

В результате точки $(\omega, \mu_{\min}^*(\omega))$, где $\omega \in (\underline{\omega}, \bar{\omega})$, образуют оптимальную границу РС.

Если мы знаем, к какому интервалу w_i принадлежит данное значение частоты ω контролируемого возмущения, то решением задачи $\mu_{\min}(\omega, z) \rightarrow \min_z$ можно определить эффективный резонанс z^* и дополнительно минимизировать амплитуду $\mu_{\min}(\omega, z^*)$ подавляющего хаос резонансного параметрического возмущения. На рис. 3 показано, что для $\omega_0 = 1.1$ наименьшему значению амплитуды соответствует резонанс $z^* = 2$.

3. Оптимальное подавление хаоса при неизвестной структуре параметрического возмущения

Рассмотрим осциллятор

$$\ddot{x} - \alpha_0(1 + h_\alpha(t))x + \beta_0(1 + h_\beta(t))x^3 = -\gamma_0 \dot{x} + f_0 \cos(\omega_0 t), \quad (8)$$

в котором корректирующие параметрические возмущения $h_\alpha(t)$ и $h_\beta(t)$ являются функциями времени и ограничены множеством $U: |h_\alpha(t)| \leq a, |h_\beta(t)| \leq b$. Коррекция в данном случае является динамической. Исследование условий оптимального подавления хаоса усложняется тем, что одновременно с нахождением минимальных ограничений a_{\min}, b_{\min} необходимо выяснить структуру оптимальной функции $h^0(t) = (h_\alpha^0(t), h_\beta^0(t))$. Это приводит к двухкритериальной оптимизационной задаче

$$\max \left(\max_{0 \leq t \leq T} |h_\alpha^0(t)|, \max_{0 \leq t \leq T} |h_\beta^0(t)| \right) \rightarrow \min_{a, b \in K_\Lambda, h^0 \in U^0}, \quad (9)$$

$$h^0 = (h_\alpha^0, h_\beta^0) \in U^0 = \text{Arg} \min_{h \in U} \int_0^T (h_\alpha^2 + h_\beta^2) dt. \quad (10)$$

Физический смысл критерия оптимальности (10) состоит в том, что искомая стабилизирующая функция $h^0(t)$ должна обеспечить минимум затрат энергии на процесс подавления хаоса.

При неизвестной структуре параметрического возмущения применение метода Мельникова в задаче (9)–(10) становится затруднительным. Эффективным методом решения является двухэтапная схема коррекции (описание реализации схемы и ее обоснование можно найти в [19, 20]). Согласно специфике задачи (9)–(10), объединяющей (а точнее – упорядочивающей) два критерия оптимальности, двухэтапная схема коррекции комбинирует методы теории оптимального управления с компьютерным моделированием динамического поведения системы. При анализе характера устойчивости в качестве критерия возникновения хаоса используется локальная неустойчивость траекторий системы (эквивалентной уравнению (8))

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_0(1 + h_\alpha(t))x_1 - \beta_0(1 + h_\beta(t))x_1^3 - \gamma_0 x_2 + f_0 \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (11)$$

Исходя из этого, множество K_Λ допустимых значений ограничений a и b определяется условием отрицательности старшего показателя Ляпунова ($\Lambda_1(a, b) < 0$). При этом интервал времени $[0, T]$, на котором численно исследуется динамика системы, выбирается так, чтобы $T \gg T^*$, где T^* – время переходного процесса.

При реализации схемы сначала на основе условий принципа максимума выясняется аналитическая структура функции $h^0(t) = (h_\alpha^0(t), h_\beta^0(t))$. Составив функцию Гамильтона–Понтрягина [21] $H = \psi_1 \dot{x}_1 + \psi_2 \dot{x}_2 - 0.5(h_\alpha^2(t) + h_\beta^2(t))$, из равенств $\partial H / \partial h_j = 0$, $j = \alpha, \beta$, нетрудно получить из (10) искомую структуру стабилизирующего параметрического возмущения $h^0(t)$

$$\begin{aligned} h_\alpha^0(t) = \text{sat}(\tilde{h}_\alpha(t)) &= \begin{cases} \tilde{h}_\alpha(t), & |\tilde{h}_\alpha(t)| \leq a, \\ a \cdot \text{sign}(\tilde{h}_\alpha(t)), & |\tilde{h}_\alpha(t)| > a, \end{cases} \\ h_\beta^0(t) = \text{sat}(\tilde{h}_\beta(t)) &= \begin{cases} \tilde{h}_\beta(t), & |\tilde{h}_\beta(t)| \leq b, \\ b \cdot \text{sign}(\tilde{h}_\beta(t)), & |\tilde{h}_\beta(t)| > b, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\tilde{h}_\alpha(t) = \alpha x_1 \psi_2$, $\tilde{h}_\beta(t) = -\beta x_1^3 \psi_2$. Соответствующая возмущению $h^0(t)$ траектория $x^0(t)$ находится численным интегрированием системы $\dot{x}_i = \partial H / \partial \psi_i$, $\dot{\psi}_i = -\partial H / \partial x_i$, или в подробной записи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha(1 + \text{sat}(\tilde{h}_\alpha(t)))x_1 - \beta(1 + \text{sat}(\tilde{h}_\beta(t)))x_1^3 + f \cos(\omega t) - \gamma x_2, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2(3\beta(1 + \text{sat}(\tilde{h}_\beta(t)))x_1^2 - \alpha(1 + \text{sat}(\tilde{h}_\alpha(t))), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \gamma \psi_2, \end{cases} \quad (12)$$

с начальными условиями $x_0 = (x_{01}, x_{02})^T$, $\psi_0 = (-x_{02}, x_{01})^T$.

Определяемый системой (12) процесс является оптимальным только с точки зрения структуры функции возмущения. При произвольных значениях ограничений

a и b подавление хаоса на рассматриваемом интервале времени может не наступить. Если же подавление хаоса происходит, то не обязательно, что значения ограничений будут наименьшими. Требование (9) усиливает (10). Необходимо, чтобы уровни ограничений параметрических возмущений $h_\alpha^0(t)$ и $h_\beta^0(t)$, при которых наблюдается подавление хаоса, были наименьшими. Их минимизация осуществляется посредством процедуры численного тестирования качества подавления хаоса [20]. Для выяснения характера устойчивости системы (12) сопоставляются два близких по начальным условиям процесса. Сравнение позволяет отследить эволюцию малого возмущения $\tilde{x}^0(t) = \bar{x}^0(t) - x^0(t)$, $t \in [0, T]$, вдоль тестируемой траектории $x^0(t)$ и минимизировать значения ограничений a и b :

- задаются два близких начальных условия $x_0^0 = (x_{01}^0, x_{02}^0)^T$, $\bar{x}_0^0 = (\bar{x}_{01}^0 + \varepsilon, \bar{x}_{02}^0 + \varepsilon)^T$, $\varepsilon \ll 1$, и вычисляются соответствующие им ортогональные начальные условия для сопряженных переменных $\psi_0, \bar{\psi}_0$;
- для x_0^0, ψ_0 и $\bar{x}_0^0, \bar{\psi}_0$ на заданном интервале $[0, T]$ методом Рунге–Кутты 4-го порядка интегрируется система (12);
- для выбранных значений $a_0 < 1, b_0 < 1$ на интервале $[0, T]$ отслеживается динамика старшего показателя Ляпунова $\Lambda_1(t, a_0, b_0) = T^{-1} \ln(\varepsilon^{-1} \|\bar{x}^0(t) - x^0(t)\|)$. Если при $t \rightarrow T$ условие $\Lambda_1(t, a_0, b_0) < 0$ выполняется, то вычисления Λ_1 повторяются с некоторой поправкой $\delta a \ll 1$ для последовательности $a_l < \dots < a_1 < a_0$ и $\delta b \ll 1$ для последовательности $b_l < \dots < b_1 < b_0$, пока не будет найдена пара $(a_{\min}, b_{\min}) = \min_{a, b \in K_\Lambda} \{a_m, b_m\}_{m=0, \dots, l}$, где $a_m = a_0 - m\delta a$, $b_m = b_0 - m\delta b$.

Результат реализации схемы коррекции представлен на рис. 4, a – v , δ . Оптимальный переход от хаотической динамики к устойчивой происходит при $|h_\alpha^*(t)| \leq a_{\min}, |h_\beta^*(t)| \leq b_{\min}, a_{\min} = b_{\min} = 0.046$. Для минимизации ограничений a и b система (12) интегрировалась при $x_0 = (0.15, 0.1)^T, t \in [0, 1000]$ и шаге интегрирования $d = 0.02$.

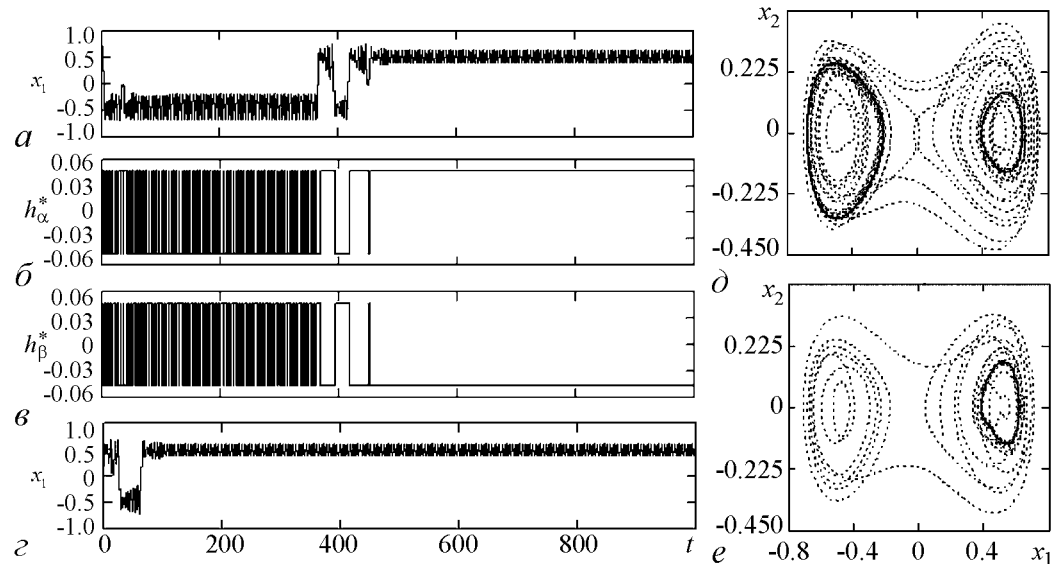


Рис. 4. Результаты оптимального подавления хаотической динамики осциллятора Дуффинга–Холмса: a – v , δ – решение задачи (9)–(10) для системы (11) с $a_{\min} = b_{\min} = 0.046$; z , e – динамика системы (7) при значении амплитуды $\mu_{\min} = 0.081$, соответствующей эффективному резонансу $z^* = 2$

4. Обсуждение результатов

Представленные в работе варианты оптимального (по выбранному критерию) подавления хаотического поведения осциллятора Дуффинга–Холмса имеют свои области приложения и могут рассматриваться как независимые. Однако их сравнение позволяет вскрыть точки соприкосновения между примененными подходами (оптимизация на основе критерия Мельникова (п. 2) и двухэтапная схема коррекции, использующая условия принципа максимума (п. 3)).

Рис. 4, б,в хорошо иллюстрирует особенность процесса оптимального подавления хаоса в задаче (9)–(10). Она заключается в возникновении эффекта насыщения оптимальных возмущений $h_\alpha^*(t)$ и $h_\beta^*(t)$ на верхней

$$h_\alpha^*(t) = a_{\min} \text{sign}(\alpha x_1 \psi_2) = +a_{\min}$$

и нижней

$$h_\beta^*(t) = b_{\min} \text{sign}(-\beta x_1^3 \psi_2) = -b_{\min}$$

границах ограничений. Момент возникновения насыщения точно совпадает с окончанием переходного процесса, в течение которого система переходит в режим устойчивых периодических колебаний. В связи с этим возникновение насыщения может использоваться как индикатор стабилизации системы.

Внимание к эффекту вызывают следующие его особенности. Во-первых, характер насыщения не зависит от числа возмущенных параметров. Например, если у системы (11) будет возмущен только параметр β (то есть $h_\alpha(t) \equiv 0$), то оптимальное подавление хаоса произойдет при большем значении b_{\min} . При этом насыщение возмущения $h_\beta^*(t)$ по-прежнему происходит на нижней границе ограничения. Аналогичная ситуация наблюдается при возмущении параметра α . Во-вторых, характер насыщений возмущений $h_\alpha^*(t)$ и $h_\beta^*(t)$ не зависит от мультистабильности системы, вызванной симметричностью потенциала $V(x)$. При подавлении хаоса устойчивое движение может установиться в окрестности одной из двух потенциальных ям $x_1 = \pm \sqrt{\alpha/\beta} = \pm 0.5$. Малое изменение начальных условий может привести к возникновению аналогичных движений в окрестности уже другой ямы, но не изменяет поведение параметрических возмущений после насыщения.

Объяснить причину возникновения насыщений оптимальных параметрических возмущений можно сопоставлением решения задачи (9)–(10) с аналитическими условиями оптимального подавления хаоса, которые предсказывает критерий Мельникова. При решении задачи (5) были найдены оптимальные корректирующие поправки $h_{\alpha \min} = 0.298$ и $h_{\beta \min} = -0.39$. Их знаки говорят о направлении изменения параметров. Для параметра α это увеличение, а для β – уменьшение. Если посмотреть на рис. 4, б,в, то можно увидеть, что это в точности соответствует наблюдаемому при подавлении хаоса характеру насыщения стабилизирующих возмущений на верхней и нижней границах ограничений. Следовательно, оптимальные параметрические возмущения $h_\alpha^*(t)$ и $h_\beta^*(t)$ запускают такой процесс подавления хаоса, который протекает в соответствии с присущим данной системе механизмом появления/исчезновения хаотического поведения.

Следующей интересной особенностью является локализация в фазовом пространстве уникальной орбиты системы (11), стабилизация которой вызывается возмущениями $h_\alpha^*(t)$ и $h_\beta^*(t)$ (см. рис. 4, д). Значительную часть времени переходный

процесс представляет собой регулярное движение траекторий по орбите, локализованной в окрестности состояния равновесия $(-\sqrt{\alpha/\beta}, 0) = (-0.5, 0)$. Численные эксперименты показали, что варьирование начальных условий может уменьшить регулярность переходного процесса. При этом из-за мультистабильности аналогичные движения могут происходить в окрестности точки $(\sqrt{\alpha/\beta}, 0)$. Однако в конце переходного процесса система «находит» новый устойчивый тип движений. Траектория выходит на замкнутую орбиту, соответствующую режиму периодических колебаний в окрестности состояния равновесия $(0.5, 0)$. На рис. 4, z представлена динамика осциллятора (7) при минимальном значении амплитуды, соответствующей эффективному резонансу $z^* = 2$ (см. п. 2.2). Сравнение рис. 4, δ и рис. 4, z показывает, что локализация оптимальной устойчивой орбиты практически в точности совпадает с решением задачи $\mu_{\min}(\omega_0, z) \rightarrow \min_z$, то есть удовлетворяет эффективному резонансному соотношению. Таким образом, не только поведение оптимальных возмущений, но и сам установившийся режим системы (11) близок к режиму, который предсказывает критерий Мельникова.

Заключение

Представлены результаты изучения многопараметрической картины оптимального подавления хаотической динамики в диссипативных нелинейных осцилляторах. Показано, как при помощи критерия Мельникова можно ставить и решать две оптимизационные задачи, углубляющих понимание специфики подавления хаоса. Выявлена связь между корректирующими поправками к параметрам и найдены их минимальные значения. Вскрыто эффективное резонансное соотношение между частотой контролируемого параметрического возбуждения и частотой внешнего хаотизирующего возбуждения. Сравнение этих результатов с результатами двухэтапной схемы коррекции показало, что найденные на основе условий оптимальности принципа максимума корректирующие функции, которые обеспечивают процесс оптимального подавления хаоса, ведут себя так, как предсказывает теория Мельникова. Соответствие в результатах двух независимых методов говорит, что они являются дополняющими друг друга способами многопараметрического анализа системы.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках подпрограммы 1 «Фундаментальные исследования» ведомственной научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. Zhang H., Liu D., Wang Z. Controlling Chaos: Suppression, Synchronization and Chaotification. Series: Communications and Control Engineering. Springer, 2009.
2. Recent Progress in Controlling Chaos / M.A.F. Sanjuan and C. Grebogi, editors. Singapore: World Scientific, 2010.
3. Rega G., Lenci S., Thompson J.M.T. Controlling chaos: The OGY Method, Its Use in Mechanics, and an Alternative Unified Framework for Control of Non-regular Dynamics // In Nonlinear Dynamics and Chaos Advances and Perspectives / Ed. M. Thiel et al. Berlin: Springer-Verlag, 2010. P. 211.
4. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, № 11. P. 1196.

5. *Warncke J., Bauer M., Martienssen W.* Multiparameter control of high-dimensional chaotic systems // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 25, № 5. P. 323.
6. *Barreto E., Grebogi C.* Multiparameter control of chaos // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 54, № 4. P. 3553.
7. *Pyragas K., Pyragas V.* Delayed Feedback Control Techniques // *Recent Progress in Controlling Chaos* / M.A.F. Sanjuan and C. Grebogi, editors. Singapore: World Scientific, 2010. P. 103.
8. *Lima R., Pettini M.* Suppression of chaos by resonant parametric perturbation // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 41. I. 2. P. 726.
9. *Braiman Y., Goldhirsch I.* Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66. P. 2545.
10. *Kivshar Y.S., Rodelsperger F., Benner H.* Suppression of chaos by nonresonant parametric perturbation // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 1. P. 319.
11. *Belhaq M., Houssni M.* Quasi-periodic oscillations, chaos and suppression of chaos in a nonlinear oscillator driven by parametric and external excitations // *Nonlin. Dyn.* 1999. Vol. 18. P. 1.
12. *Schwalger T., Dzhanoev A., Loskutov A.* May chaos always be suppressed by parametric perturbations? // *Chaos.* 2006. Vol. 16. P. 023109.
13. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
14. *Лоскутов А.Ф.* Динамический хаос. Системы классической механики // *Успехи физических наук.* 2007. Т. 177, № 9. С.980.
15. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001.
16. *Chacon R.* Suppression of chaos by selective resonant parametric perturbation // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51. P. 761.
17. *Qu Z., Hu G., Yang G., Qin G.* Phase effect in taming nonautonomous chaos by weak harmonic perturbations // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74. P. 1736.
18. *Zambrano S., Allaria E., Brugioni S., Leyva I., Meucci R., Sanjuan M.A.F., Arecchi F.T.* Numerical and experimental exploration of phase control of chaos // *Chaos.* 2006. Vol. 16. P. 013111.
19. *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Оптимальное подавление хаоса и переходные процессы в скорректированных многопараметрических колебательных системах // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 15, № 5. С. 100.
20. *Gorelik V., Talagaev Y., Tarakanov A.* Optimal Processes of Chaotic Uncertainty Correction. Proc. 18th IEEE International Conference on Control Applications, Part of 2009 IEEE Multi-conference on Systems and Control. July 8–10, 2009. Saint Petersburg, Russia. P. 878.
21. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления (3-е изд.). М.: Высшая школа, 2003.

*Саратовский государственный
университет (Балашовский филиал)
Борисоглебский государственный
педагогический институт*

*Поступила в редакцию 16.02.2011
После доработки 12.07.2011*

MULTIPARAMETRICAL ANALYSIS BASED ON MELNIKOV CRITERION AND OPTIMAL CHAOS SUPPRESSION IN PERIODICALLY DRIVEN DYNAMIC SYSTEMS

Y.V. Talagaev, A.F. Tarakanov

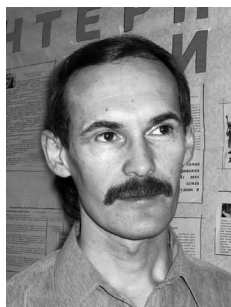
The results that illustrate the fruitfulness of the idea of optimal parametric correction for the analysis and optimization of the class of periodically driven chaotic systems are presented. Two problems that reveal the peculiarities of suppression of chaotic dynamics and present the method of regulation of the behavior of dissipative nonlinear oscillator were solved with the help of Melnikov criterion. The analytical results were compared to the solution of double-criteria problem that uses the conditions of Pontryagin maximum principle to find optimal parametric perturbations. The efficiency evaluations of various forms of parametric perturbations on the system found with the help of two independent methods correspond to each other.

Keywords: Multiparametrical analysis, nonlinear oscillators, optimal chaos suppression, Melnikov criterion, maximum principle.



Талагаев Юрий Викторович – родился в Балашове (1975). Окончил физико-математический факультет Балашовского государственного педагогического института (1997). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата педагогических наук в СГУ (2000) в области приложений системно-синергетического подхода к современным образовательным технологиям. Доцент кафедры физики Балашовского филиала Саратовского государственного университета (с 2004). Область научных интересов: моделирование и оптимизация сложных систем, управление хаосом, многопараметрическая коррекция динамических систем. Автор 48 научных статей в отечественной и зарубежной печати. Принял участие в нескольких международных конференциях. Член Международного общества физики и управления (IPACS, 2007).

412300 Балашов, ул. Карла Маркса, 29
Балашовский филиал Саратовского государственного университета
им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shangyi@narod.ru



Тараканов Андрей Федорович – родился в Рыбинске Ярославской области (1959). Окончил физико-математический факультет Борисоглебского государственного педагогического института (1982). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1989) и доктора физико-математических наук (1996) в Вычислительном центре АН в области управления динамическими системами в условиях неопределенности, профессор (с 2000). Профессор кафедры прикладной математики и информатики Борисоглебского государственного педагогического института (с 2003). Научные интересы связаны с математической теорией оптимального управления в условиях неопределенности, оптимальной коррекцией динамических систем с неустойчивой и хаотической динамикой, теорией коалиционных и иерархических игр. Автор более 80 научных работ. Состоит в Обществе прикладной математики и механики (GAMM), член Международного общества физики и управления (IPACS), член-корреспондент Российской Академии Естествознания. Осуществляет подготовку аспирантов по специальности «Теоретические основы информатики».

397140 Борисоглебск, ул. Народная, 43
Борисоглебский государственный педагогический институт
E-mail: aft777@rambler.ru