



СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ПОРЯДКА В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ ШУМОИНДУЦИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР

С.Е. Курушина, Л.И. Громова, В.В. Максимов

Аналитически исследована с точки зрения концепции параметров порядка эволюция пространственных диссипативных структур, возникающих во флуктуирующей возбудимой среде. В качестве модели такой среды рассматривается система реакция–диффузия, находящаяся во внешних шумах. Разработан метод получения стохастических уравнений для амплитуд неустойчивых мод (параметров порядка) и дисперсионных уравнений для усредненных по статистическому ансамблю амплитуд неустойчивых мод. Получено уравнение Фоккера–Планка для параметров порядка, в явном виде найдено его решение для одной критической моды. Развитая теория позволяет проанализировать шумоиндуцированные эффекты, в том числе изменение границ фазового перехода «беспорядок–порядок–беспорядок», в зависимости от параметров внешнего шума.

Ключевые слова: Пространственные диссипативные структуры, внешние шумы, фазовые переходы, параметры порядка.

Введение

Шумы присутствуют в реальных системах любого типа. Влияние внешних шумов на открытые нелинейные распределенные системы весьма разнообразно и иногда приводит к совершенно неожиданным результатам. Известно, что в таких системах могут возникать шумоиндуцированные пространственные структуры и фронты, шумоиндуцированные фазовые переходы, пространственно-временной стохастический резонанс, поддерживаемые шумом бегущие и конвективные структуры, импульсы, шумоиндуцированная синхронизация [1,2] и т. д.

Теоретическое исследование пространственно-временной динамики нелинейных открытых распределенных систем осуществляется различными методами [2]. Устойчивость однородного состояния относительно малых возмущений может быть проанализирована в линейном приближении. Однако линейное приближение неприемлемо для описания эволюции системы в окрестности порога самоорганизации, так как само это явление представляет собой существенно нелинейный эффект. Существует подход к исследованию шумоиндуцированных явлений, основанный на широко известном приближении среднего поля. В этом приближении предполагается,

что взаимодействие между некоторой пространственной точкой и ее ближайшими соседями происходит посредством среднего поля, значение которого соответствует статистически среднему в данной точке. При этом подходящим способом осуществляется дискретизация пространства исходной распределенной системы и для значений поля в точках полученной регулярной решетки записывается уравнение Фоккера–Планка (УФП) для многомерной плотности распределения вероятности. Интегрирование уравнения по значениям поля во всех точках, кроме данной, приводит к УФП для одномерной плотности распределения вероятности значения поля в данной точке. В последнем уравнении условные средние значения поля в соседних точках заменяются средним полем в данной точке. Этот подход успешно применен для исследования различных моделей [3–7] и позволяет объяснить возникновение в них шумоиндуцированной последовательности упорядочивающего и разупорядочивающего фазовых переходов. Преимущество этого подхода заключается в том, что он позволяет описывать поведение системы вдали от точки перехода [7]. Однако при этом с необходимостью возникает вопрос о корректной дискретизации непрерывного пространства изучаемой системы и пространственной компоненты функции корреляции шума. К недостаткам данного подхода следует отнести и тот факт, что стационарное решение полученного УФП может быть записано только формально, поэтому для его нахождения требуется привлечение численных методов. Отметим также, что приближение среднего поля не применимо в окрестности точки перехода.

Еще один аналитический подход к исследованию фазовых переходов с образованием пространственных структур основан на получении обобщенных уравнений Гинзбурга–Ландау для параметров порядка рассматриваемых систем. Этот подход позволяет описывать поведение системы в окрестности точки перехода. Метод получения обобщенных уравнений Гинзбурга–Ландау для рассматриваемых систем, в правой части которых содержатся аддитивные шумы, описан в [8,9]. Он основан на разделении собственных мод системы на затухающие и незатухающие (параметры порядка) и дальнейшем исключении затухающих. Однако в результате такого подхода снова получают стохастические уравнения, что мало упрощает анализ поведения систем. Кроме того, в [8,9] не рассматривалась ситуация, когда в системах присутствуют мультипликативные шумы.

Целью этой работы является развитие теории, позволяющей с единой точки зрения концепции параметров порядка провести последовательное и детальное изучение процессов образования пространственных диссипативных структур (паттернов), спонтанно возникающих в открытых нелинейных распределенных системах с внешними шумами как в окрестности, так и вдали от точки перехода. Разработанные аналитические методы применены для исследования шумоиндуцированных явлений, возникающих в конкретной модели.

1. Стохастические уравнения для параметров порядка

Система реакционно-диффузионного типа

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = P_k(x_1, x_2, x_3, \dots, \mathbf{r}, \vec{\eta}, t) + D_k \nabla^2 x_k, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

является одной из основных моделей неравновесной возбудимой среды. Здесь x_k – ее функции состояния (динамические переменные); $P_k(x_1, x_2, x_3, \dots, \mathbf{r}, \vec{\eta}, t)$ – функциональные зависимости, определяющие взаимодействие и эволюцию компонент x_k в

пространстве и во времени; D_k – коэффициенты диффузии компонент; $\vec{\eta} = (\chi_1, \dots, \chi_n, \eta_1, \dots, \eta_s)$ – вектор, компоненты которого являются управляющими параметрами, описывающими воздействие на систему внешнего окружения. Далее без потери общности будет рассматриваться двухкомпонентная система вида (1). Предлагаемый ниже метод исследования легко распространяется на многокомпонентный случай.

В присутствии внешних флуктуирующих полей пространственно-временная динамика неравновесной системы (1) для $k = 2$ может быть описана следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= P_1(x_1, x_2, \chi_{10}, \dots, \chi_{m0}, \dots, \chi_n) + \sum_{j=1}^m f_{1j}(\mathbf{r}, t) P_{1j}(x_1, x_2, \chi_{m+1}, \dots, \chi_{n'}) + D_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= P_2(x_1, x_2, \eta_{10}, \dots, \eta_{l0}, \dots, \eta_s) + \sum_{j=1}^l f_{2j}(\mathbf{r}, t) P_{2j}(x_1, x_2, \eta_{l+1}, \dots, \eta_{s'}) + D_2 \nabla^2 x_2,\end{aligned}\quad (2)$$

где m и l – число флуктуирующих параметров в первом и втором уравнениях соответственно; χ_{j0}, η_{j0} – пространственно-временные средние параметров; $f_{ij}(\mathbf{r}, t)$ ($i = 1, 2$) – случайные поля, описывающие шумы соответствующих параметров относительно их средних значений, причем $\langle f_{ij}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$.

Определим статистические характеристики случайных полей $f_{ij}(\mathbf{r}, t)$ в соответствии со свойствами окружающей среды. Флуктуации окружения представляют собой суммарный эффект действия многих слабосвязанных факторов. Тогда из центральной предельной теоремы следует, что флуктуации внешнего источника имеют гауссово распределение. Свойства эргодичности, марковости и гауссовости флуктуирующего окружения ограничивает выбор случайных полей для моделирования флуктуаций окружающей среды в (2) стационарным однородным изотропным гауссовым полем с экспоненциальной во времени функцией корреляции [10]:

$$K [f_{ij}(\mathbf{r}, t), f_{i'j'}(\mathbf{r}', t')] = \Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \exp(-k_{ti} |t - t'|) \delta_{ii'} \delta_{jj'}, \quad (3)$$

где $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ задают пространственные зависимости функций корреляции случайных полей. Взаимная корреляция полей $f_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и $f_{i'j'}(\mathbf{r}, t)$ отсутствует. Время корреляции $r_t = k_t^{-1}$ – характерный временной масштаб внешних флуктуаций. Здесь и далее для корреляционной функции используется обозначение $K[F_1, F_2]$, определяемое равенством: $K[F_1, F_2] = \langle F_1 F_2 \rangle - \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle$.

Положим далее для простоты $m = l = 1$ и введем безразмерные переменные: $\tau = \chi_{10} t$ и $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\chi_{10}/D_1}$, где χ_{10} – параметр, имеющий размерность обратного времени. Тогда система (2) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= P'_1(x_1, x_2, \chi_{10}, \dots, \chi_n) + f_{11}(\mathbf{r}', \tau) P'_{11}(x_1, x_2, \chi_2, \dots, \chi_{n'}) + \nabla'^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= P'_2(x_1, x_2, \eta_{10}, \dots, \eta_s) + f_{21}(\mathbf{r}', \tau) P'_{21}(x_1, x_2, \eta_2, \dots, \eta_{s'}) + D \nabla'^2 x_2.\end{aligned}\quad (4)$$

Функции со штрихом отличаются от соответствующих функций без штриха множителем χ_{10}^{-1} , $D = D_2/D_1$. Далее везде штрихи опущены.

Пусть в детерминированном случае значения параметров $\chi_1, \dots, \chi_n, \eta_1, \dots, \eta_s$ таковы, что существуют устойчивые состояния равновесия x_{10} и x_{20} , определяемые уравнениями $P_1(x_1, x_2, \chi_1, \dots, \chi_n) = 0$ и $P_2(x_1, x_2, \eta_1, \dots, \eta_s) = 0$.

Запишем систему (4) в операторном виде, выделив из ее правой части линейную $K(\nabla^2)\mathbf{q}$, нелинейную $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ и случайную $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau)$ компоненты.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} - K(\nabla^2)\mathbf{q} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau). \quad (5)$$

Вектор \mathbf{q} описывает отклонения динамических переменных от равновесных значений: $\mathbf{q} = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$. Линейный оператор $K(\nabla^2)$ имеет вид

$$K(\nabla^2) = \begin{pmatrix} a_{11} + \nabla^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + D\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \left. \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right|_{x_{10}, x_{20}}, \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

Вектор $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ содержит квадратичные и кубические нелинейности, полученные разложением в ряд правой детерминированной части (4). Его компоненты определяются следующим образом:

$$g_i(\mathbf{q}) = \sum_{\mu, \nu=1}^2 g_{i, \mu\nu}^{(2)} q_\mu q_\nu + \sum_{\mu, \nu, \kappa=1}^2 g_{i, \mu\nu\kappa}^{(3)} q_\mu q_\nu q_\kappa, \quad (7)$$

$$\text{где } g_{i, \mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 P_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right|_{x_{10}, x_{20}}, \quad g_{i, \mu\nu\kappa}^{(3)} = \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 P_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\kappa} \right|_{x_{10}, x_{20}}.$$

Вектор \mathbf{F} содержит случайные поля

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11}(\mathbf{r}, \tau) P_{11}(x_1, x_2, \chi_2, \dots, \chi_{n'}) \\ f_{21}(\mathbf{r}, \tau) P_{21}(x_1, x_2, \eta_2, \dots, \eta_{s'}) \end{pmatrix}.$$

При исследовании устойчивости стационарного состояния детерминированной системы будем полагать, что вектор \mathbf{q} имеет вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda\tau + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$, имеет решения

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{k}) = \frac{\alpha(k) \pm \sqrt{\alpha^2(k) - 4\beta(k)}}{2}, \quad (8)$$

где $\alpha(k) = Tr(a_{ij}) - (1 + D)k^2$, $\beta(k) = Det(a_{ij}) - (Da_{11} + a_{22})k^2 + Dk^4$.

Условие $\alpha(k) < 0$, $\beta(k) \leq 0$ приводит к апериодической неустойчивости (неустойчивости Тьюринга типа мягкой моды), то есть появлению одного положительного действительного корня (8): $Re(\lambda_1) \geq 0$, $Im(\lambda_{1,2}) = 0$. Ниже будем рассматривать только этот случай.

Положим, что один из параметров $\chi_1, \dots, \chi_n, \eta_1, \dots, \eta_s$, например, χ_2 является бифуркационным, то есть при некотором критическом значении этого параметра χ_{2c} существует критическое значение волнового числа k_c , при котором выполняются условия $Re(\lambda_1(k_c)) = 0$, $\left. \frac{d(Re\lambda_1(k))}{dk} \right|_{k=k_c} = 0$.

Представим вектор \mathbf{q} в виде суперпозиции по собственным формам оператора $K(\nabla^2)$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{\mathbf{k}', j} \mathbf{O}^{(j)}(\mathbf{k}') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j)}(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (9)$$

где $\mathbf{O}^{(j)}(\mathbf{k})$ – собственные векторы оператора $K(\nabla^2)$, $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$ – неизвестные амплитуды, $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ – собственные функции оператора ∇^2 . Здесь предполагается, что вектор $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \tau)$ представляет суперпозицию плоских волн. Однако в зависимости от симметрии задачи в качестве собственных функций оператора ∇^2 нужно выбирать функции Бесселя или сферические волновые функции.

Вектор \mathbf{F} содержит нелинейные функции P_{i1} , которые необходимо разложить в ряд Тейлора по степеням компонент вектора \mathbf{q} . Ограничимся в разложении P_{i1} квадратичными слагаемыми. Как показано в [11], слагаемые такого порядка необходимы для получения дисперсионных уравнений для усредненных амплитуд неустойчивых мод с точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивностям флуктуаций.

В результате компоненты вектора \mathbf{F} , содержащие случайные функции, приобретают вид

$$F_i = f_{i1}(\mathbf{r}, \tau) \left[p_i^{(0)} + \sum_{\mu=1}^2 p_{i,\mu}^{(1)} q_\mu + \sum_{\mu,\nu=1}^2 p_{i,\mu\nu}^{(2)} q_\mu q_\nu \right],$$

где $p_i^{(0)} = P_{i1}(x_{10}, x_{20})$, $p_{i,\mu}^{(1)} = \left. \frac{\partial P_{i1}}{\partial x_\mu} \right|_{x_{10}, x_{20}}$, $p_{i,\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 P_{i1}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right|_{x_{10}, x_{20}}$.

Неустойчивые моды заключены в узкой полосе значений волновых векторов, определяющей область неустойчивости системы. Это дает возможность построить волновые пакеты путем суммирования по волновым векторам, заключенным в малых интервалах. Таким образом, выделяются несущие моды с дискретными значениями волновых векторов и медленно меняющимися амплитудами $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$.

Чтобы получить уравнения для амплитуд мод $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$ подставим (9) в (5), умножим полученное уравнение слева на $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \mathbf{O}^{*(j')}(\mathbf{k})$ и проинтегрируем по области, значительно большей периода осцилляций $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, но в которой $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$ меняется очень мало. Здесь $\mathbf{O}^{*(j')}(\mathbf{k})$ – собственные векторы оператора, сопряженного к $K(\nabla^2)$: $\mathbf{O}^{(j)} \mathbf{O}^{*(j')} = \delta_{jj'}$.

После преобразований система уравнений для амплитуд мод $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}}{d\tau} - \lambda_j(\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}}^{(j)} &= \sum_{j'j'', \mathbf{k}'\mathbf{k}''} \sigma_{j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) + \\ &+ \sum_{j'j''j''', \mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \sigma_{j'j''j'''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} \xi_{\mathbf{k}'''}^{(j''')} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}) + \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 O_\varphi^{*(j)}(\mathbf{k}) p_\varphi^{(0)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{j', \mathbf{k}'} \varepsilon_{\varphi, j'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} z_{\varphi, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau) + \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{j'j'', \mathbf{k}'\mathbf{k}''} \varepsilon_{\varphi, j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} z_{\varphi, \mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''}(\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Функции $\sigma_{j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$, $\sigma_{j'j''j'''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''')$, $\varepsilon_{\varphi,j'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, $\varepsilon_{\varphi,j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$, введенные в уравнениях (10), представлены в Приложении. Случайные процессы $z_{\varphi,\mathbf{k}}(\tau) = \int f_{\varphi 1}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}$ – компоненты случайного векторного поля $\mathbf{z}(\tau)$, имеющие нулевые средние; φ и \mathbf{k} – индексные аргументы этого поля. В предположении, что времена корреляций случайных полей гораздо меньше всех характерных времен детерминированной задачи (4), корреляционные функции для компонент поля $\mathbf{z}(\tau)$ будут иметь вид $\langle z_{j,\mathbf{k}}(t) z_{l,\mathbf{k}'}(\tau) \rangle = g_{jl}(|\mathbf{k}|) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(t - \tau) \delta_{jl}$ [12]. Положим далее для определенности

$$\Phi_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \theta_j \exp(-k_{fj} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (11)$$

Здесь θ_j – интенсивности шумов; k_{fj} – величины, обратные радиусам корреляций. Для одномерной среды $g_{jj} = 2\theta_j k_{fj} / (k^2 + k_{fj}^2)^{1/2}$.

Система (10) содержит как устойчивые (затухающие), так и неустойчивые (незатухающие) моды. В окрестности точки бифуркации время релаксации незатухающих мод значительно больше времени релаксации затухающих, поэтому последние адиабатически следуют за первыми. Это дает возможность исключить из уравнений (10) затухающие моды.

Чтобы провести процедуру адиабатического исключения устойчивых мод, перепишем (10), выделив из нее две подсистемы уравнений: для неустойчивых мод (обозначим их дополнительным индексом « u ») и для устойчивых « s ». Поскольку незатухающие моды, если пренебречь нелинейными членами, могут нарастать до бесконечности, уравнения для них запишем с точностью до кубических слагаемых, обеспечивающих нелинейную стабилизацию неустойчивости.

Естественно считать, что амплитуды устойчивых мод много меньше амплитуд неустойчивых мод $|\xi_s| \ll |\xi_u|$ и их изменения происходят согласованным образом: $\xi_s \sim \xi_u^2$.

В уравнениях для амплитуд устойчивых мод оставим только члены, необходимые для получения уравнений для амплитуд неустойчивых мод с точностью до членов третьего порядка. Тогда из (10) для амплитуд устойчивых мод получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\mathbf{k}s}^{(j)}}{d\tau} - \lambda_j(\mathbf{k}_s) \xi_{\mathbf{k}s}^{(j)} &= \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u} \sigma_{11}^{(j)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_s) + \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(j)}(\mathbf{k}_s) p_{\varphi}^{(0)} z_{\varphi, \mathbf{k}s}(\tau) + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u} \varepsilon_{\varphi,1}^{(j)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}s - \mathbf{k}'_u}(\tau) + \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u} \varepsilon_{\varphi,11}^{(j)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}s - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u}(\tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения для амплитуд неустойчивых мод будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u)\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} &= \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u\mathbf{k}'''_u} \sigma_{111}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u)p_{\varphi}^{(0)}z_{\varphi,\mathbf{k}u}(\tau) + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u} \varepsilon_{\varphi,1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u}(\tau) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u} \varepsilon_{\varphi,11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u-\mathbf{k}''_u}(\tau) + \\
&+ \sum_{\psi,\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}_s} \varepsilon_{\varphi,\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s)\xi_{\mathbf{k}_s}^{(\psi)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}_s}(\tau) + \\
&+ \sum_{\psi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}_s} (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u))\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}_s}^{(\psi)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\psi,\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}_s} (\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u))\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}_s}^{(\psi)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u-\mathbf{k}_s}(\tau).
\end{aligned} \tag{13}$$

В случае аperiодической неустойчивости при исключении $\xi_{\mathbf{k}_s}^{(j)}$ из уравнений (13), в (12) можно пренебречь производной по времени $d\xi_{\mathbf{k}_s}^{(j)}/d\tau$ [8]. Выражая амплитуды $\xi_{\mathbf{k}_s}^{(j)}$ из (12) и подставляя их в (13), получим систему уравнений для амплитуд неустойчивых мод $\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}$

$$\frac{d\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}}{d\tau} = F_{\mathbf{k}u}(\tau), \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
F_{\mathbf{k}u}(\tau) &= \lambda_1(\mathbf{k}_u)\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} + \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u\mathbf{k}'''_u} \omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u)p_{\varphi}^{(0)}z_{\varphi,\mathbf{k}u}(\tau) - \sum_{\psi,\varphi,\varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}_s} \zeta_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s)z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}_s}(\tau)z_{\varphi',\mathbf{k}_s}(\tau) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u}(\tau) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u-\mathbf{k}''_u}(\tau) - \\
&- \sum_{\psi,\varphi,\varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}_s,\mathbf{k}'_u} A_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}z_{\varphi',\mathbf{k}_s-\mathbf{k}'_u}(\tau)z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}_s}(\tau) - \\
&- \sum_{\psi,\varphi,\varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}_s} B_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u-\mathbf{k}_s}(\tau)z_{\varphi',\mathbf{k}_s}(\tau) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}_s} C_{\varphi, \psi, \varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} z_{\varphi', \mathbf{k}_s - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u}(\boldsymbol{\tau}) z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}_s}(\boldsymbol{\tau}) - \\
& - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}_s} D_{\varphi, \psi, \varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}_s}(\boldsymbol{\tau}) z_{\varphi', \mathbf{k}_s - \mathbf{k}''_u}(\boldsymbol{\tau}) - \\
& - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}'''_u} E_{\psi, \varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}'''_u}(\boldsymbol{\tau}) - \\
& - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}'''_u} F_{\psi, \varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}'''_u}(\boldsymbol{\tau}) - \\
& - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}'''_u \mathbf{k}_s} G_{\psi, \varphi, \varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}_s}(\boldsymbol{\tau}) \times \\
& \quad \times z_{\varphi', \mathbf{k}_s - \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}'''_u}(\boldsymbol{\tau}).
\end{aligned}$$

Функция $\omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)$ и другие, введенные в уравнениях (14), представлены в Приложении. Моды $\xi_{\mathbf{k}_u}^{(1)}$ служат параметрами порядка. Их кооперация или конкуренция определяют вид возникающих структур.

Система уравнений (14) все еще сложна для анализа, так как содержит случайные компоненты. Дальнейший анализ уравнений (14) может заключаться или в усреднении их по ансамблю реализаций, или в получении УФП.

2. Усреднение по ансамблю реализаций

При усреднении по ансамблю реализаций используется связь между моментами и корреляторами [13] и многомерное обобщение формулы Фурутцу–Новикова [14]. Принимая во внимание формальные решения системы уравнений (14) и допуская, что можно пренебречь корреляторами выше второго порядка, можно показать [11], что в уравнениях (14) нужно отбросить слагаемые, содержащие $\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_1}(\boldsymbol{\tau}) z_{\varphi', \mathbf{k}_2}(\boldsymbol{\tau})$ и $\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau})$, так как при усреднении они не дают вклад в средние значения мод $\xi_{\mathbf{k}_u}^{(1)}$.

Отметим здесь, что процедура раскрытия корреляторов будет приводить к появлению аналогичных корреляторов для других взаимодействующих мод. Поэтому эту процедуру нужно проводить до тех пор, пока не будут учтены все слагаемые, содержащие необходимую степень интенсивности флуктуаций. Остальными корреляторами можно пренебречь ввиду их малости, так как после их раскрытия получатся слагаемые, пропорциональные более высокой степени интенсивности шума.

Чтобы после усреднения получить поправки к инкрементам $\lambda_1(\mathbf{k}_u)$ амплитуд неустойчивых мод с точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивности шума, при вычислении вариационных производных, входящих в формулу Фурутцу–Новикова, необходимо сохранять слагаемые, содержащие произведения $\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau})$.

Ниже приводится только структура полученных в результате усреднения уравнений, так как они имеют очень громоздкий вид,

$$\begin{aligned}
\frac{d \langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u) \langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle = & \mathbf{L}_0(\mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) \langle \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \rangle + \\
& + \mathbf{L}_2(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_s) \langle \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} \rangle + \\
& + \mathbf{L}_3(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_u^{IV}, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_s) \langle \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}^{IV}_u}^{(1)} \rangle.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подробный вывод уравнения (15), а также вид операторов $\mathbf{L}_0(\mathbf{k}_u)$ и $\mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$ можно найти в [11]. Анализ уравнений (15) приводит к следующим заключениям.

Во-первых, после усреднения системы (14) в (15) возникают дополнительные слагаемые, не зависящие от $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle$. Они определяются параметрами задачи, видом корреляционной функции g_{jj} , интенсивностью шума и волновым числом данной моды.

Во-вторых, в системе (15) возникают дополнительные слагаемые, пропорциональные $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle$, что приводит к изменению инкрементов усредненных амплитуд неустойчивых мод в сравнении с детерминированным случаем. Следствием этого является изменение области неустойчивости системы и изменение скорости разрушения статистически стационарного однородного состояния и формирования структур.

Выделив из $\mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$ слагаемые, дающие вклад в инкремент $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle$, получим дисперсионное уравнение

$$\lambda = \lambda_1(\mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, -\mathbf{k}_u). \tag{16}$$

При выводе уравнения (16) учтено, что $\xi_{-\mathbf{k}u}^{(1)} = \xi_{\mathbf{k}u}^{*(1)} = \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}$, так как решения уравнений (14) должны быть действительными. Из уравнения (16) и выражений для $\mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$ и g_{ii} следует, что инкременты усредненных амплитуд неустойчивых мод пропорциональны интенсивности шума и зависят от его радиуса корреляции. При этом интенсивность шума становится еще одним бифуркационным параметром и структуры начинают формироваться при значении параметра $\chi_{2\theta}$ отличном от χ_{2c} . Как показывает исследование конкретных систем $\chi_{2\theta} > \chi_{2c}$, то есть значение бифуркационного параметра χ_2 смещается в докритическую область.

Наконец, обратим внимание на то, что во внешних случайных полях, процесс образования диссипативных структур происходит за счет многомодового взаимодействия, при котором условия резонансного взаимодействия мод также отличаются от детерминированного случая. В частности, возникает взаимодействие различных конфигураций мод с модами, имеющими удвоенные волновые числа, например, $2\mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u = \mathbf{k}_u$.

Таким образом, приведенный выше теоретический анализ позволяет более детально описать эволюцию рассматриваемых стохастических систем в окрестности точки бифуркации Тьюринга.

3. Уравнение Фоккера–Планка для параметров порядка

Если параметры системы таковы, что она находится в закритической области ($\chi_2 < \chi_{2c}$), то с увеличением интенсивности шума система будет «уходить» все дальше от точки бифуркации детерминированной системы. При этом для описания состояния системы нужно применять УФП.

Для системы (14) УФП может быть представлено в общем виде следующим образом [15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w \left(\left\{ \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \right\}, \tau \right)}{\partial \tau} = & - \sum_{\mathbf{k}u} \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}} \left\{ \left(\langle F_{\mathbf{k}u}(\tau) \rangle + \sum_{\mathbf{q}u} \int_{-\infty}^0 K \left[\frac{\partial F_{\mathbf{k}u}(\tau)}{\partial \xi_{\mathbf{q}u}^{(1)}}, F_{\mathbf{q}u}(t') \right] dt' \right) w \right\} + \\ & + \sum_{\mathbf{k}u, \mathbf{q}u} \frac{\partial^2}{\partial \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \partial \xi_{\mathbf{q}u}^{(1)}} \left\{ \left(\int_{-\infty}^0 K [F_{\mathbf{k}u}(\tau), F_{\mathbf{q}u}(t')] dt' \right) w \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $w \left(\left\{ \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \right\}, \tau \right)$ – многомерная плотность распределения вероятности, определяющая вероятность некоторой конфигурации неустойчивых мод $\left\{ \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \right\}$. После преобразований с точностью до членов, линейных по интенсивностям шумов, можно получить корреляционные функции, входящие в (17),

$$\begin{aligned} K \left[\frac{\partial F_{\mathbf{k}u}(\tau)}{\partial \xi_{\mathbf{q}u}^{(1)}}, F_{\mathbf{q}u}(t') \right] = & \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{q}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u|) \delta_{\mathbf{k}u - \mathbf{q}u, \mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi} [\nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u) + \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_u)] \times \\ & \times O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{q}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u|) \xi_{\mathbf{k}u - 2\mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, 2\mathbf{q}_u - \mathbf{k}_u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u|) \xi_{2\mathbf{q}u - \mathbf{k}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'u} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u) \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'u, 2\mathbf{q}_u - \mathbf{k}_u - \mathbf{q}'u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u|) \xi_{\mathbf{q}'u} \xi_{2\mathbf{q}u - \mathbf{k}u - \mathbf{q}'u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'u, \mathbf{q}''u} [\nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u + \mathbf{q}'u + \mathbf{q}''u) + \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u + \mathbf{q}'u + \mathbf{q}''u, \mathbf{q}_u)] \times \\ & \times \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'u, \mathbf{q}''u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'u - \mathbf{q}''u|) \xi_{\mathbf{q}'u} \xi_{\mathbf{q}''u} \xi_{\mathbf{k}u - 2\mathbf{q}u + \mathbf{q}'u + \mathbf{q}''u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'u} \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'u) [\nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u + \mathbf{q}'u, \mathbf{q}_u) + \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u + \mathbf{q}'u)] \times \\ & \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'u|) \xi_{\mathbf{q}'u} \xi_{\mathbf{k}u - 2\mathbf{q}u + \mathbf{q}'u} \delta(\tau - t'), \\ \\ K [F_{\mathbf{k}u}(\tau), F_{\mathbf{q}u}(t')] = & \sum_{\varphi} \left(O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) \right)^2 \left(p_{\varphi}^{(0)} \right)^2 g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u|) \delta_{\mathbf{k}u, \mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{q}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u|) \xi_{\mathbf{k}u - \mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi, \mathbf{k}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'u - \mathbf{q}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{q}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u|) \xi_{\mathbf{k}'u} \xi_{\mathbf{k}u - \mathbf{k}'u - \mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_u - \mathbf{k}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u|) \xi_{\mathbf{q}_u - \mathbf{k}_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u|) \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{k}', \mathbf{q}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u) \times \\
& \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u|) \xi_{\mathbf{k}'_u} \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u|) \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{k}', \mathbf{q}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u) \times \\
& \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u|) \xi_{\mathbf{k}'_u} \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u, \mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{k}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u|) \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{k}_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{k}', \mathbf{q}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u, \mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{k}_u + \mathbf{k}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) \times \\
& \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u|) \xi_{\mathbf{k}'_u} \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{k}_u + \mathbf{k}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{k}', \mathbf{q}', \mathbf{q}''} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u + \mathbf{q}''_u) \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u, \mathbf{q}''_u) \times \\
& \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{q}''_u|) \xi_{\mathbf{k}'_u} \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{q}''_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u + \mathbf{q}''_u} \delta(\tau - t').
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай одномерного пространства. Если в одномерном пространстве неустойчива только одна мода с волновым вектором \mathbf{k}_c и амплитудой $\xi_{\mathbf{k}_c}$, уравнение (17) существенно упрощается:

$$\frac{\partial w(\xi_{\mathbf{k}_c}, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{k}_c}} \left\{ (a \xi_{\mathbf{k}_c} + b \xi_{\mathbf{k}_c}^3) w - (c + d \xi_{\mathbf{k}_c}^2 + e \xi_{\mathbf{k}_c}^4) \frac{\partial w}{\partial \xi_{\mathbf{k}_c}} \right\}. \quad (18)$$

Здесь

$$a = \lambda_1(\mathbf{k}_c) - \frac{1}{2} \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}^2(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) g_{\varphi\varphi}(0) - \sum_{\varphi} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_c) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c),$$

$$b = \omega(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, 0) - \sum_{\varphi} \nu_{\varphi}^2(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c),$$

$$c = \frac{1}{2} \sum_{\varphi} \left(O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_c) p_{\varphi}^{(0)} \right)^2 g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c),$$

$$d = \frac{1}{2} \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}^2(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) g_{\varphi\varphi}(0) + \sum_{\varphi} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_c) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c),$$

$$e = \frac{1}{2} \sum_{\varphi} \nu_{\varphi}^2(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c).$$

Стационарное решение уравнения (18) имеет вид

$$w(\xi_{kc}) = \begin{cases} N |c + d\xi_{kc}^2 + e\xi_{kc}^4|^{\frac{b}{4e}} \left| \frac{2e\xi_{kc}^2 + d - \sqrt{d^2 - 4ec}}{2e\xi_{kc}^2 + d + \sqrt{d^2 - 4ec}} \right|^{\frac{2ae-bd}{4e\sqrt{d^2-4ec}}}, & d^2 > 4ec, \\ N |c + d\xi_{kc}^2 + e\xi_{kc}^4|^{\frac{b}{4e}} \exp \left\{ \frac{2ae - bd}{2e\sqrt{4ec - d^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2e\xi_{kc}^2 + d}{\sqrt{4ec - d^2}} \right) \right\}, & 4ec > d^2. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь N – нормировочная постоянная

$$N = \begin{cases} 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} |c + d\xi_{kc}^2 + e\xi_{kc}^4|^{\frac{b}{4e}} \left| \frac{2e\xi_{kc}^2 + d - \sqrt{d^2 - 4ec}}{2e\xi_{kc}^2 + d + \sqrt{d^2 - 4ec}} \right|^{\frac{2ae-bd}{4e\sqrt{d^2-4ec}}} d\xi_{kc}, & d^2 > 4ec, \\ 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} |c + d\xi_{kc}^2 + e\xi_{kc}^4|^{\frac{b}{4e}} \exp \left\{ \frac{2ae - bd}{2e\sqrt{4ec - d^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2e\xi_{kc}^2 + d}{\sqrt{4ec - d^2}} \right) \right\} d\xi_{kc}, & 4ec > d^2. \end{cases} \quad (20)$$

Преимущество развитого подхода при выводе уравнений (17), (18) в сравнении с подходом, изложенным в [7], заключается в том, что стационарное решение УФП записывается в явном виде. Этот подход применим к более широкому классу функций $P_{1j}(x_1, x_2, \chi_{m+1}, \dots, \chi_{n'})$, $P_{2j}(x_1, x_2, \eta_{l+1}, \dots, \eta_{s'})$, в том числе и имеющих разрыв второго рода. Кроме того, предложенный подход не содержит произвольного элемента, связанного с дискретизацией непрерывного пространства системы.

4. Шумоиндуцированные эффекты в одной экологической системе

Теория, изложенная в разделах 1–3, была применена для исследования влияния внешних шумов на экологическую систему «фитопланктон–зоопланктон–рыба». Математическая модель этой системы имеет вид [16,17]

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= rx_1(1 - x_1) - \frac{ax_1}{1 + bx_1}x_2 + D_1\nabla^2x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \frac{ax_1}{1 + bx_1}x_2 - mx_2 - \frac{g^2x_2^2}{1 + h^2x_2^2}f + D_2\nabla^2x_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где x_1, x_2 – плотности биомассы фитопланктона и зоопланктона соответственно, параметры r, a, b, m, g, h, f, D_1 и D_2 подробно описаны в [16,17]. Параметр f определяет постоянную численность планктоноядной рыбы. Исследование локальной динамики и бифуркационный анализ системы (21) проведены в работах [16–20].

Введем безразмерные время $\tau = rt$ и координаты $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\sqrt{r/D_1}$ и представим параметры m/r и a/r , зависящие от коэффициентов естественного прироста фитопланктона r , естественной смертности зоопланктона m и трофического коэффициента a , в виде: $m/r = (m_0/r_0)(1 + f_1(\mathbf{x}', \tau))$, $a/r = (a_0/r_0)(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau))$. Здесь m_0, r_0, a_0 – пространственно-временные средние соответствующих коэффициентов, случайные однородные изотропные поля $f_i(\mathbf{x}', \tau)$ определяют пространственно-временные

гауссовы флуктуации этих параметров и имеют нулевые средние значения и корреляторы вида (3), (11). Параметр m_0 в этой работе выбран в качестве бифуркационного.

С учетом шумов получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= x_1(1 - x_1) - \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau)) \frac{x_1 x_2}{(1 + b x_1)} + \nabla'^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau)) \frac{x_1 x_2}{(1 + b x_1)} - \\ &- \frac{m_0}{r_0}(1 + f_1(\mathbf{x}', \tau)) x_2 - \frac{g^2 x_2^2}{r_0(1 + h^2 x_2^2)} f + \frac{D_2}{D_1} \nabla'^2 x_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Для системы (22) получено дисперсионное уравнение для средних амплитуд неустойчивых мод вида (16) [21]. Зависимости действительной части собственных значений от волновых чисел представлены на рис. 1. Из рис. 1, *a* и *b* видно, что в закритической области ($m_0 < m_{0c}$) при увеличении интенсивностей внешних шумов θ_1 и θ_2 , область неустойчивости, в которой $\text{Re } \lambda > 0$, увеличивается и абсолютное значение инкрементов средних амплитуд неустойчивых мод в присутствии шума больше, чем при $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Следовательно, при наличии мультипликативного шума амплитуды неустойчивых мод в среднем нарастают значительно быстрее, чем в его отсутствии, что ускоряет процесс образования пространственных диссипативных структур по сравнению с детерминированной системой.

На рис. 1, *в* приведены зависимости $\text{Re } \lambda(k)$ в докритической области ($m_0 > m_{0c}$). Сплошной линией показана соответствующая зависимость при отсутствии шума. Видно, что в этом случае неустойчивость не возникает. При наличии же шумов (линии пунктирная и пунктирная с точкой на рис. 1, *в*) возникает область, в которой $\text{Re } \lambda > 0$, то есть существует критическая интенсивность шума, при которой индуцируется параметрическая

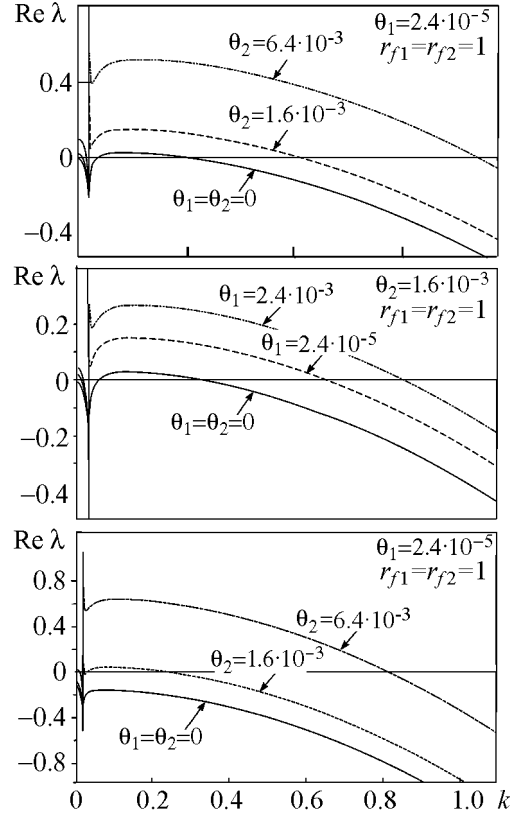


Рис. 1. Характерные зависимости действительных частей собственных значений $\text{Re } \lambda$ от волновых чисел k для системы (22): *a* – в закритической области ($m_0 = 0.49$) при изменении θ_2 , $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$; $\theta_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$; *б* – в закритической области при изменении θ_1 , $\theta_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$; *в* – в докритической области ($m_0 = 0.51$) при изменении θ_2 , $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$. Для сравнения значений $\text{Re } \lambda$ на рисунках приведены кривые при $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Другие параметры модели: $r_0 = 1$, $a_0 = 8$, $g = 1.434$, $f = 0.093$, $h = 0.857$, $b = 11.905$, $D_1/D_2 = 1000$. $r_{f1} = r_{f2} = 1$. Критическое значение бифуркационного параметра $m_{0c} = 0.50$

неустойчивость системы 22). Фазовый переход с образованием структур в присутствии шумов происходит в докритической области (то есть раньше, чем при детерминистическом описании).

Разрыв второго рода в зависимости $\text{Re } \lambda(k)$ обусловлен выбором компонент собственных векторов сопряженного оператора и не влияет на вышеприведенный анализ.

В докритической области состояние системы является однородным статистически стационарным. Этому соответствует одномодальная плотность распределения вероятности. Возникновение неоднородного статистически стационарного состояния проявляется в расщеплении максимума плотности распределения вероятности на два симметричных.

Для системы (22) было получено УФП для плотности распределения вероятности критической моды, имеющее вид (18). На рис. 2 представлено изменение плотности стационарного распределения вероятности этой моды при увеличении интенсивности шумов при переходе через точку бифуркации m_{0c} . Рис. 2, *a* иллюстрирует плотность распределения вероятности, соответствующую однородному статистически стационарному состоянию системы в докритической области. Рис. 2, *б-г*

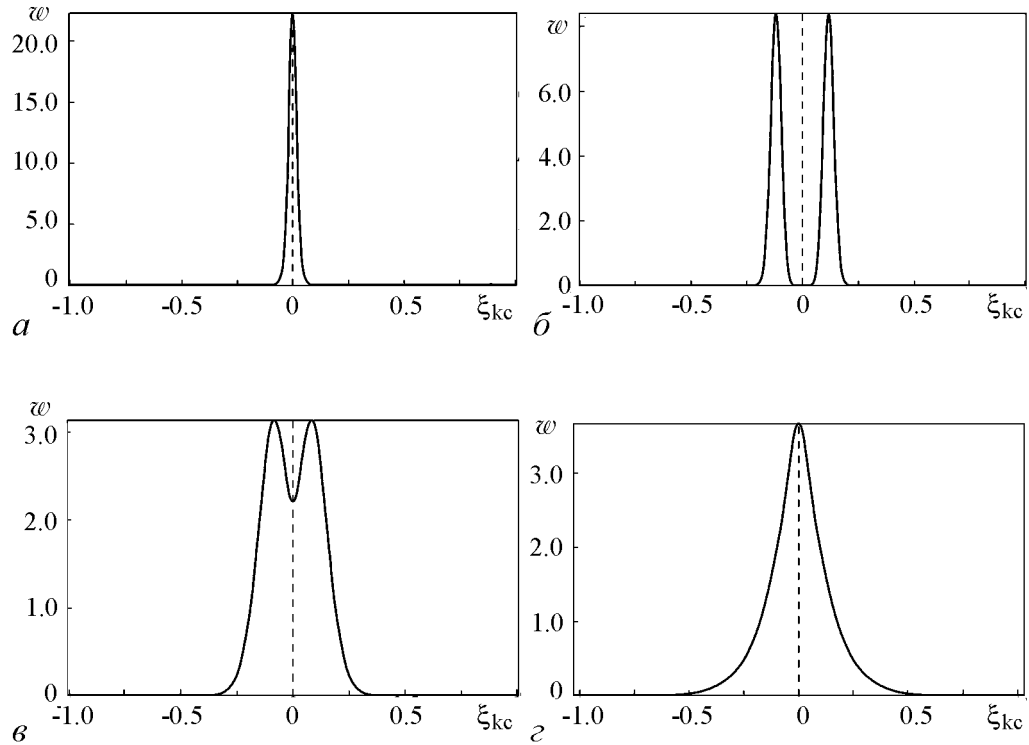


Рис. 2. Плотность стационарного распределения вероятности (19) для системы (22). *a* – Докритическая область: $m_0 = 0.51$, $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-4}$, $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$. *б* – Закритическая область: $m_0 = 0.49$, $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-5}$. *в* – Закритическая область: $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-4}$. *г* – Закритическая область $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-3}$. Другие параметры модели: $r_0 = 1$, $a_0 = 8$, $g = 1.434$, $f = 0.093$, $h = 0.857$, $b = 11.905$, $D_1/D_2 = 1000$. $r)f_1 = r_f_2 = 1$. Критическое значение бифуркационного параметра $m_{0c} = 0.50$

демонстрируют плотность распределения вероятности в закритической области при различных интенсивностях шума. Бимодальные распределения (см. рис. 2, б и в) соответствуют существованию диссипативных структур. При этом математическое ожидание параметра порядка становится отличным от нуля. Из этих рисунков видно, что при увеличении интенсивности шумов происходит постепенное слияние максимумов, и при втором критическом значении интенсивности шума система переходит в состояние сильно нерегулярного поведения (рис. 2, г). Таким образом, полученное изменение плотности стационарного распределения вероятности свидетельствует о существовании в системе (22) фазового перехода «беспорядок–порядок–беспорядок».

Следует заметить, что в работе [22] было проведено исследование влияния внешнего шума на систему Гирера–Майнхардта, являющуюся базовой в понимании процессов биологического формообразования и дифференциации клеток. Результаты исследований показали качественное совпадение особенностей динамического поведения этой системы с системой (22). Поэтому подобного поведения следует ожидать и от других систем реакция–диффузия в поле внешних шумов.

Заключение

С единой точки зрения концепции параметров порядка развита теория, позволяющая предсказывать и исследовать шумоиндуцированные эффекты, возникающие в системах реакция–диффузия во внешних шумах.

Получены стохастические уравнения для амплитуд неустойчивых мод (параметров порядка) и дисперсионные уравнения для усредненных по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод. Аналитически найдена зависимость инкрементов усредненных по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод от волнового числа, интенсивности и радиуса корреляции шума. Показано, что мультипликативные шумы параметров системы приводят к изменению собственных значений задачи, а также к расширению области неустойчивости системы, изменению условий резонансного взаимодействия мод, шумоиндуцированной параметрической неустойчивости (смещению точки бифуркации Тьюринга в докритическую область) и уменьшению времени разрушения статистически стационарного однородного состояния и спонтанного образования пространственных диссипативных структур при увеличении интенсивности внешнего шума.

Получено уравнение Фоккера–Планка для параметров порядка рассматриваемых систем. Показано, что в таких системах существует шумоиндуцированный фазовый переход «беспорядок–порядок–беспорядок».

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Ю.М. Романовскому за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и ценные замечания.

Работа частично поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2011 гг.), проект 2.1.1/309, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., ГК № П2315.

Функции, введенные в уравнениях (10):

$$\sigma_{j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \sum_{\varepsilon, \mu, \nu} g_{\varepsilon, \mu \nu}^{(2)} O_{\varepsilon}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}''),$$

$$\sigma_{j'j''j'''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') = \sum_{\varepsilon, \mu, \nu, \kappa} g_{\varepsilon, \mu \nu \kappa}^{(3)} O_{\varepsilon}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}'') O_{\kappa}^{(j''')}(\mathbf{k}'''),$$

$$\varepsilon_{\varphi, j'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\mu} p_{\varphi, \mu}^{(1)} O_{\mu}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}'),$$

$$\varepsilon_{\varphi, j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \sum_{\mu, \nu} p_{\varphi, \mu \nu}^{(2)} O_{\mu}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}'').$$

Функции, введенные в уравнениях (14):

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u) &= \sigma_{111}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) - \\ &- \frac{(\sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u))}{\lambda_1(\mathbf{k}_s)} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) - \\ &- \frac{(\sigma_{12}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{21}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u))}{\lambda_2(\mathbf{k}_s)} \sigma_{11}^{(2)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u), \end{aligned}$$

$$\zeta_{\varphi, \psi, \varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) = \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{O_{\varphi'}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_s)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} p_{\varphi'}^{(0)},$$

$$\begin{aligned} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) &= \varepsilon_{\varphi, 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) - \\ &- \sum_{\psi=1}^2 [\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}'_u)] \frac{O_{\varphi}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)} p_{\varphi}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) &= \varepsilon_{\varphi, 11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) - \\ &- \sum_{\psi=1}^2 [\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}'_u)] \frac{\varepsilon_{\varphi, 1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)} - \\ &- \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u) \frac{\sigma_{11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u)}, \end{aligned}$$

$$A_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u) = \varepsilon_{\varphi,\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{\varepsilon_{\varphi',1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)},$$

$$B_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u) = [\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)] \frac{O_{\varphi'}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_s)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} p_{\varphi'}^{(0)},$$

$$C_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) = \varepsilon_{\varphi,\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{\varepsilon_{\varphi',11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)},$$

$$D_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u) = (\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \frac{\varepsilon_{\varphi',1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)},$$

$$E_{\psi,\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) = (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}'_u)) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{\varphi,11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)},$$

$$F_{\psi,\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) = [\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}'_u)] \times \\ \times \frac{\sigma_{11}^{(\psi)}(\mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u)},$$

$$G_{\psi,\varphi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) = (\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{\varphi',11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)}.$$

Библиографический список

1. Lindner B., García-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports*. 2004. Vol. 392. P. 321.
2. García-Ojalvo J., Sancho J.M. Noise in spatially extended systems. New York: Springer Verlag, 1999.
3. Van den Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R. Noise-induced nonequilibrium phase transition // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73. P. 3395.
4. Genovese W., Muñoz M.A., Sancho J.M. Nonequilibrium transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57. P. R2495.

5. *Landa P.S., Zaikin A.A., Schimansky-Geier L.* Influence of additive noise on noise-induced phase transition on nonlinear chains // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 9. P. 1367.
6. *Zaikin A.A., Schimansky-Geier L.* Spatial patterns induced by additive noise // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. P. 4355.
7. *Ibañes M., García-Ojalvo J., Toral R., Sancho J.M.* Noise-induced phase separation: Mean-field results // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. P. 3597.
8. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
9. *Курушина С.Е.* Аналитическое исследование и численное моделирование контрастных диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных // *Изв. вузов. ПНД*. 2009. Т. 17, № 6. С. 125.
10. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.
11. *Курушина С.Е.* Моделирование динамики пространственно-распределенных систем типа «реакция–диффузия» с внешними флуктуациями. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Самара, СГАУ, 2010.
12. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
13. *Стратонович Р.Л.* Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985.
14. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
15. *Стратонович Р.Л.* Случайные процессы в динамических системах. Москва; Ижевск: ИКИ, 2009.
16. *Scheffer M.* Fish and nutrients interplay determines algal biomass: A minimal model // *OIKOS*. 1991. Vol. 62. P. 271.
17. *Malchow H.* Motional instabilities in prey–predator systems // *J. Theor. Biol.* 2000. Vol. 204. P. 639.
18. *Malchow H.* Spatiotemporal pattern formation in nonlinear non-equilibrium plankton dynamics // *Procc. R. Soc. Lond. B*. 1993. Vol. 251. P. 103.
19. *Satnoianu R.A., Menzinger M.* Non-turing stationary patterns in flow-distributed oscillators with general diffusion and flow rates // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62, № 1. P. 113.
20. *Satnoianu R.A., Menzinger M., Maini P.K.* Turing instabilities in general systems // *J. Math. Biol.* 2000. Vol. 41, № 6. P. 493.
21. *Курушина С.Е., Завершинский И.П., Максимов В.В. и др.* Моделирование пространственно-временных структур в системе хищник–жертва во внешней флуктуирующей среде // *Математическое моделирование*. 2010. Т. 22, № 10. С. 3.
22. *Курушина С.Е., Иванов А.А.* Диссипативные структуры в системе реакция–диффузия в поле мультипликативных флуктуаций // *Изв. вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, № 3. С. 85.

*Самарский государственный
аэрокосмический университет*

Поступила в редакцию 29.07.2011

STOCHASTIC EQUATIONS AND FOKKER–PLANCK EQUATION FOR THE ORDER PARAMETERS IN THE STUDY OF THE NOISE–INDUCED SPATIAL PATTERNS DYNAMICS

S.E. Kurushina, L.I. Gromova, V.V. Maximov

From the viewpoint of the order parameters concept spatial pattern formation in excitable fluctuating medium was researched analytically. The reaction–diffusion system in external noise was considered as a model of such medium. Stochastic equations for the unstable modes amplitudes (order parameters) and the dispersion equations for the average unstable modes amplitudes were received. Fokker–Planck equation for the order parameters was received. The developed theory allows studying noise–induced effects, including variation boundaries of ordering and disordering phase transitions in dependence on the parameters of external noise.

Keywords: Spatial patterns, external noise, phase transitions, order parameters.

Курушина Светлана Евгеньевна – родилась в Куйбышеве (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). После окончания СГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика и доктора физико-математических наук в СГАУ (2010) по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Опубликовала 65 научных работ. Область научных интересов: оптика, теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.



443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: kurushina72@mail.ru

Громова Лидия Ивановна – родилась в Москве (1938), окончила Куйбышевский государственный педагогический институт (1961). В настоящее время работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в КГПИ (1969) в области магнитных явлений в твердых телах. Опубликовала более 70 научных работ. Область научных интересов: теория колебаний, волн, структур; теория самоорганизации.



443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: kurushina72@mail.ru

Максимов Валерий Владимирович – родился в поселке Усть-Омчуг, Магаданской области (1952). Окончил Куйбышевский авиационный институт (1976). После окончания КуАИ работал в ЦСКБ «Прогресс». С 1979 г. работает в КуАИ – СГАУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в КуАИ (1987) по специальности 05.07.05 – Тепловые двигатели летательных аппаратов. Опубликовал более 60 научных работ. Имеет 6 авторских свидетельств в области двигателестроения и плазменного напыления. Область научных интересов: теория колебаний и волн; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации.



443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: maksimov52@mail.ru