



НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ. ИЗМЕНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ БЫСТРЫХ ДВИЖЕНИЙ ПОД ВЛИЯНИЕМ МЕДЛЕННЫХ*

П. С. Ланда, В. Г. Ушаков

На примере стохастического резонанса рассматривается влияние медленной компоненты движения на быструю компоненту. Показано, что в стохастических системах это влияние сводится к изменению эффективных параметров быстрой и медленной компонент движения, а также распределения вероятностей для быстрой компоненты. Показано также, что найденное изменение обладает свойством мультифрактальной универсальности.

Ключевые слова: Нелинейные стохастические системы, быстрые и медленные процессы, влияние медленных процессов на распределение вероятностей для быстрых процессов.

Введение

Разделение систем и движений на быстрые и медленные известно давно. Такое разделение использовалось в различных применениях, но главным образом в атомной физике, механике и теории колебаний. Из ряда экспериментов [1–4], известно, что медленные процессы (регулярные или случайные) могут существенно влиять на быстрые процессы, в частности, на их распределение вероятностей. Этот же результат следует из теоретического рассмотрения ряда примеров различной физической природы, например, стохастического резонанса [5, 6], броуновского движения [7] и альфа-распада [8]. Интересно, что получаемые результаты обладают свойством скейлинга (scaling), называемым также мультифрактальностью, то есть в соответствующем масштабе являются одинаковыми. Это в неявном виде отмечено в экспериментальных работах, описанных в книге [9].

В литературе (см., например [10]), в основном рассматривается влияние быстрых процессов (главным образом, высокочастотной вибрации) на медленные, существенно изменяющее поведение медленных процессов. Это описание основано

*Статья написана по материалам доклада на IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем», Нижний Новгород, Россия, 24–29 сентября 2012.

на большом количестве экспериментов. Однако известны теоретические и экспериментальные работы (см. например, [11] и множество экспериментальных работ С.Э. Шноля с соавторами [9]), в которых описывается обратное влияние. Такое влияние является темой настоящей статьи. Она основана на трех известных фактах, главным образом, экспериментальных, казалось бы, не связанных между собой.

- В 1960–1970-х годах вышли работы сотрудников ЦАГИ Е.В. Власова и А.С. Гиневского [3, 12], где были описаны результаты экспериментов по управлению турбулентностью акустическим воздействием. Очевидно, что акустическое воздействие в некоторой области частот может рассматриваться как медленное по сравнению с турбулентными возмущениями. Было показано, что в определенной области частот воздействия уровень турбулентности сначала существенно понижается при повышении частоты, но затем начинает опять расти. тогда как в области высоких частот он вначале повышается, а затем остается постоянным. Для практических целей особенно важно уменьшение турбулентности. Никаких убедительных физических объяснений наблюдаемых эффектов в литературе мы не знаем.
- Изменение распределения вероятностей при стохастическом резонансе для быстрой составляющей процесса [6, 13]. Это явление было обнаружено в указанных работах, но поскольку эти работы были посвящены изменению динамических параметров систем под влиянием шума, нашего внимания оно не привлекло.
- Влияние вращения Земли и других космических процессов на скорости некоторых случайных процессов, например, броуновского движения [7], радиоактивного распада [1, 2, 8] и др.

Остановимся более детально на стохастическом резонансе.

1. Стохастический резонанс как один из примеров влияния медленных процессов на быстрые

Работы [6, 13] показали, что механизм стохастического резонанса связан с изменением параметров системы (жесткости и коэффициента трения) под действием шума, причем никакого резонанса в общепринятом смысле там нет. В свою очередь, это изменение параметров приводит к изменению плотности вероятности для случайной составляющей процесса.

Одним из наиболее интересных результатов этих работ является обнаруженная универсальность наблюдаемых явлений, то есть независимость от природы системы и масштаба времени. Такая универсальность называется мультифрактальной [14, 15]. Следует отметить, что о наличии универсальности для всех процессов, наблюдаемых С.Э. Шнолем с коллегами, достаточно подробно написано в книге [9].

Понятие стохастического резонанса было впервые введено в 1981 году [16] с целью объяснения близкой к периодической (с периодом примерно 100 000 лет) последовательности появления ледниковых периодов. Одной из причин такой последовательности может быть изменение эксцентриситета земной орбиты с этим же периодом.

Первые попытки дать хоть какое-то теоретическое объяснение этого явления (см. [16]) были сделаны на основе очень простой модели (в духе последних работ Ю.И. Неймарка [17]) – грубого нелинейного уравнения для изменения температуры поверхности Земли при слабом периодическом изменении температуры воздуха в предположении, что температура поверхности Земли имеет два устойчивых состояния равновесия, одно из которых соответствует оледенению, а другое – таянию.

В простейшем случае это уравнение можно записать так

$$\dot{x} + f(x) = A \cos \omega t + \xi(t), \quad (1)$$

где $f(x) = x^3 - x$. При слабом периодическом воздействии переходы из одного устойчивого состояния в другое невозможны. Добавление малого белого шума делает эти переходы вполне вероятными. Такие процессы представляют собой переходы через потенциальный барьер, или туннельный эффект [18]. Заметим, что классический туннельный эффект по своим проявлениям аналогичен квантовому.

Предполагая, что $x(t)$ является нечетной функцией времени, можно представить его в виде

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (2)$$

где

$$s(t) = \langle x(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \cos\left((2k+1)\omega t + \psi(K, \omega, A)\right), \quad (3)$$

$$\langle n(t) \rangle = -\langle n(t) \rangle = 0.$$

Отношение B_1 к A мы называем коэффициентом усиления и обозначаем $Q(K, \omega, A)$.

Численное решение уравнения (1) показывает, что коэффициент усиления $Q(K, \omega, A)$ и фазовый сдвиг $\psi(K, \omega, A)$ являются немонотонными функциями интенсивности шума K . Значение Q максимально при некотором значении K , которое тем больше, чем выше частота сигнала. Зависимость Q от K при фиксированных значениях частоты и амплитуды напоминает резонансную зависимость амплитуды некоторого осциллятора от частоты внешней силы. Так как K определяет среднюю частоту скачков из одной ямы в другую, вызванных случайными переходами через потенциальный барьер, многие исследователи первоначально предполагали, что зависимость Q от K должна иметь максимум, когда период сигнала равен удвоенному среднему времени первого перехода через потенциальный барьер. Однако, очевидно, что этого быть не может. Если бы это было верно, то Q должно было бы иметь максимум не только при изменении K , но и при изменении ω . Однако известно, что при увеличении ω значение Q монотонно уменьшается.

Как показано в работах [6, 13], причины резонансноподобной зависимости Q от K заключены в изменении эффективных параметров системы под влиянием шума. Чтобы рассчитать эти эффективные параметры, представим решение уравнения (1) в форме (2), подставим (2) в (1) и разобьем это уравнение на два, так что одно из них будет описывать величины, усредненные по статистическому ансамблю, а второе – отклонения от этих усредненных значений. Так как при $s = 0$ все нечетные моменты $m_j = \langle n^j \rangle$ должны равняться нулю, мы можем задать приближенно третий момент в виде

$$m_3 = as + b\dot{s}, \quad (4)$$

где a и b – неизвестные функции K и ω , которые вычислим ниже. Принимая это во внимание, запишем уравнения для $s(t)$ и $n(t)$ как

$$(1 + b)\dot{s} + cs + s^3 = A \cos \omega t, \quad (5)$$

$$\dot{n} + (3s^2 - 1)n + n^3 + (3n^2 - 1 - c)s - b\dot{s} = \xi(t), \quad (6)$$

где b – вызванная шумом добавка к коэффициенту затухания, а эффективная жесткость

$$c = 3m_2 - 1 + a. \quad (7)$$

Отметим, что такое разделение одного исходного уравнения на два подобно разделению движений на медленные и быстрые, предложенному И.И. Блехманом [10]. Только мы разделяем движения на регулярные и случайные. Как отмечено Блехманом, такое разделение не является однозначным, но это не мешает решению задачи.

Чтобы рассчитать моменты m_j и эффективные параметры a , b и c , используем уравнение Фоккера–Планка, соответствующее уравнению Ланжевена (6). В линейном приближении по $s(t)$ и $\dot{s}(t)$ это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \left[n^3 - n + (3n^2 - 1 - c)s - b\dot{s} \right] w \right\} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) удобно искать в виде суммы трех составляющих: основной ($w_0(n) \sim 1$) и двух маленьких ($w_1(n) \sim w_2(n) \sim \varepsilon$)

$$w(n, t) = w_0(n) + \varepsilon \left(w_1(n)s(t) + w_2(n)\dot{s}(t) \right). \quad (9)$$

Первая составляющая описывает распределение вероятностей для быстрого случайного процесса $n(t)$ в отсутствие медленного, а остальные две определяют изменение этого распределения за счет медленных процессов $s(t)$ и $\dot{s}(t)$.

Поскольку в линейном приближении $s(t)$ является гармоническим сигналом частоты ω , имеем $\ddot{s}(t) = -\omega^2 s(t)$. Принимая это во внимание, подставляя (9) в (8) и ограничиваясь членами первого порядка по ε , получаем следующие уравнения для $w_0(n)$, $w_1(n)$ и $w_2(n)$:

$$\frac{K}{2} \frac{\partial w_0}{\partial n} + (n^3 - n)w_0 = 0, \quad (10)$$

$$w_1 - \left(\frac{d}{dn} \left((n^3 - n)w_2 \right) + \frac{K}{2} \frac{d^2 w_2}{dn^2} \right) = b \frac{dw_0}{dn}, \quad (11)$$

$$-\omega^2 w_2 - \left(\frac{d}{dn} \left((n^3 - n)w_1 \right) + \frac{K}{2} \frac{d^2 w_1}{dn^2} \right) = -\frac{d}{dn} \left((3n^2 - 1 - c)w_0 \right).$$

Решение уравнения (10), обращающееся в нуль при $n = \pm\infty$, имеет вид

$$w_0(n) = C \exp \left(\frac{n^2}{K} - \frac{n^4}{2K} \right), \quad (12)$$

где нормировочная постоянная C зависит от K . Например, $C = 0.008078503537$ для $K = 0.1$ и $C = 0.06591872565$ для $K = 0.2$.

Зная $w_0(n)$, можем вычислить дисперсию шума как функцию K

$$m_2(K) = \int_{-\infty}^{\infty} n^2 w_0(n) dn. \quad (13)$$

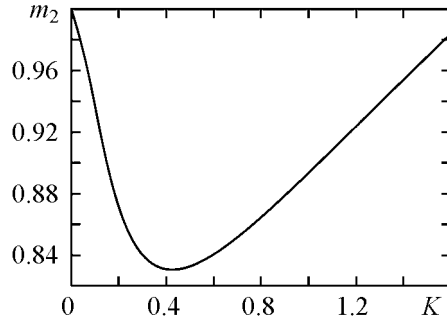


Рис. 1. Зависимость m_2 от интенсивности шума K

Зависимость m_2 от K показана на рис. 1. Видно, что при некотором значении K дисперсия шума $m_2 = \langle n^2 \rangle$ минимальна.

Интегрируя уравнения (11) по n от $-\infty$ до ∞ и принимая во внимание, что функции $w_0(n)$, $w_1(n)$ и $w_2(n)$ должны обращаться в нуль при $|n| \rightarrow \infty$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{1,2}(n) dn = 0. \quad (14)$$

Легко видеть, что условию (14) удовлетворяют нечетные функции $w_1(n)$ и $w_2(n)$, то есть функции, для которых справедливы следующие начальные условия:

$$w_{1,2}(0) = 0. \quad (15)$$

Из условия $\langle n \rangle = 0$ и выражения (4) для третьего момента, с учетом (7), получаем следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} n w_1(n) dn = \int_{-\infty}^{\infty} n w_2(n) dn = 0, \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} n^3 w_1(n) dn = c + 1 - 3m_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} n^3 w_2(n) dn = b,$$

где $w_1(n)$ и $w_2(n)$ – решения уравнений (11). Легко видеть, что соотношения (16) могут быть совместными, только если функции $w_1(n)$ и $w_2(n)$ будут содержать произвольные постоянные.

Общее решение неоднородных уравнений (11) имеет вид

$$w_1(n) = w_{1in}(n) + w_{1h}(n), \quad w_2(n) = w_{2in}(n) + w_{2h}(n), \quad (17)$$

где $w_{1in}(n)$ и $w_{2in}(n)$ – частные решения неоднородных уравнений (11), определяемые правыми частями этих уравнений. Их удобно представить в виде суммы трех слагаемых

$$\begin{aligned} w_{1in}(n) &= w_{11in}(n) + c w_{12in}(n) + b w_{13in}(n), \\ w_{2in}(n) &= w_{21in}(n) + c w_{22in}(n) + b w_{23in}(n). \end{aligned} \quad (18)$$

В формуле (17) $w_{1h}(n)$ и $w_{2h}(n)$ – частные решения однородных уравнений (11), которые могут быть представлены в виде линейной комбинации двух независимых частных решений

$$w_{1h}(h) = C_1 w_{11h}(n) + C_2 w_{12h}(n), \quad w_{2h}(n) = C_1 w_{21h}(n) + C_2 w_{22h}(n). \quad (19)$$

Интегрируя теперь уравнения (11) по n от 0 до ∞ , с учетом (17), (18) и (19), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} w_{11in}(n) dn - \frac{K}{2} \frac{dw_{21in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= 0, \\ \int_0^{\infty} w_{12in}(n) dn - \frac{K}{2} \frac{dw_{22in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= 0, \\ \int_0^{\infty} w_{13in}(n) dn - \frac{K}{2} \frac{dw_{23in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= -w_0(0), \\ -\omega^2 \int_0^{\infty} w_{21in}(n) dn - \frac{K}{2} \frac{dw_{11in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= -w_0(0), \\ -\omega^2 \int_0^{\infty} w_{22in}(n) dn - \frac{K}{2} \frac{dw_{12in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= -w_0(0), \\ -\omega^2 \int_0^{\infty} w_{23in}(n) dn - \frac{K}{2} \frac{dw_{13in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $w_0(0) = C(K)$. Эти соотношения позволяют, в принципе, найти недостающие начальные условия для уравнений (11). Из (20) находим

$$\begin{aligned} \frac{dw_{11in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= \frac{2C(K)}{K} - \frac{2\omega^2}{K} \int_0^{\infty} w_{21in}(n) dn = 0, \\ \frac{dw_{12in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= \frac{2C(K)}{K} - \frac{2\omega^2}{K} \int_0^{\infty} w_{22in}(n) dn, \\ \frac{dw_{13in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= -\frac{2\omega^2}{K} \int_0^{\infty} w_{23in}(n) dn, \\ \frac{dw_{21in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= \frac{2}{K} \int_0^{\infty} w_{11in}(n) dn, \\ \frac{dw_{22in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= \frac{2}{K} \int_0^{\infty} w_{12in}(n) dn, \\ \frac{dw_{23in}(n)}{dn} \Big|_{n=0} &= \frac{2C(K)}{K} + \frac{2}{K} \int_0^{\infty} w_{13in}(n) dn. \end{aligned} \quad (21)$$

Следует заметить, что эти начальные условия являются неявными. (Ссылки на решение дифференциальных уравнений с неявными начальными условиями мы не знаем.)

Подставляя дальше (16), с учетом (18) и (19), в уравнения (11) и приравнявая коэффициенты при c , b , C_1 и C_2 , находим следующие дифференциальные уравнения для $w_{11in}(n)$, $w_{12in}(n)$, $w_{13in}(n)$, $w_{21in}(n)$, $w_{22in}(n)$, $w_{23in}(n)$, $w_{11h}(n)$, $w_{12h}(n)$, $w_{21h}(n)$ and $w_{22h}(n)$:

$$\begin{aligned}
w_{11in}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{21in}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{21in}(n)}{dn^2} &= 0, \\
w_{12in}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{22in}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{22in}(n)}{dn^2} &= 0, \\
w_{13in}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{23in}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{23in}(n)}{dn^2} &= \frac{dw_0(n)}{dn}, \\
-\omega^2 w_{21in}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{11in}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{11in}(n)}{dn^2} &= -\frac{d}{dn} \left((3n^2 - 1) w_0(n) \right), \\
-\omega^2 w_{22in}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{12in}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{12in}(n)}{dn^2} &= \frac{dw_0(n)}{dn}, \\
-\omega^2 w_{23in}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{13in}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{13in}(n)}{dn^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
w_{11h}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{21h}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{21h}(n)}{dn^2} &= 0, \\
w_{12h}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{22h}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{22h}(n)}{dn^2} &= 0, \\
-\omega^2 w_{21h}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{11h}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{11h}(n)}{dn^2} &= 0, \\
-\omega^2 w_{22h}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{12h}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{12h}(n)}{dn^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Уравнения (22) должны быть решены с начальными условиями (15) и (21), тогда как уравнения (23) можно решать с любыми начальными условиями.

Чтобы решить уравнения (22) с неявными начальными условиями (21), введем новые переменные

$$\begin{aligned}
W_{11}(n) &= \int_0^n w_{11in}(n) dn, & W_{12}(n) &= \int_0^n w_{12in}(n) dn, & W_{13}(n) &= \int_0^n w_{13in}(n) dn, \\
W_{21}(n) &= \int_0^n w_{21in}(n) dn, & W_{22}(n) &= \int_0^n w_{22in}(n) dn, & W_{23}(n) &= \int_0^n w_{23in}(n) dn.
\end{aligned} \tag{24}$$

С учетом этих переменных уравнения (22) с начальными условиями (21) принимают вид

$$\begin{aligned}
w_{11\text{in}}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{21\text{in}}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{21\text{in}}(n)}{dn^2} &= 0, \\
w_{12\text{in}}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{22\text{in}}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{22\text{in}}(n)}{dn^2} &= 0, \\
w_{13\text{in}}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{23\text{in}}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{23\text{in}}(n)}{dn^2} &= \frac{dw_0(n)}{dn}, \\
-\omega^2 w_{21\text{in}}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{11\text{in}}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{11\text{in}}(n)}{dn^2} &= -\frac{d}{dn} \left((3n^2 - 1) w_0(n) \right), \\
-\omega^2 w_{22\text{in}}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{12\text{in}}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{12\text{in}}(n)}{dn^2} &= \frac{dw_0(n)}{dn}, \\
-\omega^2 w_{23\text{in}}(n) - \frac{d}{dn} \left((n^3 - n) w_{13\text{in}}(n) \right) - \frac{K}{2} \frac{d^2 w_{13\text{in}}(n)}{dn^2} &= 0, \\
\frac{dW_{11}(n)}{dn} = w_{11\text{in}}(n), \quad \frac{dW_{12}(n)}{dn} = w_{12\text{in}}(n), \quad \frac{dW_{13}(n)}{dn} = w_{13\text{in}}(n), \\
\frac{dW_{21}(n)}{dn} = w_{21\text{in}}(n), \quad \frac{dW_{22}(n)}{dn} = w_{22\text{in}}(n), \quad \frac{dW_{23}(n)}{dn} = w_{23\text{in}}(n);
\end{aligned} \tag{25}$$

$$w_{11\text{in}}(0) = w_{12\text{in}}(0) = w_{13\text{in}}(0) = w_{21\text{in}}(0) = w_{22\text{in}}(0) = w_{23\text{in}}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dw_{11\text{in}}(n)}{dn} \right|_{n=0} &= \frac{2C(K)}{K} - \frac{2\omega^2}{K} W_{21}(\infty), \\
\left. \frac{dw_{12\text{in}}(n)}{dn} \right|_{n=0} &= \frac{2C(K)}{K} - \frac{2\omega^2}{K} W_{22}(\infty), \\
\left. \frac{dw_{13\text{in}}(n)}{dn} \right|_{n=0} &= \frac{2C(K)}{K} - \frac{2\omega^2}{K} W_{23}(\infty), \\
\left. \frac{dw_{21\text{in}}(n)}{dn} \right|_{n=0} &= \frac{2}{K} W_{11}(\infty), \\
\left. \frac{dw_{22\text{in}}(n)}{dn} \right|_{n=0} &= \frac{2}{K} W_{12}(\infty), \\
\left. \frac{dw_{23\text{in}}(n)}{dn} \right|_{n=0} &= -\frac{2}{K} W_{13}(\infty).
\end{aligned} \tag{26}$$

Графики функций $w_{11\text{in}}(n)$, $w_{21\text{in}}(n)$, $w_{12\text{in}}(n)$, $w_{22\text{in}}(n)$, $w_{13\text{in}}(n)$, $w_{23\text{in}}(n)$ для $\omega = 0.1$, (1) $K = 0.1$ и (2) $K = 0.2$ показаны на рис. 2.

Следует отметить, что функции $w_{11\text{in}}(n)$, $w_{21\text{in}}(n)$, $w_{12\text{in}}(n)$, $w_{22\text{in}}(n)$, $w_{13\text{in}}(n)$, $w_{23\text{in}}(n)$, $w_{11\text{h}}(n)$, $w_{21\text{h}}(n)$, $w_{12\text{h}}(n)$ и $w_{22\text{h}}(n)$ обращаются в нуль при больших n , несмотря на то, что мы решали не краевую задачу, а задачу Коши.

Частные решения однородных уравнений (23) $w_{11\text{h}}(n)$, $w_{21\text{h}}(n)$, $w_{12\text{h}}(n)$ и $w_{22\text{h}}(n)$ с начальными условиями $w_{11\text{h}}(0) = w_{21\text{h}}(0) = w_{12\text{h}}(0) = w_{22\text{h}}(0) = \frac{dw_{12\text{h}}(n)/dn|_{n=0}}{dw_{22\text{h}}(n)/dn|_{n=0}} = 0$, $\frac{dw_{11\text{h}}(n)/dn|_{n=0}}{dw_{22\text{h}}(n)/dn|_{n=0}} = 1$, $\frac{dw_{22\text{h}}(n)/dn|_{n=0}}{dw_{22\text{h}}(n)/dn|_{n=0}} = 5$ при $\omega = 0.1$ и $K = 0.1$ показаны на рис. 3.

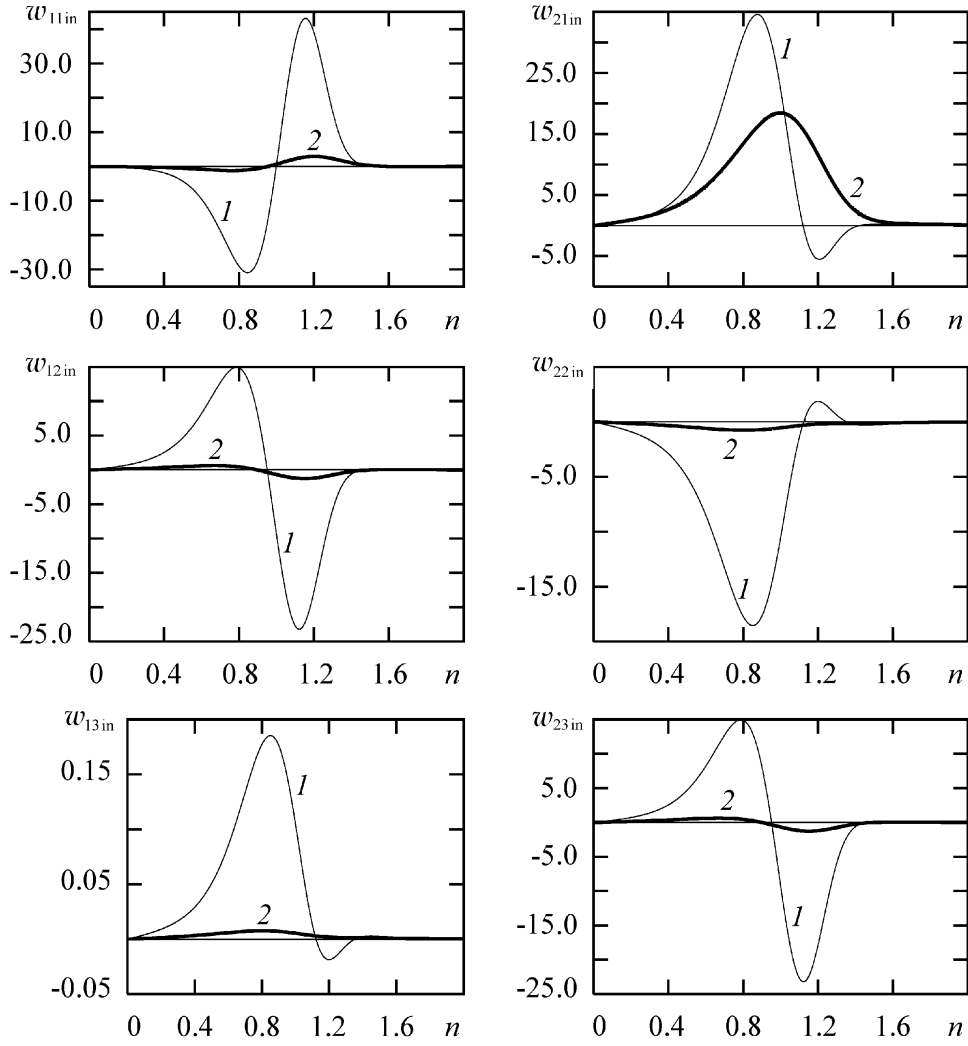


Рис. 2. Частные решения $w_{11in}(n)$, $w_{21in}(n)$, $w_{12in}(n)$, $w_{22in}(n)$, $w_{13in}(n)$ и $w_{23in}(n)$ уравнений (22) с нулевыми начальными условиями для $\omega = 0.1$ и $K = 0.1$

Уравнения для неизвестных c , b и a можно найти из условий равенства нулю первого и третьего моментов. Принимая во внимание (7), (17) и (20), мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} n \left(w_{11in}(n) + w_{12in}(n)c + w_{13in}(n)b + w_{11h}(n)C_1 + w_{12h}(n)C_2 \right) dn = 0, \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} n \left(w_{21in}(n) + w_{22in}(n)c + w_{23in}(n)b + w_{21h}(n)C_1 + w_{22h}(n)C_2 \right) dn = 0, \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} n^3 \left(w_{11in}(n) + w_{12in}(n)c + w_{13in}(n)b + w_{11h}(n)C_1 + w_{12h}(n)C_2 \right) dn = c+1-3m_2, \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} n^3 \left(w_{21in}(n) + w_{22in}(n)c + w_{23in}(n)b + w_{21h}(n)C_1 + w_{22h}(n)C_2 \right) dn = b.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

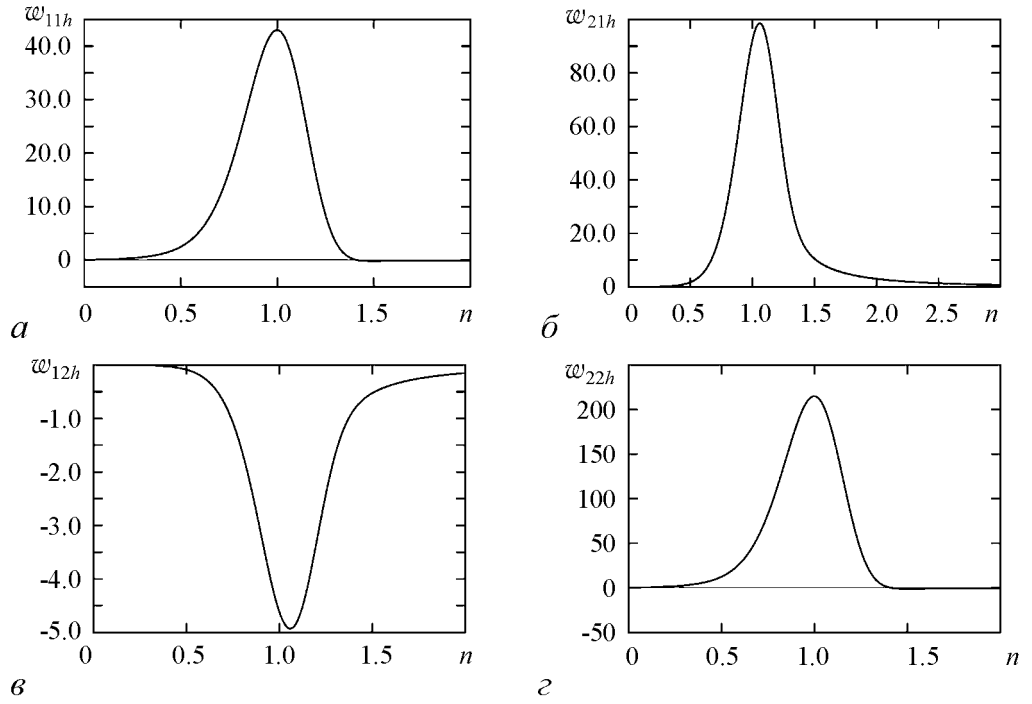


Рис. 3. Частные решения $w_{11h}(n)$, $w_{21h}(n)$, $w_{12h}(n)$ и $w_{22h}(n)$ с начальными условиями $w_{11h}(0) = w_{21h}(0) = w_{12h}(0) = w_{22h}(0) = dw_{12h}(n)/dn|_{n=0} = dw_{22h}(n)/dn|_{n=0} = 0$, $dw_{11h}(n)/dn|_{n=0} = 1$, $dw_{22h}(n)/dn|_{n=0} = 5$ при $\omega = 0.1$ и $K = 0.1$

Зная c , b , $w_{11in}(n)$, $w_{12in}(n)$, $w_{13in}(n)$, $w_{21in}(n)$, $w_{22in}(n)$, $w_{23in}(n)$, $w_{11h}(n)$, $w_{12h}(n)$, $w_{21h}(n)$ и $w_{22h}(n)$, можно рассчитать, исходя из формул (9) и (17), полное распределение вероятностей $w(n, t)$ и его изменение $\Delta w(n, t)$, которые определяются следующими выражениями:

$$w(n, t) = w_0(n) + \Delta w(n, t), \quad (28)$$

$$\Delta w(n, t) = \varepsilon \left(w_1(n) s(t) + w_2(n) \dot{s} \right), \quad (29)$$

где $w_1(n)$ и $w_2(n)$ определяются формулами (18). Будем делать это в предположении нулевых начальных условий для уравнений (23). В этом случае $w_{11h}(n)$, $w_{12h}(n)$, $w_{21h}(n)$ и $w_{22h}(n)$ равны нулю и выражения (28) и (29) могут быть переписаны как

$$w(n, t) = w_0(n) + \Delta w(n, t), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Delta w(n, t) = \varepsilon \left(w_{11in}(n) + c w_{12in}(n) + b w_{13in}(n) \right) A \cos \omega t - \\ - \omega^2 \left(w_{21in}(n) + c w_{22in}(n) + b w_{23in}(n) \right) A \sin \omega t. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда видно, что как полное распределение вероятностей $w(n, t)$, так и его изменение $\Delta w(n, t)$ периодически зависят от времени.

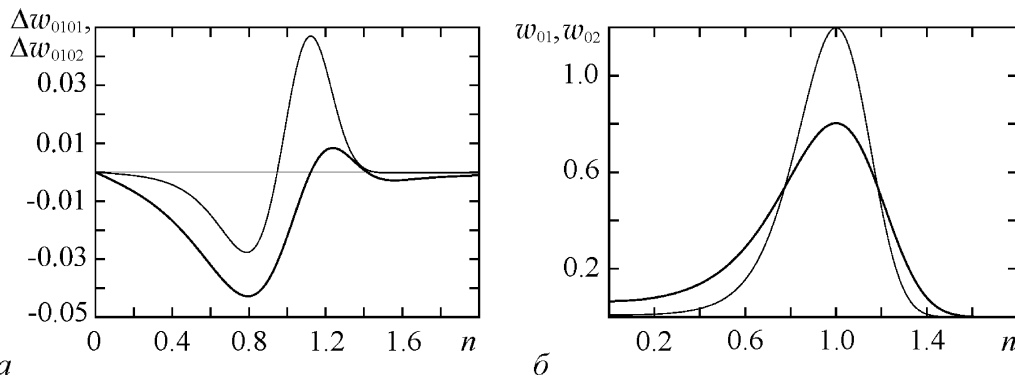


Рис. 4. *a* – Зависимости $\Delta w(n, t)$ от n для $\omega = 0.1$, $A = 0.1$, $K = 0.1$ (тонкие линии) и $\omega = 0.1$, $A = 0.1$, $K = 0.2$ (жирные линии); *б* – зависимости $w(n, t)$ для тех же значений K

Примеры зависимостей $w(n, t)$ и $\Delta w(n, t)$ от n для $\omega = 0.1$, $A = 0.1$, $K = 0.1$ (1) и $\omega = 0.1$, $A = 0.1$, $K = 0.2$ (2) показаны на рис. 4. Видно, что медленный сигнал $s(t)$ существенно изменяет форму распределения вероятностей и уменьшает его размах.

Заключение

Рассмотренный простейший пример стохастического резонанса показал, что медленное регулярное (периодическое) воздействие на систему с шумом (быстрыми флуктуациями) существенно изменяет распределение вероятностей для шумов (см. рис. 4, *a*). Величина этого изменения зависит от амплитуды и частоты медленного воздействия. Это хорошо видно из сравнения распределений вероятности с медленным воздействием (см. рис. 4, *a*) и без него (см. рис. 4, *б*).

Библиографический список

1. Jenkins J.H., Fischbach E., Buncher J.B., Gruenwald J.T., Krause D.E., Mattes J.J. Evidence of correlations between nuclear decay rates and Earth-Sun distance // *Astroparticle Physics*. 2009. Vol. 32. P. 42.
2. Cramer J.G. Radioactive Decay and the Earth-Sun Distance // *Analog Science Fiction & Fact Magazine*. 2009, Vol. 129.
3. Vlasov E.B., Гиневский А.С. Генерация и подавление турбулентности в осесимметричной турбулентной струе при акустическом воздействии // *Механика жидкости и газа*. 1973, № 6. С. 37.
4. Landa P.S., Ginevsky A.S. Control of Turbulence in Jets by Acoustic Means // *Proc. Int. Conf. Physics and Control*, St. Petersburg, IEEE, 2003. P. 372.
5. Landa P.S. *Regular and Chaotic Oscillations*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
6. Ланда П.С. Механизм стохастического резонанса // *ДАН*. 2004. Т. 399, № 4. С. 1.
7. Ланда П.С., Власов В.А. Аналитическое рассмотрение влияния космических

- факторов на флуктуации скоростей броуновских частиц // Изв. вузов ПНД. 2011. Т. 19, № 2. С. 56.
8. Шноль С.Э., Ланда П.С., Власов В.А. Влияние космических факторов на скорость альфа-распада // Вестник научно-технического развития. 2011. Т. 42, № 2. С. 1.
 9. Шноль С.Э. Космофизические факторы в случайных процессах. Svenska Fisikarkivet, 2009.
 10. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 400 с.
 11. Дыхне А.М., Крайнов В.П. Быстрые и медленные подсистемы в атомной физике. Азбука, 2002. 217 с.
 12. Vlasov Ye.V. and Ginevsky A.S. Acoustic modification of the aerodynamic characteristics of a turbulent jet // Fluid Dynamics. 1967. Vol. 2, № 4. P. 93.
 13. Landa P.S., Ushakov V., Kurths J. Rigorous theory of stochastic resonance in overdamped bistable oscillators for weak signals // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. Vol. 30. P. 574.
 14. Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco: Freeman Comp., 1977.
 15. Mandelbrot B.B. and Freeman W.H. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman Comp., 1983.
 16. Nicolis G. and Nicolis C. Stochastic aspects of climate transitions and additive fluctuations // Tellus. 1981. Vol. 33. P. 225.
 17. Неймарк Ю.И. Математическое моделирование как наука и искусство. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2010.
 18. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем. Андронов А.А. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1956.

*Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова*

Поступила в редакцию 5.10.2012

**NONLINEAR SYSTEMS WITH FAST AND SLOW MOTIONS.
THE CHANGE OF THE PROBABILITY DISTRIBUTION
OF FAST MOTIONS INFLUENCED BY SLOW ONES**

P. S. Landa, V. G. Ushakov

The influence of slow processes (random or regular) on the probability distribution of fast random processes is considered. We show that such influence is universal for all random processes, and in some cases this universality is of the multifractal character. As an example we consider stochastic resonance.

Keywords: Probability distribution, random processes, stochastic resonance.

Ланда Полина Соломоновна – окончила физический факультет МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор десяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer», «Регулярные и хаотические колебания», вышедшей в издательстве «Springer» в 2001 году, и нескольких обзоров, в том числе в УФН и «Physics Reports». Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».



119899 Москва, Ленинские горы, МГУ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: planda@mail.ru



Ушаков Вадим Геннадьевич – родился в Анапе (1977), окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. С 2004 по 2009 год работал в Московском филиале ЦАГИ. Имеет 5 публикаций по тематике статьи в российских и зарубежных изданиях.

119899 Москва, Ленинские горы, МГУ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: uwadim@gmail.com