

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКИХ СЕТЯХ «ТЕСНОГО МИРА»

А. В. Шабунин

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Рассматривается динамическая сеть «тесного мира» из фазовых осцилляторов, в которой наряду с регулярными локальными связями действуют случайные меняющиеся во времени дальнедействующие связи. Исследуется влияние таких связей на мультистабильность. Показывается, что мультистабильность существует лишь при малом числе и интенсивности дальнедействующих связей и лишь в том случае, когда их структура достаточно быстро меняется во времени.

Ключевые слова: Распределенные системы, колебания, синхронизация, мультистабильность, модели «тесного мира».

Введение

В последнее время в нелинейной динамике наблюдается растущий интерес к моделям в виде сетей из простых осцилляторов со сложным характером связей между ними. Примерами подобных систем являются сети «тесного мира» (small world networks), которые представляют собой гибриды регулярных решеток и ансамблей со случайными связями. Одной из первых работ, посвященных моделям «тесного мира», была статья в журнале *Nature* американских ученых Д. Уотта и С. Строгатца [1], в которой они показали, что многие реальные системы в технике, биологии и социологии соответствуют данной модели. Они же предложили и название для таких сетей по аналогии с феноменом «тесного мира», обнаруженного в 1967 году социологом С. Милграммом [2]. Оказалось, что хотя социальные связи имеют локальный характер, локальные кластеры часто оказываются связанными между собой «дальними» связями. Подобное свойство, как было показано в работе [1], характерно и для иных реальных взаимодействующих систем.

Сети «тесного мира» демонстрируют многие явления, характерные для регулярных ансамблей: полную и фазовую синхронизацию колебаний [3–7], образование различных пространственных кластеров [8], стохастический резонанс [9], амплитудную смерть [10], перколяцию [11]. Общий обзор свойств сетей в зависимости от топологии связей можно найти, например, в [12].

Из характерных для сетей явлений особый интерес представляет синхронизация, поскольку она определяет поведение всей сети как единого целого. Для автоколебательных систем под синхронизацией понимают обычно захват фаз колебаний осцилляторов фазой внешней силы (вынужденная синхронизация), либо взаимозахват фаз колебаний в автономной системе (взаимная синхронизация). Следствием этого является подстройка собственных частот колебаний – выработка общего колебательного ритма. Другим, менее очевидным следствием захвата фаз является образование в ансамблях автоколебательных систем различных пространственных структур. Например, в решетках с регулярной структурой связей синхронизация ведет к образованию бегущих автоволн – колебательных режимов, характеризуемых постоянным фазовым сдвигом между колебаниями подсистем [13–15]. В том случае, когда несколько таких колебательных мод сосуществуют в пространстве параметров, говорят о явлении *фазовой мультистабильности* [16, 17].

Фазовая мультистабильность – типичное явление для взаимодействующих осцилляторов. Оно наблюдается для слабосвязанных систем как с простой, так и со сложной динамикой. В первом случае число сосуществующих режимов обычно невелико. В системах со сложным поведением может наблюдаться неограниченный рост числа сосуществующих мод, то есть – *развитая фазовая мультистабильность* [18].

Поскольку системы тесного мира сочетают в себе свойства как регулярных, так и нерегулярных сетей, они также должны демонстрировать явление фазовой мультистабильности. Будет ли оно наблюдаться только при слабой нерегулярности связей, когда структура сети близка к структуре решетки, или оно «выживет» и при сильной неоднородности? Каковы типичные сценарии эволюции фазовой мультистабильности с ростом случайности в структуре связей? Может ли рост нерегулярности вести к каким-либо формам кластеризации в пространственной динамике? Каким образом мультистабильность в таких системах зависит от свойств одиночного осциллятора сети? Будет ли мультистабильность зависеть от скорости «переключения» связей в случае динамической сети? Все перечисленные вопросы представляются интересными и важными для приложений.

В данном исследовании рассматривается фазовая мультистабильность в ансамбле осцилляторов с наиболее простой динамикой – фазовых осцилляторах. Выбор модели обусловлен стремлением «отсечь» все эффекты, связанные с особенностями динамики подсистем и оставить лишь те, что обусловлены топологией и динамикой связей. Структура связей представляет собой гибрид кольца и случайной сети. В отличие от работы [19], где использовалось периодическое переключение связей, а их общее число было фиксированным, в данной модели связи между произвольными узлами кольца спонтанно возникают и исчезают во времени, независимо друг от друга, а их общее число меняется случайным образом. Такая динамика связей представляется более реалистичной. Методом компьютерного эксперимента исследуется к каким эффектам приводит постепенное увеличение силы дальних связей при фиксированных локальных связях. Динамика переключений связей моделируется при помощи клеточного автомата.

1. Сеть «тесного мира» из фазовых осцилляторов

Пусть в общем случае автоколебательная система задана уравнением $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ – вектор динамических переменных, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – вектор-функция,

задающая значения фазовой скорости. Тогда ансамбль из N таких подсистем с диффузионными связями между ними описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N C_{ij} (\mathbf{h}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь функция $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ определяет характер связей, а матрица \hat{C} задает их топологию и интенсивность. В случае сети «тесного мира» структура связей представляет собой гибридную регулярную решетку и сети со случайными связями. Поэтому матрица \hat{C} принимает вид $\gamma \hat{L} + \varepsilon \hat{G}$, где γ и матрица смежности \hat{L} задают интенсивность и структуру для локальных, а ε и \hat{G} – для глобальных (дальнодействующих) связей, соответственно. Выберем в качестве решетки однородное кольцо с взаимными связями, характеризуемое матрицей вида

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Помимо регулярных связей, определяемых матрицей \hat{L} , в сети присутствуют случайные связи, структура которых меняется во времени: связь между двумя произвольными узлами спонтанно возникает и исчезает, независимо от состояния остальных элементов сети. Таким образом матричные элементы G_{ij} случайным образом принимают значения 0 или 1, то есть являются случайными телеграфными сигналами.

Рассмотрим конкретную реализацию системы (1) на базе фазовых осцилляторов $\dot{\varphi} = \omega$ с функцией связи $h(\varphi) = \sin \varphi$

$$\dot{\varphi}_i = \omega + \gamma [\sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \sin(\varphi_{i-1} - \varphi_i)] + \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i). \quad (3)$$

Система (3) при $\varepsilon = 0$ представляет собой хорошо известную в физике модель Курамото [20]. Перейдя в движущуюся систему координат посредством замены переменных $\theta_i = \varphi_i - \omega t$, получим уравнения для модуляции фаз

$$\dot{\theta}_i = \gamma [\sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)] + \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (4)$$

Заметим, что один из коэффициентов связи (γ или ε) можно вынести в качестве общего множителя, который таким образом не влияет на характер динамики, а определяют только ее временной масштаб. Соответственно эволюция системы определяется не самими значениями коэффициентов связи, а лишь их отношением ε/γ . Поэтому в дальнейшем, не снижая общности, будем полагать коэффициент γ равным единице.

2. Фазовая мультистабильность в регулярной сети

При $\varepsilon = 0$ уравнение (4) имеет множество состояний равновесия, подчиняющихся одному из двух условий: $\theta_{i+1} - \theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, или $\theta_{i+1} - \theta_i = \pi - [\theta_i - \theta_{i-1}]$. Обозначив $\theta_2 - \theta_1$ как $\Delta\theta$, получим, что при равновесии разность фаз между любыми соседними осцилляторами составляет либо $\Delta\theta$ (состояние «A»), либо $\pi - \Delta\theta$ (состояние «B»). Таким образом, любое состояние равновесия системы (4) может быть представлено цепочкой из n элементов A и m элементов B , так что $n + m = N$. Учитывая, что суммарный набег фазы вдоль кольца должен быть кратен 2π , получим $n\Delta\theta + m(\pi - \Delta\theta) = 2\pi K$. Значения целочисленных индексов $K = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2$ и $m = 0, 1, \dots, N$ полностью характеризуют установившийся режим. Обозначим его как $C^{K,m}$. Если $m = 0$, то такой режим будет пространственно-однородным, в противном случае – неоднородным.

Как показывают исследования, неоднородные режимы при положительной связи всегда неустойчивы, поэтому мы будем рассматривать только те моды, для которых $m = 0$ (в дальнейшем индекс m будем опускать в обозначениях). Собственные значения матрицы линеаризации для однородных режимов могут быть найдены аналитически (см., например, [15, 21])

$$\lambda_n^{(K)} = -\gamma \cos(\Delta\theta^{(K)}) \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right], \quad (5)$$

$$n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где $\Delta\theta^{(K)}$ подчиняется соотношению

$$\Delta\theta^{(K)} = \frac{2\pi K}{N}. \quad (6)$$

Нулевое собственное значение $\lambda_0^{(K)}$ определяет нейтральную устойчивость решения C^K по отношению к выбору начальной фазы. При положительной связи все остальные собственные значения являются либо одновременно отрицательными при $\Delta\theta^{(K)} \in [-\pi/2 : \pi/2]$, либо одновременно положительными при $\Delta\theta^{(K)} \notin [-\pi/2 : \pi/2]$. Отсюда следует, что для кольца из 30 осцилляторов устойчивыми являются моды с $K = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$. Поскольку волны с положительными и отрицательными индексами отличаются только направлением распространения, в дальнейшем будем рассматривать только режимы с положительными K .

Как следует из равенства (5), все моды с $K \leq 7$ сосуществуют в системе (4) в области значений параметра $\gamma > 0$. Однако не все они в одинаковой степени устойчивы, и соответственно реализация их не является равновероятной. Если задавать начальные условия случайным образом так, чтобы все θ_i представляли собой случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[-\pi : \pi]$, то вероятности выхода на тот или иной режим будут существенно разными: наиболее вероятными окажутся режимы с малыми K (длинноволновые), а моды с $K > 3$ останутся практически ненаблюдаемыми. На рис. 1 построена соответствующая зависимость вероятности реализации режимов с заданным индексом K для 10^5 вариантов выбора случайных начальных условий. Вероятность $P(K)$ для режимов с $K \geq 4$ практически равна нулю. Тем не менее, все перечисленные моды, включая коротковолновые,

можно реализовать, если задавать начальные условия, соответствующие равенству (6).

Таким образом, в отсутствие случайных связей система (4) демонстрирует фазовую мультистабильность при $\gamma > 0$. Вероятно, что эта мультистабильность может сохраниться в сети «тесного мира» при $\varepsilon \rightarrow 0$ и/или при малом числе случайных связей. Рассмотрим, как постепенное увеличение роли нерегулярной составляющей сети влияет на ее пространственную динамику.

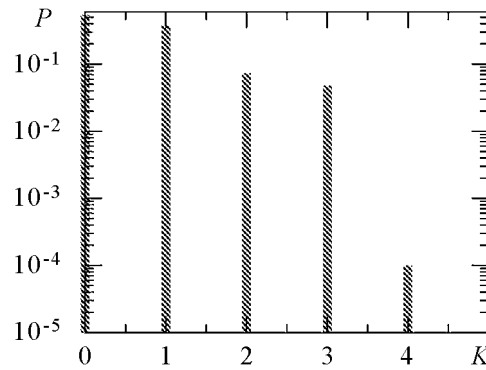


Рис. 1. Вероятности выхода на режимы с разными значениями индекса K при случайном задании начальных условий

3. Моделирование спонтанно возникающих связей при помощи клеточного автомата

Чтобы смоделировать процесс спонтанного возникновения дополнительных связей воспользуемся методом *клеточного автомата*. Рассмотрим клеточный автомат в виде квадратной решетки G_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$, элементы которой принимают два значения (находятся в двух состояниях): 0 и 1. Определим для клеток автомата два события: «возникновение» и «исчезновение». В первом случае элемент $G_{ij} = 0$ трансформируется с вероятностью P_{on} в элемент $G_{ij} = 1$. Во втором случае элемент $G_{ij} = 1$ трансформируется с вероятностью P_{off} в элемент $G_{ij} = 0$. Схематически оба процесса можно представить следующим образом:

$$0 \xrightarrow{P_{\text{on}}} 1, \quad (7)$$

$$1 \xrightarrow{P_{\text{off}}} 0. \quad (8)$$

Рассмотрим эволюцию клеточного автомата во времени с некоторым фиксированным шагом τ : $G_{ij}[n\tau] \rightarrow G_{ij}[(n+1)\tau]$. Заметим, что при малом τ вероятности переходов будут пропорциональны величине шага $P_{\text{on(off)}} = \tau p_{\text{on(off)}}$, где $p_{\text{on(off)}}$ – интенсивности соответствующих случайных процессов. Полученная в результате работы автомата матричная функция дискретного аргумента $\hat{G}(n)$ задает выборку временной эволюции структуры глобальных связей системы (1) с шагом τ . Выберем в качестве начальных условий $\hat{G} = 0$ и рассмотрим работу клеточного автомата для решетки с $N = 30$. Пусть $U = \sum G_{ij}$ – число «единиц», а $S = N^2 - U$ – число «нулей» матрицы \hat{G} . Введем параметр $u = U/N$, характеризующий число связей, приходящихся в среднем на один элемент ансамбля. Его можно назвать *средней концентрацией* связей. Рассмотрим, как значение концентрации меняется в ходе функционирования клеточного автомата. На рис. 2, а построены временные реализации $u(t)$ для двух разных пар значений интенсивностей: $p_{\text{on}} = 0.05$, $p_{\text{off}} = 1.5$ и $p_{\text{on}} = 0.01$, $p_{\text{off}} = 0.15$. Видно, что в обоих случаях после непродолжительного переходного процесса значение u выходит на некоторый стационарный уровень $\bar{u}(t)$, около которого затем флуктуирует. При этом на решетке возникает случайное распределение единиц и нулей, меняющееся во времени. Примеры таких распределений

в моменты времени t_1 (отмечены кружками) и $t_2 = t_1 + 50\tau$ (отмечены крестиками) показаны на рис. 2, б.

Установившееся значение \bar{u} можно оценить, воспользовавшись методом *среднего поля*. Для этого запишем среднее изменение числа «единиц» на одном шаге алгоритма

$$\Delta U = SP_{\text{on}} + UP_{\text{off}}. \quad (9)$$

Поделив уравнение (9) на N и учтя соотношение между S и U , перепишем его для величины концентрации связей u

$$\Delta u = (N - u)p_{\text{on}}\tau + up_{\text{off}}\tau. \quad (10)$$

Если шаг по времени мал («малость» интервала τ означает малую величину приращения Δu), отображение (10) будет эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{u} = p_{\text{on}}(N - u) - p_{\text{off}}u. \quad (11)$$

Уравнение (11) имеет единственное состояние равновесия с координатой

$$u_0 = N \frac{\xi}{1 + \xi}, \quad (12)$$

где $\xi = p_{\text{on}}/p_{\text{off}}$ – отношение вероятностей. Значение u_0 дает оценку среднего числа глобальных связей для одного осциллятора $u_0 \simeq \bar{u}$. Равенство (12) показывает, что число дальних связей системы определяется не самими значениями вероятностей событий, а лишь их отношением. Одновременно меняя в одной и той же пропорции p_{on} и p_{off} , получим одно и то же среднее число связей. Однако сами значения вероятностей тоже приходится принимать во внимание – они влияют на частоту переключений связей.

Пусть f_s – среднее число переключений связей одного осциллятора, происходящих за единицу времени. Чтобы определить f_s , рассчитаем вероятность P_s одного переключения за шаг τ для элемента решетки G_{ij} . Она может быть определена

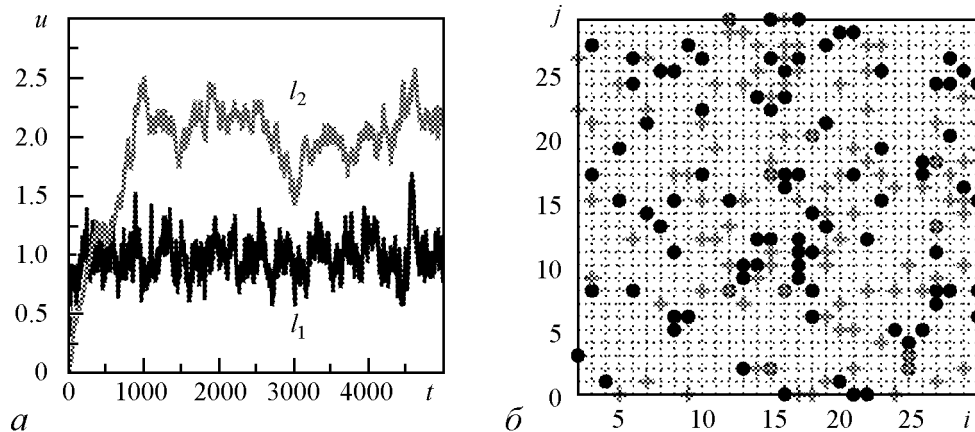


Рис. 2. а – Зависимость среднего числа глобальных связей одного осциллятора от времени при $p_{\text{on}} = 0.05$, $p_{\text{off}} = 1.5$ (кривая l_1) и $p_{\text{on}} = 0.01$, $p_{\text{off}} = 0.15$ (кривая l_2); б – распределение «единиц» на решетке в моменты времени, отличающиеся на интервал $\Delta t = 1$. Шаг работы автомата $\tau = 0.02$

как сумма вероятностей двух независимых событий – «включения» новой связи или «выключения» существующей

$$P_s = P_{\text{on}} \frac{S}{N^2} + P_{\text{off}} \frac{U}{N^2}. \quad (13)$$

Здесь S/N^2 и U/N^2 – вероятности того, что выбранный элемент G_{ij} находится в состоянии «0» или «1», соответственно. Так как одному осциллятору сопоставляются N элементов матрицы \hat{G} (строка), то вероятность переключений какой-либо из его связей составит NP_s . Отсюда следует, что среднее число переключений связей для одного осциллятора составит NP_s/τ . Подставляя значение P_s из (13) и учитывая (12), получим

$$f_s = 2Np_{\text{off}} \frac{\xi}{1 + \xi}. \quad (14)$$

Средняя концентрация связей \bar{u} и их средняя частота переключений f_s – характеристики сети, которые определяют ее свойства. Они более наглядны, чем сами вероятности переключений P_{on} и P_{off} , и поэтому будут использоваться для управления состоянием связей. Проведенные исследования показывают, что при малых P_{on} и P_{off} величина u_0 достаточно точно оценивает среднее число единиц в матрице \hat{G} . Так, на рис. 3, *a* построены зависимости $\bar{u}(t)$ от ξ , полученные в ходе работы клеточного автомата при разных значениях P_{off} . Для сравнения штриховой линией изображена соответствующая теоретическая зависимость, подсчитанная по формуле (12). Из рисунка видно, что чем меньше значение вероятности, тем лучше экспериментальное значение совпадает с теоретическим. Аналогичный характер имеют зависимости средней частоты переключений f_s от ξ , построенные на рис. 3, *б* при тех же значениях P_{off} . Для $P_{\text{off}} = 0.04$ и $P_{\text{off}} = 0.1$ соответствие с теоретической оценкой хорошее, а для $P_{\text{off}} = 0.4$ экспериментальное значение уже значительно отстает от оценочного.

Как следует из рис. 3, при небольшом числе связей ($u_0 \ll 1$) для хорошего соответствия между u_0 и $\bar{u}(t)$ достаточно выбрать частоту переключений $f_s < 10$. В этом диапазоне значений u_0 и f_s можно использовать в качестве управляющих па-

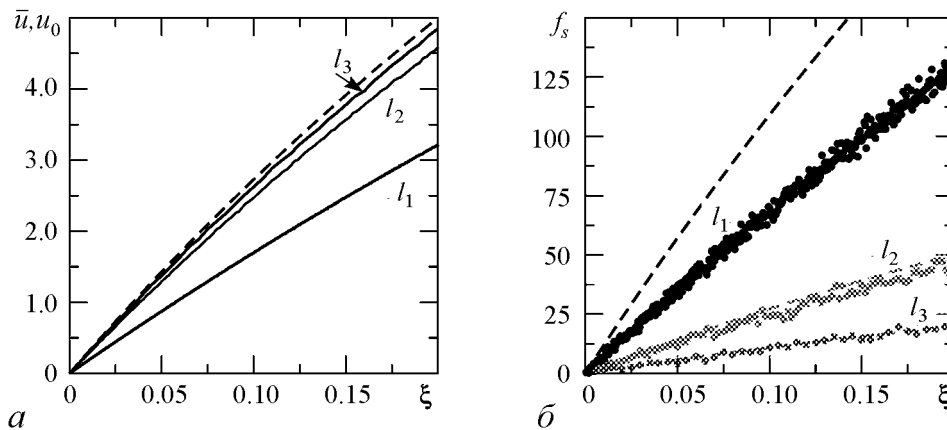


Рис. 3. *a* – зависимость средней концентрации связей \bar{u} от ξ при $P_{\text{off}} = 0.4$ (линия l_1), $P_{\text{off}} = 0.1$ (линия l_2) и $P_{\text{off}} = 0.04$ (линия l_3); *б* – зависимость средней скорости переключений связей одного осциллятора f_s от ξ при тех же значениях P_{off} . Теоретические зависимости отображаются штриховыми линиями

раметров. При этом величины вероятностей переходов легко могут быть выражены через них по формулам

$$P_{\text{on}} = 0.5 \frac{f_s}{N - u_0} \tau, \quad P_{\text{off}} = 0.5 \frac{f_s}{u_0} \tau. \quad (15)$$

4. Динамика ансамбля при «включении» дальнедействующих связей

Рассмотрим отличие сети «тесного мира» от регулярной сети при постепенном росте числа случайных связей в ансамбле (4). Для этого зафиксируем интенсивность и частоту связей в значениях $\varepsilon = 1$ и $f_s = 3$ и начнем постепенно увеличивать параметр u_0 . В качестве исходного режима выберем сначала моду с наибольшей длиной волны – C^1 .

При $u_0 = 0$ режим C^1 характеризуется постоянным значением разности фаз вдоль кольца: $\Delta\theta^{(1)} = 0.21$. Включение случайных связей нарушает его пространственную однородность. Разности фаз начинают флуктуировать во времени относительно среднего значения: $\Delta\theta_i(t) = \Delta\theta^{(1)} + \eta_i(t)$, где $\eta_i(t)$ – случайный процесс с нулевым средним. Мгновенный снимок таких флуктуаций при $u_0 = 0.07$ представлен на рис. 4, *а* (линия l_1), а соответствующая функция плотности вероятности $\Delta\theta$ – на рис. 4, *б*. При малом числе связей последняя практически повторяет по форме гауссову кривую, с максимумом в точке $\Delta\theta = 0.21$, значение которого отмечено на рисунке штриховой линией. Постепенное увеличение концентрации связей вплоть до $u_0 \simeq 0.1$ не ведет к качественному изменению в поведении системы, а лишь увеличивает интенсивность флуктуаций $\eta_i(t)$. Количественно этот процесс удобно характеризовать при помощи величины среднеквадратичного отклонения (СКО) $\sigma = \sqrt{\langle \Delta\theta^2 \rangle - \langle \Delta\theta \rangle^2}$, где усреднение проводится как по ансамблю осцилляторов, так и по времени. График $\sigma^{(1)}(u_0)$ представлен на рис. 5. Видно, что в широком диапазоне параметра u_0 СКО линейно растет с ростом числа случайных связей. Качественное изменение в динамике начинается при превышении значения $u_0 \simeq 0.1$, что проявляется в изменении зависимости $\sigma^{(1)}(u_0)$ – она становится существенно нелинейной. При этом в самой сети происходит процесс кластеризации. Он выражается в том, что пространственное распределение флуктуаций фаз становится сильно неоднородным. На некотором сегменте кольца разности фаз между соседними ос-

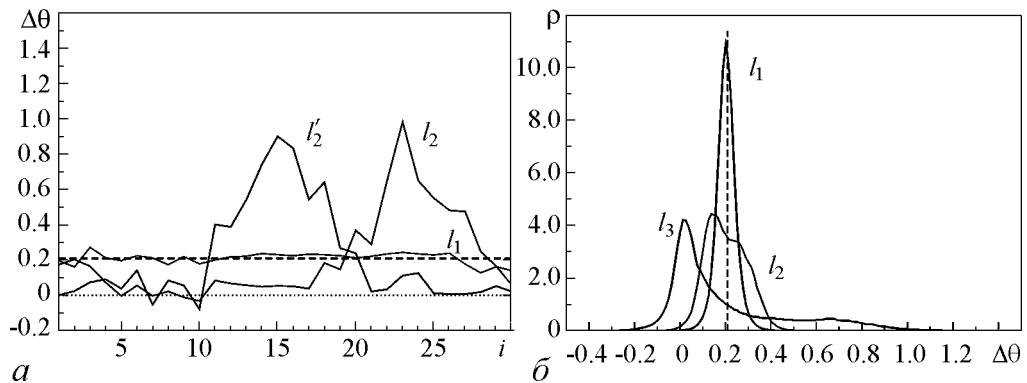


Рис. 4. Эволюция моды C^1 : *а* – распределение разности фаз вдоль кольца для $u_0 = 0.07$ (линия l_1) и $u_0 = 0.23$ (линии l_2 и l'_2); *б* – функция плотности распределения разности фаз $\rho(\Delta\theta)$ для $u_0 = 0.07$ (линия L_1), $u_0 = 0.12$ (линия l_2) и $u_0 = 0.23$ (линия l_3)

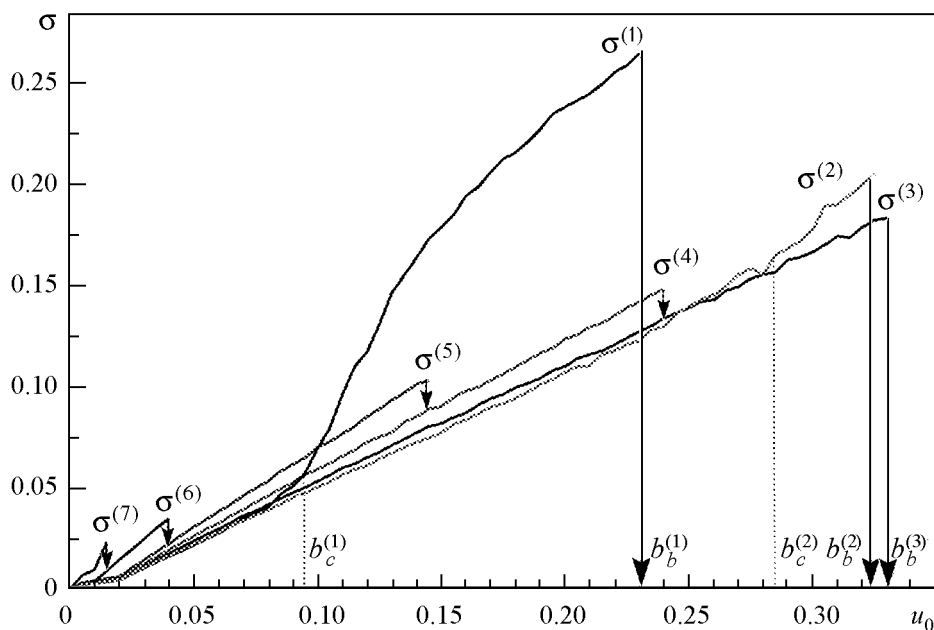


Рис. 5. Зависимость среднеквадратичного отклонения разности фаз от u_0 для режимов с разными целочисленными индексами K

цилляторами начинают уменьшаться, формируя в ансамбле кластер осцилляторов с почти синфазным поведением (линия l_2 на рис. 4, *a*). Чтобы компенсировать это уменьшение разности фаз в другой части кольца формируется несинфазный кластер, в котором разности фаз значительно выше исходного значения $\Delta\theta^{(1)}$. В итоге, несмотря на то, что среднее значение $\Delta\theta$ в ансамбле сохраняется равным $\Delta\theta^{(1)}$, ансамбль разбивается на два сектора с существенно разным поведением.

Образовавшаяся двухкластерная структура является подвижной – она случайным образом «блуждает» вдоль кольца. Для иллюстрации этого процесса на том же рисунке приведено распределение разностей фаз в момент времени, отстоящий от предыдущего на интервал $\Delta t = 4000$ (линия l'_2). Видно, что несинфазный кластер меняет свое положение в ансамбле осцилляторов, слегка изменяя форму, но в целом сохраняя свою ширину постоянной. Изменение в распределении фаз отражается и на зависимости $\rho(\Delta\theta)$ (см. рис. 4, *b*). Хорошо видно, что при $u_0 = 0.12$ плотность вероятности распределения фаз (линия l_2) перестает подчиняться нормальному закону: она становится несимметричной, максимум плотности вероятности смещается в сторону нуля и одновременно формируется длинный «хвост» в сторону больших значений $\Delta\theta$. При увеличении числа связей этот характер зависимости $\rho(\Delta\theta)$ становится еще более выраженным (линия l_3).

Несмотря на то, что значения $\Delta\theta_i$ случайным образом меняются во времени, полный набег фазы вдоль кольца сохраняется равным 2π . Таким образом, в данной области параметров динамические связи искажают режим C^1 , но не разрушают его окончательно. При отключении этих связей система немедленно возвращается к исходному однородному состоянию.

Рассмотренная динамика наблюдается вплоть до $u_0 \simeq 0.23$. При превышении этого значения мода C^1 теряет устойчивость, и система необратимо переходит на синфазный режим C^0 , на который диффузионные связи не оказывают влияния. На рис. 5 этот переход показан стрелкой. Таким образом, эволюция моды с наибольшей

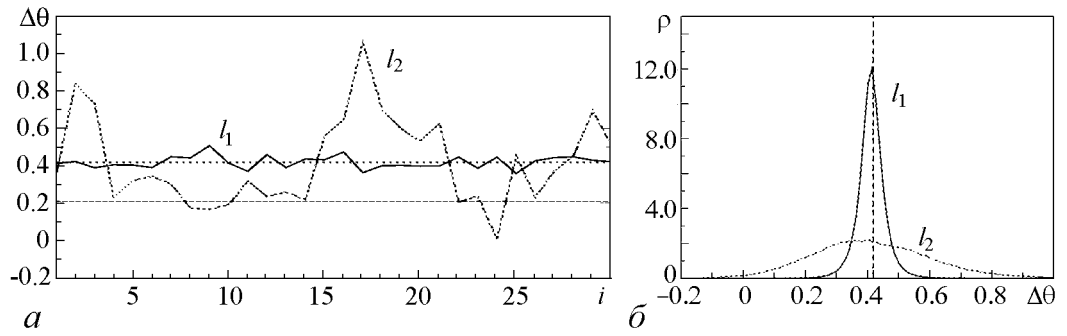


Рис. 6. Эволюция моды C^2 : a – распределение разности фаз вдоль кольца для $u_0 = 0.1$ (линия l_1) и $u_0 = 0.33$ (линия l_2); b – функция плотности распределения разности фаз $\rho(\Delta\theta)$ для тех же значений u_0

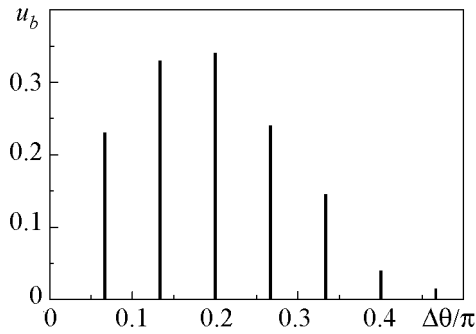


Рис. 7. Зависимость критического значения параметра $u_b^{(K)}$ от $\Delta\theta^{(K)}$

длиной волны проходит через два критических значения параметра u_0 : $u_c^{(1)} \simeq 0.1$ – начало кластеризации и $u_b^{(1)} \simeq 0.23$ – потеря устойчивости моды C^1 .

Рассмотрим теперь следующий за C^1 режим – моду C^2 . Исследования показывают, что ее эволюция с увеличением u_0 будет качественно схожей с эволюцией C^1 ; однако значения критических параметров u_c и u_b иные: $u_c^{(2)} \simeq 0.29$ и $u_b^{(2)} \simeq 0.33$. Таким образом

начало кластеризации существенным образом сдвигается в сторону больших значений u_0 – почти к самой границе существования моды. Соответственно процесс кластеризации существует в узком диапазоне параметра и оказывается менее выражен. На рис. 6, a построены распределения разностей фаз вдоль кольца вне зоны кластеризации (линия l_1) и внутри нее (линия l_2). В первом случае все значения $\Delta\theta_i$ флуктуируют вокруг $\Delta\theta^{(2)}$, а во втором – формируются кластеры, в которых значения $\Delta\theta_i$ «спускаются» к $\Delta\theta^{(1)}$, и кластеры, в которых разность фаз увеличивается. При достижении u_0 критического значения $u_b^{(2)} \simeq 0.33$ система необратимо переходит к более длинноволновому состоянию, каковым для данного значения параметра u_0 является режим C^0 (поскольку, как следует из рис. 5, мода C^1 к этому моменту уже не существует).

Исследование более коротковолновых режимов: C^3, \dots, C^7 – показывает, что процесс кластеризации для них не наблюдается вовсе – каждый из этих режимов демонстрирует линейный рост интенсивности флуктуаций разности фаз вплоть до своего разрушения при достижении критического значения $u_b^{(K)}$. При этом происходит необратимый переход на ближайший из более длинноволновых режимов, который существует при данном u_0 : $C^3 \rightarrow C^0$ (режимы C^1 и C^2 к этому моменту уже потеряли устойчивость), $C^4 \rightarrow C^3$, $C^5 \rightarrow C^4$, $C^6 \rightarrow C^5$ и $C^7 \rightarrow C^6$ (см. рис. 5).

Таким образом, под действием случайных связей происходит сначала «возмущение» колебательных режимов, затем для некоторых из них – разделение на кластеры с разным фазовым поведением и, в конце концов, – потеря устойчивости и переход на более длинноволновый режим. Зависимость критических значений параметра u_0 для каждой из рассмотренных мод построена на рис. 7.

5. Влияние выбора управляющих параметров на динамику системы

Описанная выше эволюция режимов построена для фиксированных значений параметров ε и f_s . Попробуем выяснить, как изменится картина явлений при другом выборе этих величин. Рассмотрим сначала зависимость от величины интенсивностей случайных связей ε . Как показывают исследования, полученная ранее для $\varepsilon = 1$ эволюция качественно воспроизводится и для других значений интенсивности связей. Чтобы определить количественную зависимость от этого параметра построим график $\sigma(u_0)$ для разных значений ε и сравним результат с уже полученной ранее зависимостью для $\varepsilon = 1$. Результаты расчетов для моды C^1 представлены на рис. 8. Кривая l_1 отображает график $\sigma^{(1)}(u_0)$ для $\varepsilon = 1$, а кривые l_2 и l_3 – для $\varepsilon = 0.5$ и $\varepsilon = 2.0$, соответственно. Из рисунка видно, что форма зависимостей всех трех графиков подобна друг другу и они отличаются лишь масштабом по оси u_0 . Например, кривая l_2 при сжатии по оси абсцисс в два раза ($u_0 \rightarrow u_0/2$) практически совмещается с кривой l_1 . Для наглядности такое перемасштабирование произведено на том же рисунке (линия l'_2). Аналогичный результат продемонстрирован для линии l_3 : растяжение масштаба вдвое ($u_0 \rightarrow 2u_0$) совмещает полученную линию l'_3 с линией l_1 .

Таким образом, динамика системы в равной степени зависит как от средней концентрации связей \bar{u} , так и от их интенсивностей ε . Увеличение средней концентрации числа связей ведет к тем же последствиям, что и аналогичное увеличение их интенсивностей. Чтобы учесть их совместное влияние введем в качестве эффективного параметра нелокальных связей величину $\mu = \varepsilon \bar{u}$. Наши исследования показывают, что именно эта величина является определяющей для динамики ансамбля (4).

Рассмотрим теперь, как динамика системы зависит от средней скорости переключения связей f_s . Верхней границей для этой величины является частота переключений клеточного автомата $1/\tau$, которая в нашем случае равна 50. Нижняя граница ($f_s = 0$) соответствует случаю «замороженных» связей. Построим зависимость СКО разности фаз от f_s при фиксированных значениях параметра μ . На рис. 9 приведены

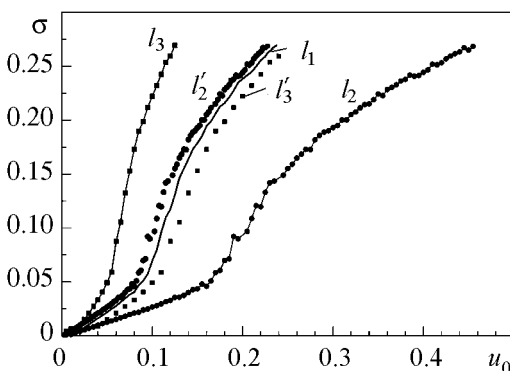


Рис. 8. Зависимость σ от u_0 при разных значениях ε : $\varepsilon = 1$ (линия l_1), $\varepsilon = 0.5$ (линия l_2) и $\varepsilon = 2$ (линия l_3). Линия l'_2 – это l_2 , построенная при масштабировании $u_0 \rightarrow 0.5u_0$; линия l'_3 – это l_3 , построенная при масштабировании $u_0 \rightarrow 2u_0$

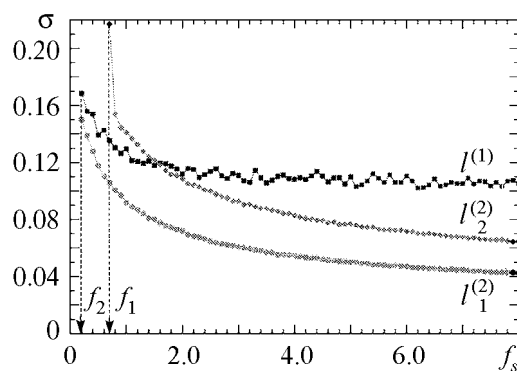


Рис. 9. Зависимость среднеквадратичного отклонения разностей фаз σ от скорости переключения связей f_s

соответствующие зависимости для моды C^1 при $\mu = 0.1$ (линия $l^{(1)}$) и моды C^2 при $\mu = 0.1$ (линия $l_1^{(2)}$) и $\mu = 0.15$ (линия $l_2^{(2)}$). Видно, что неоднородность в распределении фаз увеличивается при уменьшении скорости переключения связей. При больших f_s эта зависимость очень пологая, но при стремлении частоты переключений к нулю, дисперсия разности фаз резко растет и при достижении f_s некоторого критического значения, зависящего от μ , наблюдается необратимый переход к синфазным колебаниям. При $\mu = 0.1$ критическое значение частоты переключений составляет $f_s \simeq 0.2$ (отмечено на рисунке как f_2), а при $\mu = 0.15$ – $f_s \simeq 0.6$ (отмечено как f_1). Таким образом, при «замороженных» связях мультистабильность в системе отсутствует. В рассмотренной области значений параметров при каждом значении эффективного параметра связей существует нижний порог частоты переключений дальних связей, после которого «включается» мультистабильность.

Отсутствие мультистабильности в случае слишком медленных связей можно объяснить с точки зрения явления синхронизации колебаний. Как уже отмечалось выше, в ансамбле с регулярными связями «выживают» только однородные типы колебаний, при которых разности фаз у любого узла сети с соседями являются одинаковыми. Появление дополнительных связей между произвольными узлами ансамбля приводит к тому, что условие однородности становится возможным только для синфазных колебаний. Любые другие моды становятся неустойчивыми и начинают медленно эволюционировать в сторону моды C^0 . При этом, если время переходного процесса оказывается меньшим, чем интервал стационарности связей, этот переход завершается установлением синфазного режима. Последний является устойчивым к любым изменениям в структуре связей. Если же время переходного процесса оказывается меньшим, чем $1/f_s$, то он не успевает завершиться до того, как структура связей успеет смениться на новую. При этом реализуется режим перманентных блужданий θ_i вокруг их средних значений.

Выводы

Фазовая мультистабильность, характерная для кольца взаимосвязанных автоколебательных систем, сохраняется и в модели «тесного мира» в том случае, если структура случайных связей меняется со временем. Существует нижний порог частоты переключений связей за которым из всех мод остается только мода синфазных колебаний.

При росте числа случайных связей или их интенсивностей сосуществующие режимы (кроме синфазного) проходят через ряд стадий: флуктуация разностей фаз относительно среднего уровня; формирование пространственных кластеров с разными характерными значениями $\Delta\theta$ (этот этап может отсутствовать у некоторых мод); необратимый переход на синфазный режим. Таким образом, мультистабильность сохраняется лишь при небольшом числе и небольшой интенсивности действующих связей. При большом числе таких связей в системе наблюдаются только синфазные колебания.

У каждой из мод, за исключением синфазной, существует критический параметр концентрации случайных связей, при переходе через который данный вид колебаний теряет устойчивость. При этом траектория переходит на ближайшую бо-

лее длинноволновую моду из тех, что остаются устойчивыми при данных значениях параметров.

Динамика системы в равной степени зависит как от средней концентрации связей \bar{u} , так и от их интенсивностей ε . Увеличение средней концентрации числа связей ведет к тем же последствиям, что и аналогичное увеличение их интенсивностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-02-01298-а).

Библиографический список

1. *Watt D.J., Strogatz S.H.* Collective dynamics of «small-world» networks // *Nature*. 1998. Vol. 393. P. 440.
2. *Milgram S.* The small world problem // *Psychology Today*. 1967. Vol. 2. P. 60.
3. *Belykh I.V., Hasler M., Belykh V.N.* Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling // *Physica D*. 2004. Vol. 195, № 1–2. P. 188.
4. *Li C., Chen G.* Phase synchronization in small-world networks of chaotic oscillators // *Physica A*. 2004. Vol. 341, № 1–4. P. 73.
5. *Percha B., Dzakpasu R., Zochowski M.* Parent Transition from local to global phase synchrony in small world neural network and its possible implications for epilepsy // *Physical Review E*. 2005. Vol. 72, № 3. P. 1.
6. *Wang Q., Duan Z., Perc M., Chen G.* Synchronization transitions on small-world neuronal networks: Effects of information transmission delay and rewiring probability // *European Physical Letters*. 2008. Vol. 83, № 5. P. 50008.
7. *Yu H., Wang J., Deng B., Wei X., Wong Y.K., Chan W.L., Tsang K.M., Yu Z.* Chaotic phase synchronization in small-world networks of bursting neurons // *Chaos*. 2011. Vol. 21, № 1. P. 013127.
8. *Rothkegel A., Lehnertz K.* Multistability, local pattern formation, and global collective firing in a small-world network of nonleaky integrate-and-fire neurons // *Chaos*. 2009. Vol. 19, № 1. P. 015109.
9. *Gao Z., Hu B., Hu G.* Stochastic resonance of small-world networks // *Physical Review E*. 2001. Vol. 65. P. 016209.
10. *Hou Z., Xin H.* Oscillator death on small-world networks // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68. P. 551031.
11. *Moukarzel C.F.* Percolation in networks with long-range connections // *Physica A*. 2006. Vol. 372, № 2. P. 340.
12. *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2010. Т. 2, № 2. С. 121.
13. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика*. 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
14. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
15. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13, № 4. С. 37.

16. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
17. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 2. С. 2.
18. Шабунин А.В., Астахов В.В. Фазовая мультистабильность в ансамбле генераторов с удвоениями периода // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 99.
19. Шабунин А.В. Действие случайных дальних связей на систему с фазовой мультистабильностью // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 2. С. 20.
20. Kuramoto Y. Chemical oscillators, waves and turbulence. New-York: Springer, 1984.
21. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов. Изд. Нижегородского университета, 1991. С. 84.

Поступила в редакцию 11.03.2014

После доработки 12.05.2014

MULTISTABILITY IN DYNAMICAL SMALL WORLD NETWORKS

A. V. Shabunin

Saratov State University

We explore phase multistability which takes place in an ensemble of periodic oscillators under the action of long-distance couplings, which appear randomly between the arbitrary cells. The system under study is Kuromoto's model with additional dynamical interconnections between phase oscillators. The sequence of bifurcations, which accompany increasing of the strength of the global coupling is determined. Regions of multistability existence are defined.

Keywords: Distributed systems, oscillations, synchronization, multistability, «small world» models колебания.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: shabuninav@info.sgu.ru