



## **ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ С ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

*В.П. Пономаренко*

Приведены результаты численного исследования динамических режимов и бифуркационных переходов в автогенераторной системе с частотно-фазовым управлением, проведенного на основе математической модели с тремя степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве. Обнаружено большое разнообразие различных аттракторов колебательного и вращательного типа, соответствующих модуляционным режимам системы. Исследованы сценарии перехода от регулярных режимов к хаотическим при изменении параметров цепей управления. Выявлена сильная зависимость колебательных состояний от этих параметров, позволяющая осуществлять управление модуляционными режимами.

1. В настоящее время большое внимание уделяется изучению различных автоколебательных систем с хаотическим поведением. Интересным и важным классом таких систем являются автогенераторные системы с частотным и фазовым управлением, основанные на принципе автоподстройки частоты колебаний перестраиваемого генератора к частоте опорного колебания и нашедшие широкое применение в качестве устройств стабилизации частоты, синхронизации и слежения в системах формирования, передачи и обработки сигналов [1, 2]. В последнее время при исследовании систем с фазовым и частотным управлением большое внимание уделяется изучению эффектов автомодуляции, обусловленных влиянием цепей управления, и использованию этих эффектов для генерации периодически или хаотически модулированных сигналов различной сложности. Привлекательной особенностью систем является то, что с помощью варьирования структур и параметров цепей управления можно легко обеспечить эффективное воздействие на свойства, характеристики и области существования генерируемых колебаний.

Возможности систем с фазовым и частотным управлением в плане генерации хаотических колебаний представляют непосредственный практический интерес в связи с широко обсуждаемой в литературе проблемой создания эффективных источников сложных сигналов для реализации коммуникационных систем на основе динамического хаоса [3, 4]. По этой причине возникает необходимость детального исследования сложной динамики разнообразных вариантов систем с фазовым и частотным управлением, включая анализ влияния параметров цепей управления

на процессы возбуждения, и развития модуляционных колебаний и получение данных об областях значений этих параметров, соответствующих генерации хаотических колебаний. В этом направлении изучаются как однокольцевые, так и взаимосвязанные системы частотной и фазовой автоподстройки с фильтрами различной сложности в цепях управления [5–15]. Данная работа продолжает исследования [13–15] динамических моделей автогенераторной системы с комбинированным частотно-фазовым управлением, иначе называемой системой частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП).

2. Уравнение динамики системы ЧФАП, записанное в операторной форме ( $p \equiv d/dt$ ) для разности фаз  $\varphi$  управляемого и опорного колебаний, имеет вид [16]

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p)F(\varphi) + \Omega_2 K_2(p)\Phi(p\varphi) = \delta\omega, \quad (1)$$

где  $K_1(p)$  и  $K_2(p)$  – коэффициенты передачи фильтров  $\Phi_1$  в фазовой и  $\Phi_2$  в частотной цепях управления, соответственно;  $F(\varphi)$  и  $\Phi(p\varphi)$  – характеристики фазового и частотного дискриминаторов, нормированные на единицу;  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – коэффициенты усиления по цепям управления;  $\delta\omega$  – начальная частотная расстройка. В [13–15] исследована динамика моделей системы ЧФАП, соответствующих фильтрам  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , при которых одна из подсистем автономно демонстрирует только регулярное, а другая – как регулярное, так и хаотическое поведение; характеристики дискриминаторов аппроксимированы функциями

$$F(\varphi) = \sin \varphi, \quad \Phi(p\varphi) = 2\beta_1 p\varphi / (1 + \beta_1^2 (p\varphi)^2), \quad (2)$$

где  $\beta_1$  – расстройка частот, при которой достигается максимум  $\Phi(p\varphi)$ . В этих случаях выяснено, что добавление петли фазового управления с периодической характеристикой дискриминатора  $F(\varphi)$  к системе частотной автоподстройки приводит к появлению новых модуляционных режимов управляемого генератора, определяемых периодическими и хаотическими аттракторами вращательного и колебательно-вращательного типа в фазовом пространстве соответствующих моделей системы. В данной работе мы рассмотрим особенности динамики модели системы ЧФАП, соответствующей случаю, когда в обеих автономных подсистемах частотного и фазового управления наблюдаются как регулярные (возможно достаточно сложные), так и хаотические режимы поведения. Простейшими фильтрами в цепях управления, при которых такой случай реализуется, являются фильтр  $\Phi_1$  второго порядка ( $K_1(p) = 1/(1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2)$ ) и фильтр  $\Phi_2$  третьего порядка ( $K_2(p) = 1/(1 + (T_3 + T_4 + T_5)p + (T_3 T_4 + T_3 T_5 + T_4 T_5)p^2 + T_3 T_4 T_5 p^3)$ ),  $T_1, T_2, T_3, T_4$  и  $T_5$  – постоянные времени.

Математическую модель рассматриваемой системы ЧФАП на основании уравнения (1) при аппроксимации нелинейных характеристик дискриминаторов функциями (2) записываем в виде

$$\begin{aligned} d\varphi/d\tau &= u, \\ du/d\tau &= z, \\ dz/d\tau &= v, \\ dv/d\tau &= w, \\ dw/d\tau &= \eta, \\ \mu_1 \mu_2 d\eta/d\tau &= \gamma - \sin \varphi - b\Phi(y) - (1 + \varepsilon_2 \cos \varphi)u - \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu \cos \varphi + b\beta\varepsilon_1\Phi'(y))z - (\mu_1 + \mu + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \mu_2 \cos \varphi + b\beta\mu_1\Phi'(y))v - \\
& -(\mu_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\mu + \mu_2)w - (\mu_1\mu + \varepsilon_1\mu_2)\eta + \mu u^2 \sin \varphi + \\
& + \mu_2 u^3 \cos \varphi + 3\mu_2 uz \sin \varphi - b\beta^2\mu_1\Phi''(y)z^2,
\end{aligned}$$

где  $\gamma = \delta\omega/\Omega_1$ ,  $b = \Omega_2/\Omega_1$ ,  $\beta = \beta_1\Omega_1$ ,  $\varepsilon_1 = (T_1 + T_2)\Omega_1$ ,  $\varepsilon_2 = (T_3 + T_4 + T_5)\Omega_1$ ,  $\mu_1 = T_1T_2\Omega_1^2$ ,  $\mu = (T_3T_4 + T_3T_5 + T_4T_5)\Omega_1^2$ ,  $\mu_2 = T_3T_4T_5\Omega_1^3$ ,  $\Phi(y) = 2y/(1 + y^2)$ ,  $\Phi'(y) = 2(1 - y)/(1 + y^2)^2$ ,  $\Phi''(y) = -4y(3 - y^2)/(1 + y^2)^3$ ,  $y = \beta u$ . Система (3) имеет шестимерное цилиндрическое фазовое пространство  $U = \varphi(\text{mod}2\pi)$ ,  $u, z, v, w, \eta$ , она инвариантна относительно замены  $(\varphi, u, z, v, w, \eta) \rightarrow (-\varphi, -u, -z, -v, -w, -\eta)$ , поэтому достаточно рассмотреть ее при значениях  $\gamma \geq 0$ . Параметр  $b$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения; при этом значения  $b > 0$  соответствуют традиционной системе ЧФАП, а значения  $b < 0$  – системе ЧФАП с инвертированной характеристикой частотного дискриминатора [6, 14]. Остальные параметры модели (3) положительны по своему физическому смыслу.

Система ЧФАП может иметь следующие стационарные режимы [13–15]. *Режим синхронизации*, в котором разность частот колебаний управляемого и опорного генераторов равна нулю при постоянной разности фаз  $\varphi$ , зависящей от величины начальной расстройки  $\gamma$ , – это моногармонический режим управляемого генератора. *Периодические или хаотические модуляционные режимы*, подразделяющиеся на квазисинхронные, при которых разность фаз  $\varphi$  изменяется в ограниченном диапазоне значений, и асинхронные, при которых наблюдаются либо возрастание (убывание) разности фаз  $\varphi$ , либо чередование стадий неограниченного изменения  $\varphi$  и ее колебательного поведения в ограниченном диапазоне значений, – в этих режимах имеет место периодическая или хаотическая модуляция частоты управляемого генератора. В фазовом пространстве  $U$  режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия модели (3), несинхронным режимам соответствуют предельные циклы, притягивающие торы или хаотические аттракторы колебательного (без вращения  $\varphi$ ), вращательного и колебательно-вращательного типа.

В данной работе представлены результаты численного исследования сложной динамики системы ЧФАП, выполненного на основе модели (3) при помощи качественно-численных методов и компьютерного моделирования с использованием программного комплекса «ДНС» [17]. Основное внимание уделено анализу процессов возбуждения и преобразования модуляционных режимов управляемого генератора, процессов хаотизации этих режимов и сценариев перехода от регулярных режимов к хаотическим при изменении параметров, а также выяснению новых эффектов в динамике системы ЧФАП, обусловленных применяемыми фильтрами в цепях управления.

**3.** Модель (3) при значениях  $0 \leq \gamma < 1$  имеет два состояния равновесия  $A_1(\arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$  и  $A_2(\pi - \arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$ , из которых  $A_1$  может быть как устойчивым, так и неустойчивым, а  $A_2$  – всегда неустойчивое седлового типа. Условия устойчивости состояния равновесия  $A_1$ , то есть условия существования моногармонического режима управляемого генератора системы ЧФАП, находим из

характеристического уравнения

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0,$$

где

$$a_1 = (\mu\mu_1 + \mu_2\varepsilon_1)/(\mu_1\mu_2), \quad a_2 = (\mu_1\varepsilon_2 + \mu_2 + \varepsilon_1\mu)/(\mu_1\mu_2),$$

$$a_3 = (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \mu + \mu_1 + \mu_2(1 - \gamma^2)^{1/2} + 2b\beta\mu_1)/(\mu_1\mu_2),$$

$$a_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu(1 - \gamma^2)^{1/2} + 2b\beta\varepsilon_1)/(\mu_1\mu_2),$$

$$a_5 = (1 + \varepsilon_2(1 - \gamma^2)^{1/2} + 2b\beta)/(\mu_1\mu_2), \quad a_6 = (1 - \gamma^2)^{1/2}/(\mu_1\mu_2),$$

и, в силу критерия Гурвица, записываем в виде неравенств

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_6 > 0, \quad a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1(a_1a_4 - a_5) > 0, \\ (a_1a_2 - a_3)[a_5(a_4a_3 - a_2a_5) + a_6(2a_1a_5 - a_3^2)] + \\ + (a_1a_4 - a_5)[a_1a_3a_6 - a_5(a_1a_4 - a_5)] - a_1^3a_6^2 > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Область значений параметров модели (3), для которых выполняются условия (4), соответствует области удержания моногармонического режима. Нарушение этих условий сопровождается мягким или жестким переходом системы ЧФАП к режиму периодической модуляции частоты генератора.

4. С целью получения представления о возможных автомодуляционных режимах управляемого генератора, развивающихся вне области существования моногармонического режима, была построена бифуркационная диаграмма системы ЧФАП на плоскости параметров «параметр инерционности  $\mu_1$ , определяющий степень влияния фильтра  $\Phi_1$ , – начальная расстройка  $\gamma$ » (рис. 1) для заданных значений параметров модели (3). Линии  $l_0$  ( $\gamma = 0$ ),  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $l_4$ ,  $l_5$  и  $l_6$  выделяют на плоскости  $(\mu_1, \gamma)$  области  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  существования квазисинхронных режимов системы ЧФАП с периодической модуляцией частоты управляемого генератора, которые определяются в фазовом пространстве  $U$  устойчивыми предельными циклами  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  колебательного типа вокруг неустойчивого состояния равновесия  $A_1$ . Диапазон изменения разности фаз  $\varphi$  в этих режимах не превосходит  $2\pi$ . Область  $C_1$  режима цикла  $S_1$  ограничена линиями  $l_1$ ,  $l_0$  и  $l_2$ , область  $C_2$  режима цикла  $S_2$  – линиями  $l_3$ ,  $l_0$  и  $l_4$ , область  $C_3$  режима цикла  $S_3$  – линиями  $l_0$ ,  $l_5$  и  $l_6$ . Режимы циклов  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  различаются амплитудой и частотой автомодуляции.

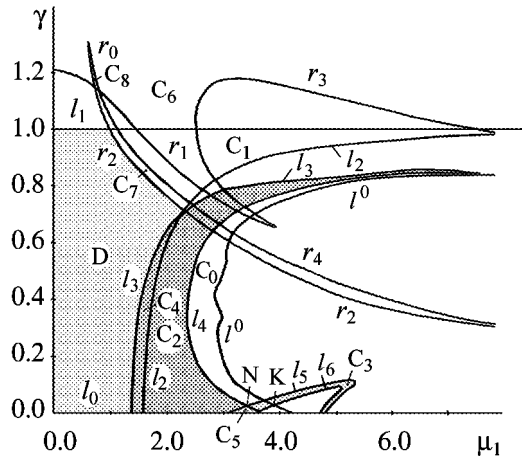


Рис. 1. Области несинхронных режимов системы ЧФАП при следующих значениях параметров модели (3):  $b = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 1.25$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\mu = 2$ ,  $\mu_2 = 3.2$

Линии  $l_1$ ,  $l_3$  и  $l_5$  – это линии седло-узловых бифуркаций предельных циклов  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , соответственно (мультипликаторы циклов обращаются в  $+1$ ). Отметим, что линия  $l_1$  расположена вблизи линии  $\gamma = 1$  и идет ниже этой линии. Линия  $l_2$  является линией бифуркации рождения в фазовом пространстве  $U$  двумерного тора  $T_1$  из предельного цикла  $S_1$ ; тор  $T_1$  рождается при пересечении линии  $l_2$  с возрастанием  $\mu_1$  или с уменьшением  $\gamma$ , когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла  $S_1$  пересекает единичную окружность. При этом исходный одночастотный квазисинхронный режим превращается в квазипериодический – двухчастотный. Линии  $l_4$  и  $l_6$  отвечают потере устойчивости циклов  $S_2$  и  $S_3$  в результате бифуркации удвоения периода (мультипликаторы циклов обращаются в  $-1$ ).

Отметим, что пересечение бифуркационных кривых  $l_2$  и  $l_3$ , а также кривых  $l_4$  и  $l_5$  обуславливает наличие областей значений  $\mu_1$  и  $\gamma$ , соответствующих одновременному существованию двух квазисинхронных режимов, а именно, в области  $C_4$ , заключенной между частями линий  $l_0$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , существуют режимы циклов  $S_1$  и  $S_2$ ; в области  $C_5$ , ограниченной частями линий  $l_4$  и  $l_5$  ниже точки  $N$  и  $l_0$ , существуют режимы циклов  $S_2$  и  $S_3$ . Какой из режимов реализуется для этих областей параметров – это зависит от начальных значений фазовых переменных. Примечательно, что кроме режимов предельных циклов  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  в системе ЧФАП реализуются и другие квазисинхронные режимы, определяемые сложными колебательными предельными циклами модели (3), в том числе с динамическим диапазоном изменения разности фаз  $\varphi$ , превосходящим  $2\pi$ .

Линии  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  и  $r_4$ , построенные на рис. 1, соответствуют бифуркациям вращательных однооборотных ( $2\pi$ -периодических по  $\varphi$ ) предельных циклов системы (3). Линии  $r_1$  и  $r_2$  отвечают седло-узловым бифуркациям, при пересечении этих линий с увеличением  $\mu_1$  или  $\gamma$  в результате этих бифуркаций в фазовом пространстве появляются устойчивые предельные циклы  $L_1$  и  $L_2$ , соответственно. Циклы  $L_1$  и  $L_2$  определяют асинхронные режимы системы ЧФАП с нарастанием разности фаз  $\varphi$  и периодическим изменением частоты управляемого генератора относительно некоторого среднего значения. Режим цикла  $L_1$  существует в области  $C_6$ , ограниченной линиями  $r_1$  и  $r_3$ , режим цикла  $L_2$  – в области  $C_7$ , заключенной между линиями  $r_2$  и  $r_4$ . В области параметров  $C_8$ , ограниченной частями линий  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_4$ , режимы циклов  $L_1$  и  $L_2$  существуют одновременно. Кроме режимов предельных циклов  $L_1$  и  $L_2$  в системе ЧФАП возможны разнообразные асинхронные режимы, определяемые сложными (многооборотными) вращательными, а также колебательно-вращательными предельными циклами модели (3), на которых процесс нарастания разности фаз  $\varphi$  прерывается колебательными стадиями с ограниченным изменением  $\varphi$ . Отметим, что благодаря пересечению кривых, соответствующих бифуркациям колебательных и вращательных предельных циклов, на плоскости  $(\mu_1, \gamma)$  выделяются области, отвечающие одновременному существованию различных типов квазисинхронных и асинхронных режимов системы ЧФАП.

Из расположения бифуркационных кривых на рис. 1 видно, что при небольших значениях параметра  $\mu_1$  и  $\gamma < 1$  в системе ЧФАП реализуется квазисинхронный режим предельного цикла  $S_1$ . Этот режим является (по результатам численного исследования модели (3)) единственным стационарным режимом управляемого генератора системы в области значений параметров  $D_1$ , ограниченной частями линий  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $r_2$ ,  $l_2$  и  $l_3$  и примыкающей к линии  $\mu_1 = 0$ . Опишем перестройки поведения

системы и усложнение модуляционных колебаний, происходящие при переходе из области  $D_1$  через границы  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и  $r_2$  с изменением  $\gamma$  и  $\mu_1$ .

При переходе с увеличением  $\gamma$  через бифуркационную границу  $l_1$  происходит исчезновение режима цикла  $S_1$  и одновременно с этим появляется перемежаемость – чередование длинной стадии колебательных движений с относительно короткими нерегулярными всплесками вращательных движений. Через перемежаемость в фазовом пространстве возникает хаотический аттрактор колебательно-вращательного типа  $W_0$ . На рис. 2 приведены примеры  $(\varphi, u)$ -проекций фазовых портретов и зависимостей  $u(\tau)$ , соответствующих аттрактору  $W_0$ , при различных значениях расстройки  $\gamma$ . Поведение фазовой траектории на аттракторе  $W_0$  представляет собой чередование движений в окрестности исчезнувшего седло-узлового колебательного предельного цикла и вращательных движений с нарастанием разности фаз  $\varphi$ . С удалением от границы  $l_1$  частота и длительность вращательных движений возрастают, а длительность стадии колебательных движений уменьшается.

При переходе с увеличением  $\mu_1$  через границу  $r_2$  режим предельного цикла  $S_1$  продолжает существовать, но еще появляется асинхронный режим предельного цикла  $L_2$ , в результате система демонстрирует бистабильное поведение. Пересечение с возрастанием  $\mu_1$  границы  $l_3$  сопровождается возникновением еще одного квазисинхронного режима предельного цикла  $S_2$  – система вновь демонстрирует бистабильное поведение, теперь обусловленное одновременным существованием в фазовом пространстве предельных циклов  $S_1$  и  $S_2$ . При переходе с увеличением  $\mu_1$  через границу  $l_2$  режим цикла  $S_1$  плавно сменяется режимом квазипериодических модуляционных колебаний, определяемых в фазовом пространстве двумерным притягивающим тором  $T_1$ .

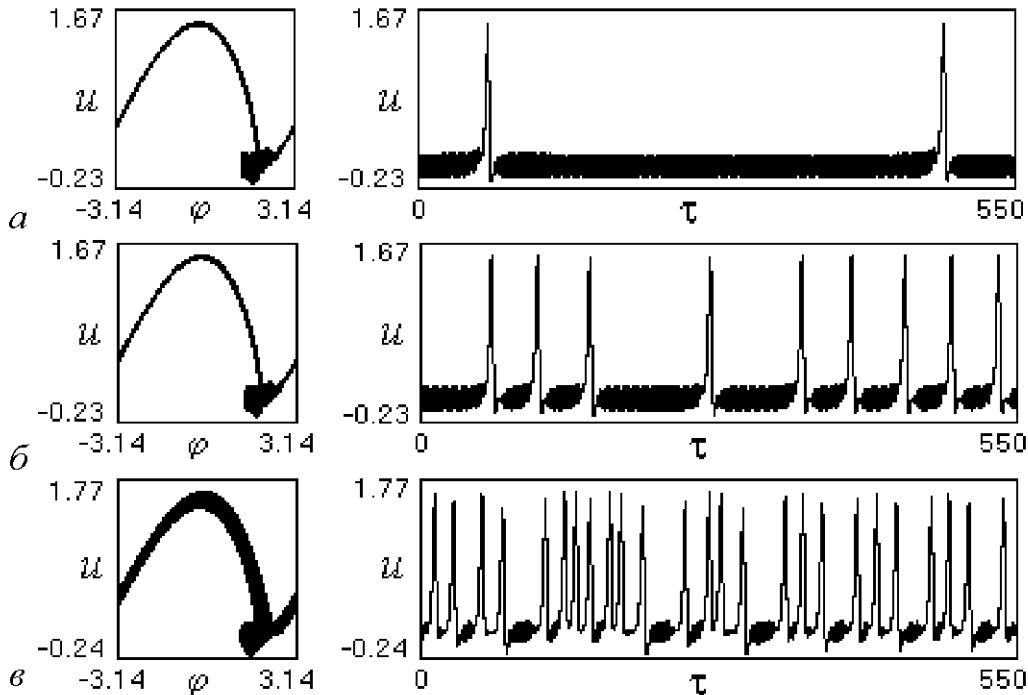


Рис. 2. Переход к режиму хаотического аттрактора колебательно-вращательного типа при изменении параметра  $\gamma$ : 0.9998 (а), 1.01 (б), 1.2 (в) ( $b = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 1.25$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\mu = 2$ ,  $\mu_1 = 0.6$ ,  $\mu_2 = 3.2$ )

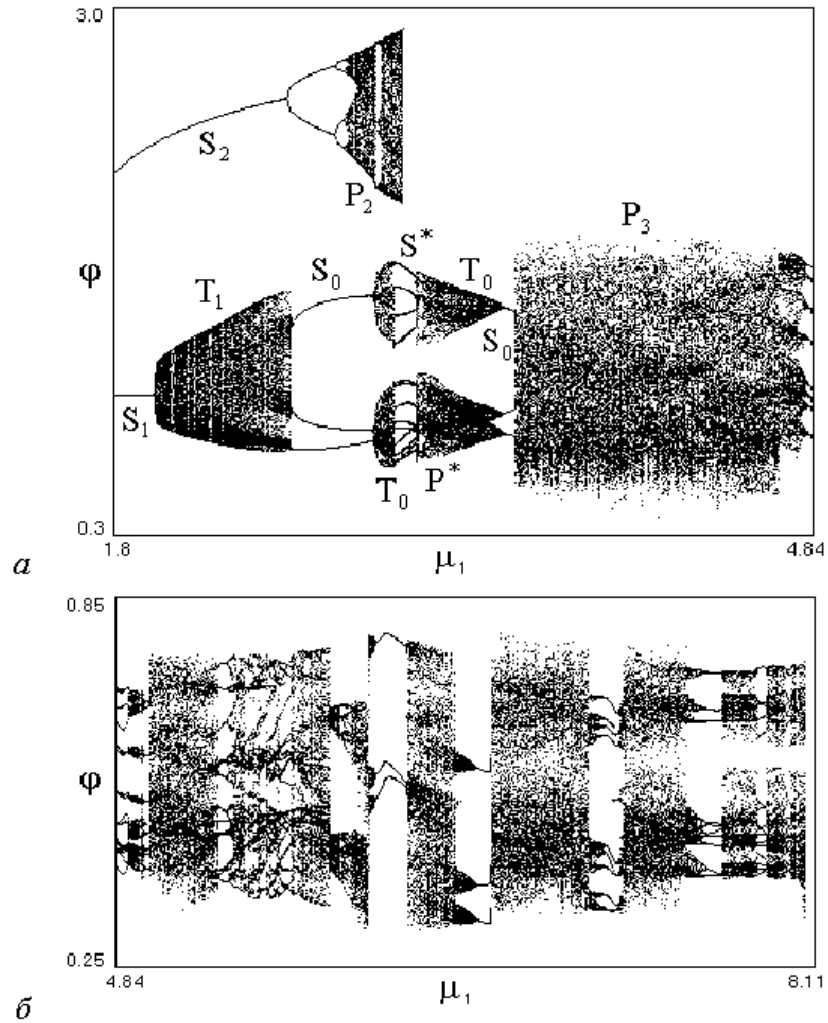


Рис. 3. Развитие квазисинхронных режимов предельных циклов  $S_1$  и  $S_2$  при изменении параметра  $\mu_1$  ( $\gamma = 0.55$ ,  $b = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 1.25$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\mu = 2$ ,  $\mu_2 = 3.2$ )

При удалении с возрастанием  $\mu_1$  от частей бифуркационной границы  $l_2$ , соответствующих значениям  $0 \leq \gamma < 0.24$  и  $\gamma > 0.37$  (см. рис. 1), в системе возникает режим колебательного хаотического аттрактора  $P_2$  в результате последовательности бифуркаций удвоения периода предельного цикла  $S_2$ . Этот режим существует в области  $C_0$ , заключенной между линиями  $l_4$  и  $l^0$ . Линия  $l^0$  соответствует (при пересечении ее с увеличением  $\mu_1$ ) прекращению квазисинхронного режима, который образовался на базе режима цикла  $S_2$ , и переходу системы либо к регулярному или хаотическому квазисинхронному режиму, сформировавшемуся на базе цикла  $S_1$ , либо к периодическому или хаотическому асинхронному режиму.

Проследивая за поведением предельных циклов  $S_1$  и  $S_2$  при изменении параметра  $\mu_1$ , устанавливаем, что при рассматриваемых значениях параметров область колебательных режимов, которые образуются на базе цикла  $S_2$ , значительно меньше области колебаний, развивающихся на базе цикла  $S_1$ . Рассмотрим динамику режимов циклов  $S_1$  и  $S_2$  при изменении величины параметра  $\mu_1$ , для чего обратимся к однопараметрической бифуркационной диаграмме  $\{\mu_1, \varphi\}$  (рис. 3), соответствующей величине расстройки  $\gamma = 0.55$ , где  $\mu_1$  изменяется от 1.8 до 8.11. На рис. 4 приведены

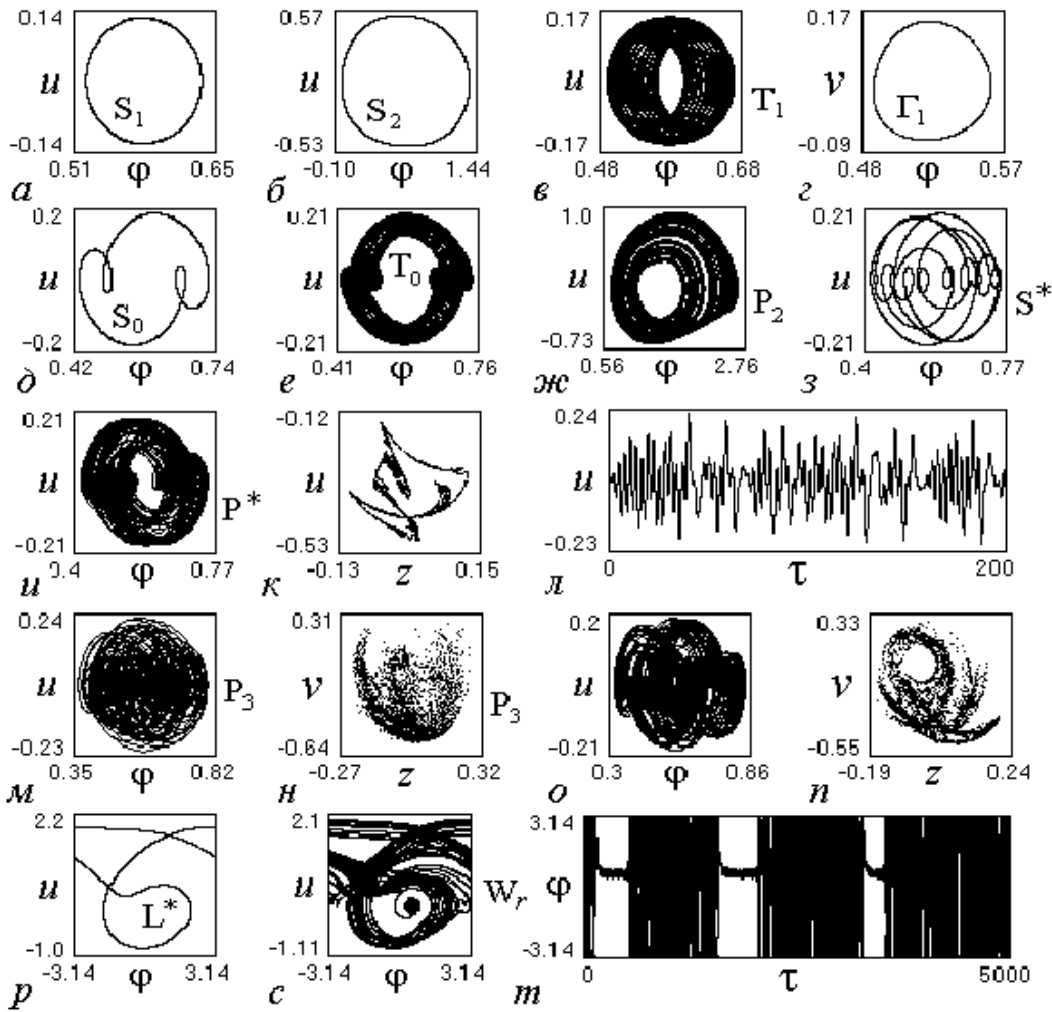


Рис. 4. Аттракторы несинхронных режимов при значениях  $\gamma = 0.55$ ,  $b = 1$ ,  $\epsilon_1 = 1.25$ ,  $\epsilon_2 = 15$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\mu = 2$ ,  $\mu_2 = 3.2$ ,  $\mu_1 = 1.8$  (а, б); 1.96 (в, г); 2.6 (д); 2.94 (е, ж); 3.04 (з); 3.17 (и, к); 3.65 (л-н); 6.32 (о, п); 8.26 (р); 8.39 (с, т)

$(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов,  $(z, u)$ -проекции сечения Пуанкаре и зависимости  $u(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$ , соответствующие аттракторам модели (3) при различных значениях параметра  $\mu_1$ .

В соответствии с диаграммой  $\{\mu_1, \varphi\}$  в системе ЧФАП при увеличении  $\mu_1$  наблюдаются следующие явления, связанные с квазисинхронными режимами: возникновение режима двумерного колебательного тора  $T_1$  (рис. 4, в) из колебательного предельного цикла  $S_1$  (рис. 4, а) – тору  $T_1$  соответствует замкнутая инвариантная кривая сечения Пуанкаре  $\Gamma_1$  (рис. 4, г); жесткий переход от режима тора  $T_1$  к режиму колебательного предельного цикла  $S_0$  (рис. 4, д); формирование режима колебательного тора  $T_0$  (рис. 4, е) из цикла  $S_0$ ; развитие режима хаотического аттрактора  $P_2$  (рис. 4, ж) на базе цикла  $S_2$  (рис. 4, б); жесткие переходы от режима тора  $T_0$  и от режима аттрактора  $P_2$  к режиму колебательного предельного цикла  $S^*$  (рис. 4, з), а затем от режима цикла  $S^*$  к режиму колебательного хаотического аттрактора  $P^*$  (рис. 4, и, к); преобразование режима аттрактора  $P^*$  в режим тора  $T_0$ , а затем – режима тора  $T_0$  в режим цикла  $S_0$ ; жесткий переход от режима цикла  $S_0$  к режиму



колебательного хаотического аттрактора  $P_3$  (рис. 4, л-н); чередование хаотических режимов (рис. 4, о, н) и режимов колебательных предельных циклов различной сложности. По мере дальнейшего увеличения  $\mu_1$  наблюдается эффект перехода системы от хаотического квазисинхронного режима к асинхронному режиму двухоборотного ( $4\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) вращательного предельного цикла  $L^*$  (рис. 4, р), на базе которого вначале возникает режим вращательного хаотического аттрактора через бифуркации удвоения периода цикла  $L^*$ , а затем режим колебательно-вращательного хаотического аттрактора  $W_r$  (рис. 4, с, т). Режим аттрактора  $W_r$  поддерживается в системе при продолжении увеличения  $\mu_1$ , прерываясь режимами вращательных и колебательных предельных циклов.

Рассмотрим динамику квазисинхронного режима предельного цикла  $S_1$  (см. рис. 4, а) при изменении начальной расстройки  $\gamma$ . На рис. 5 представлены бифуркационная диаграмма  $\{\gamma, \varphi\}$ , соответствующая  $\mu_1 = 6.25$  (рис. 5, а), а также  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов,  $(z, u)$ -проекция сечения Пуанкаре и зависимости  $\varphi(\tau)$  и  $u(\tau)$ , соответствующие аттракторам модели (3), для серии значений  $\gamma$  (рис. 5, б-и). Для рассматриваемого процесса также характерно чередование режимов управляемого генератора с периодической, квазипериодической и хаотической модуляцией

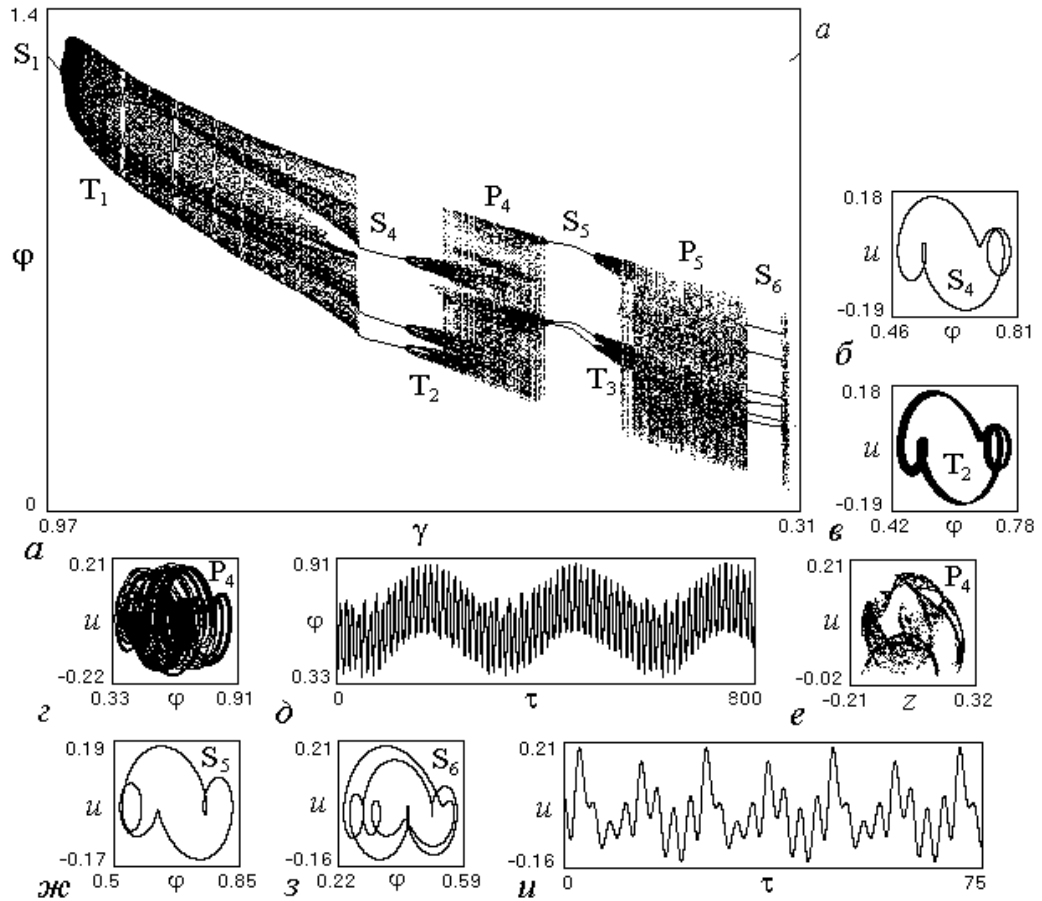


Рис. 5. Диаграмма развития квазисинхронного режима предельного цикла  $S_1$  (а) и аттракторы режимов (б-и) при изменении начальной расстройки  $\gamma$ :  $\gamma = 0.69$  (а, б);  $0.653$  (в);  $0.58$  (г-е);  $0.53$  (ж);  $0.354$  (з, и) ( $b = 1, \varepsilon_1 = 1.25, \varepsilon_2 = 15, \beta = 20.5, \mu = 2, \mu_1 = 6.25, \mu_2 = 3.2$ )

частоты. При этом режимам с периодической модуляцией соответствуют колебательные предельные циклы  $S_1$  (см. рис. 4, *а*),  $S_4$  (см. рис. 5, *б*),  $S_5$  (см. рис. 5, *жс*) и  $S_6$  (см. рис. 5, *з, и*). Режимы с квазипериодической модуляцией определяются колебательными торами  $T_1$  (см. рис. 4, *в, з*),  $T_2$  (см. рис. 5, *в*) и  $T_3$ , которые возникают из предельных циклов  $S_1$ ,  $S_4$  и  $S_5$ , соответственно. Хаотические модуляционные режимы  $P_4$  (см. рис. 5, *г-е*) и  $P_5$  образуются в результате разрушения торов  $T_2$  и  $T_3$ . Развитие квазисинхронных режимов завершается жестким переходом при  $\gamma < 0.327$  к асинхронному режиму вращательного хаотического аттрактора в результате седлоузловой бифуркации цикла  $S_6$ .

Совокупность результатов, полученных с использованием бифуркационной диаграммы  $\{\mu_1, \gamma\}$  (см. рис. 1) и приведенных на рис. 2–5, свидетельствует о большом разнообразии квазисинхронных режимов системы ЧФАП, соответствующих выделенным областям на плоскости параметров  $\mu_1, \gamma$ , об эффектах перехода между квазисинхронными и асинхронными режимами при изменении параметров  $\mu_1$  и  $\gamma$ , а также позволяет понять, как развитие неустойчивости периодических квазисинхронных режимов приводит в итоге к установлению в системе режима хаотического аттрактора вращательного типа.

**5.** Обсудим нелинейные эффекты, выявленные в системе ЧФАП в процессе численного исследования модели (3) при других значениях параметров.

**5.1.** Рассмотрим случай, когда  $\gamma = 0.01$ ,  $b = 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 35$ ,  $\mu = 2.5$ ,  $\mu_2 = 13.5$ , и проведем анализ поведения системы при изменении параметра  $\mu_1$ , используя приведенные на рис. 6  $(\varphi, u)$ -проекция фазового портрета,  $(\varphi, v)$ -проекция отображения Пуанкаре и зависимости  $u(\tau)$  и  $v(n)$  ( $n$  – номер точки пересечения фазовой траектории аттрактора с секущей Пуанкаре), соответствующие аттракторам модели (3). В качестве начального состояния системы при  $\mu_1 = 1.34$  выбран квазисинхронный режим колебательного двумерного тора  $T_4$  (рис. 6, *а*), которому соответствует инвариантная замкнутая кривая  $\Gamma_2$  (рис. 6, *б*). При увеличении  $\mu_1$  на базе тора  $T_4$  вначале возникает трехмерный тор  $T^3$  (рис. 6, *в*), о чем наглядно свидетельствуют вид  $(\varphi, v)$ -проекции отображения Пуанкаре и зависимости  $v(n)$  (рис. 6, *з*), а затем происходит переход к хаотическому квазисинхронному режиму  $P_1$  (рис. 6, *д*).

**5.2.** Особый интерес представляют асинхронные режимы хаотических аттракторов вращательного и колебательно-вращательного типа, реализуемых в фазовом пространстве модели (3). Как показано в [4], автомодуляционные колебания, соответствующие таким аттракторам, являются наиболее предпочтительными для использования системы с фазовым управлением в качестве генератора хаотических колебаний. Рассмотрим возможные асинхронные режимы системы ЧФАП в случае, когда значения  $\gamma = 0.5$ ,  $b = 0.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.9$ ,  $\varepsilon_2 = 80$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_2 = 2.0$ , а  $\mu_1$  – варьируемый параметр. На рис. 7, *а* приведена соответствующая этому случаю бифуркационная диаграмма  $\{\mu_1, u\}$ , которая отражает эволюцию асинхронного режима вращательного предельного цикла  $L_3$ ,  $(\varphi, u)$ -проекция фазового портрета которого изображена на рис. 7, *б*. Проанализируем изменения, происходящие в поведении системы при увеличении параметра  $\mu_1$ , привлекая  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов,  $(z, u)$ -проекции сечения Пуанкаре и зависимости  $u(\tau)$ , соответствующие аттракторам, существующим в фазовом пространстве модели (3) при различных значениях  $\mu_1$ .

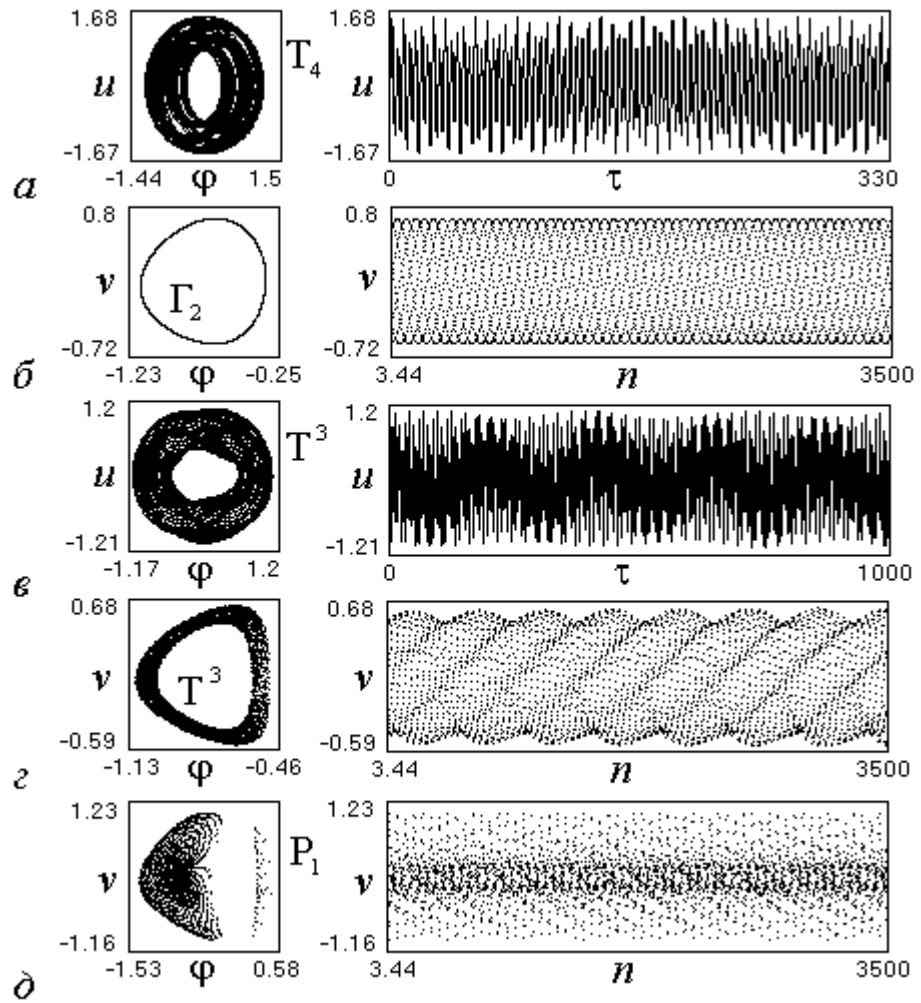


Рис. 6. Сложные квазисинхронные режимы системы ЧФАП, наблюдаемые при изменении параметра  $\mu_1$ : 1.34 (а, б); 1.5338 (в, г); 1.537 (д) ( $\gamma = 0.01, b = 5, \varepsilon_1 = 1.0, \varepsilon_2 = 35, \beta = 1.0, \mu = 2.5, \mu_2 = 13.5$ )

Из  $\{\mu_1, u\}$ -диаграммы видно, что вначале возникает хаотический аттрактор  $W_1$  (рис. 7, в, г) через бифуркации удвоения периода цикла  $L_3$ . Максимальный ляпуновский характеристический показатель аттрактора, изображенного на рис. 7, в, г, имеет значение 0.146. Затем от режима аттрактора  $W_1$  система переходит через перемежаемость «хаос – цикл» (рис. 7, д, е) к периодическому режиму вращательного предельного цикла  $L_4$  (рис. 7, ж). Дальнейшее увеличение  $\mu_1$  приводит к преобразованию режима цикла  $L_4$  в режим хаотического аттрактора  $W_2$  (рис. 7, з–к) через бифуркации удвоения периода. Режим аттрактора  $W_2$  наблюдается в достаточно широком интервале изменения параметра  $\mu_1$ . Представление об изменении характера аттрактора  $W_2$  при возрастании  $\mu_1$  дают сечения Пуанкаре (рис. 7, к–м). Численные расчеты показывают, что максимальный ляпуновский характеристический показатель аттрактора  $W_2$  принимает значения от 0.11 до 0.138 в том интервале изменения  $\mu_1$ , которому соответствуют рис. 7, к–м.

На рис. 8, а представлена бифуркационная диаграмма  $\{\mu_1, u\}$ , отражающая образование в фазовом пространстве модели (3) колебательно-вращательного хаоти-

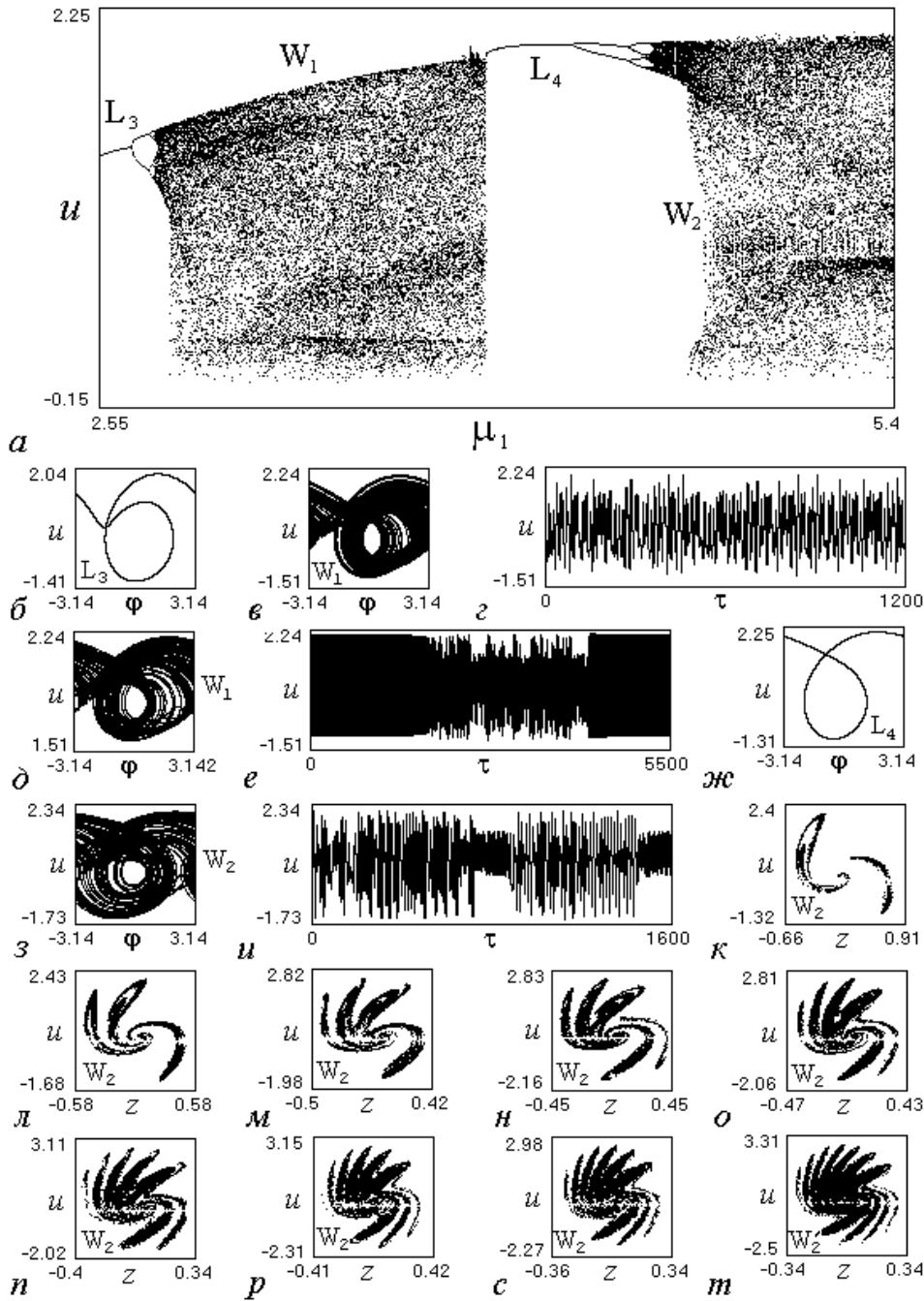


Рис. 7. Диаграмма развития асинхронных режимов системы ЧФАП при изменении параметра  $\mu_1$  (а) и аттракторы режимов (б-т):  $\mu_1 = 2.55$  (б); 3.45 (в, г); 3.9275 (д, е); 3.93 (жс); 5.2 (з-к); 10 (л); 16 (м); 19 (н); 25 (о); 34 (п); 39 (р); 50 (с); 60 (т) ( $\gamma = 0.5, b = 0.5, \varepsilon_1 = 0.9, \varepsilon_2 = 80, \beta = 1.0, \mu = 2.0, \mu_2 = 2.0$ )

ческого аттрактора на базе вращательного предельного цикла в случае, когда значения параметров  $\gamma = 0.5, b = -0.5, \beta = 1, \varepsilon_1 = 0.9, \varepsilon_2 = 80, \mu = 2.0, \mu_2 = 2.0$ , то есть при инверсном включении дискриминатора в цепи частотного управления. На рис. 8, б-г изображены  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов и зависимости  $u(\tau)$ , соответствующие режиму исходного предельного цикла  $L_5$  и режиму хаотического

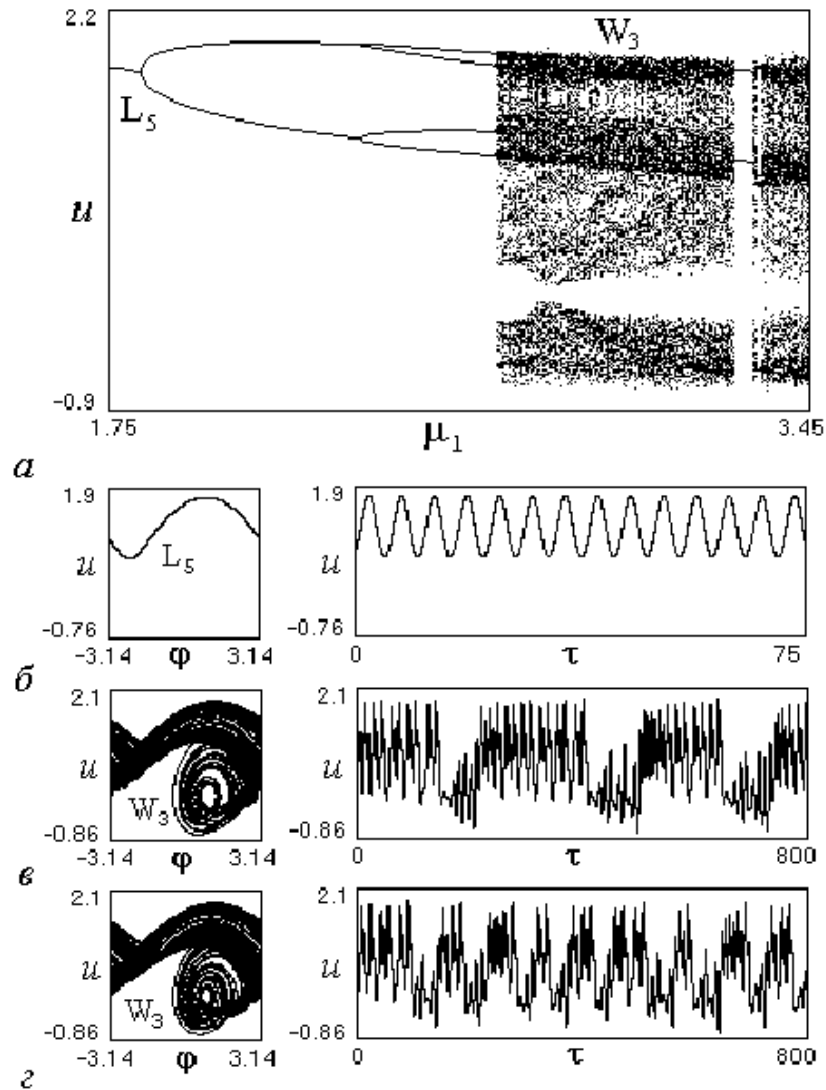


Рис. 8. Возникновение режима колебательно-вращательного хаотического аттрактора на базе периодического асинхронного режима в случае, когда  $\gamma = 0.5$ ,  $b = -0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 0.9$ ,  $\varepsilon_2 = 80$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_2 = 2.0$  ( $\mu_1 = 1.8$  (б); 2.7 (в); 2.95 (г))

аттрактора  $W_3$ . Механизм перехода к аттрактору  $W_3$  выглядит следующим образом. При увеличении параметра  $\mu_1$  реализуются две бифуркации удвоения периода цикла  $L_5$ , после которых наблюдается слабое зашумление колебаний. Затем возникает перемежаемость – чередование длинной стадии вращательных движений с редкими стадиями нерегулярных колебательных движений относительно состояния равновесия  $A_1$ . С ростом  $\mu_1$  длительность стадий вращательных движений в структуре аттрактора  $W_3$  уменьшается, и они все чаще прерываются стадиями колебательных движений (рис. 8, в, г). В интервале  $2.7 < \mu_1 < 3.6$  максимальный ляпуновский характеристический показатель аттрактора  $W_3$  изменяется от 0.05 до 0.144 при увеличении  $\mu_1$ , что свидетельствует о возрастании скорости разбегания близких фазовых траекторий.

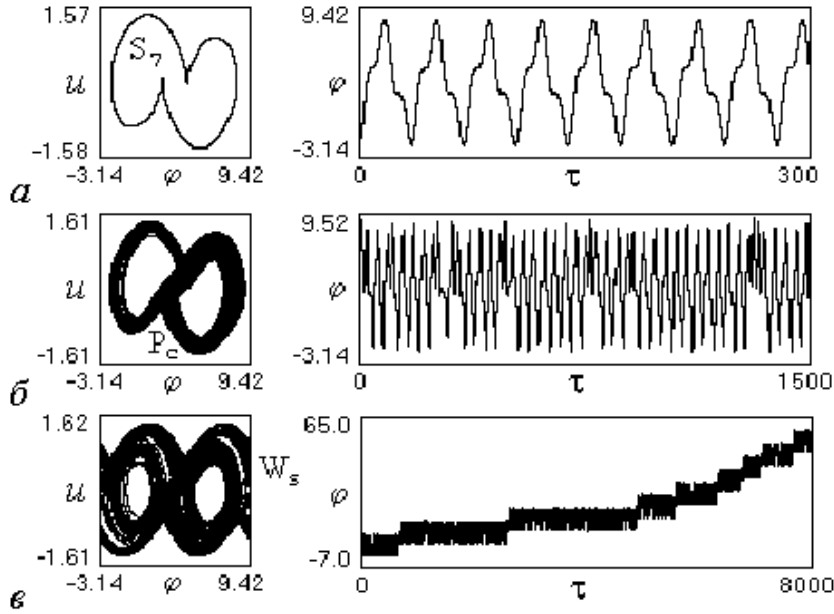


Рис. 9. Развитие режима колебательно-вращательного хаотического аттрактора на базе периодического квазисинхронного режима с проворотом  $\varphi$  в случае, когда  $\gamma = 0.02$ ,  $b = 1.0$ ,  $\varepsilon_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_2 = 3.2$  ( $\mu_1 = 5.71$  (а); 5.89 (б); 5.95 (в))

Рис. 9, на котором изображены  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов и зависимости  $\varphi(\tau)$ , соответствующие значениям  $\gamma = 0.02$ ,  $b = 1.0$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\varepsilon_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_2 = 3.2$ , иллюстрирует образование при изменении параметра  $\mu_1$  колебательно-вращательного хаотического аттрактора иного типа. Особенность этого аттрактора состоит в том, что колебательные стадии на нем представляют собой движения по траекториям хаотического аттрактора колебательного типа с ограниченным диапазоном изменения разности фаз  $\varphi$ , превышающим  $2\pi$  (аттрактора с проворотом фазы). Такой колебательно-вращательный хаотический аттрактор возникает на базе колебательного предельного цикла  $S_7$ , охватывающего три состояния равновесия  $A_1(\arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $A_2(\pi - \arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$  и  $A'_1(3\pi - \arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$  (рис. 9, а). При увеличении  $\mu_1$  цикл  $S_7$  исчезает в результате седло-узловой бифуркации, и через перемежаемость возникает хаотический аттрактор  $P_c$  (рис. 9, б). Колебания на аттракторе  $P_c$  представляют собой нерегулярное чередование движений по траекториям, охватывающим  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A'_1$ , и движений вокруг состояния равновесия  $A'_1$ . Затем в результате гомоклинической бифуркации хаотический аттрактор  $P_c$  превращается в хаотический колебательно-вращательный аттрактор  $W_s$  (рис. 9, в) с максимальным ляпуновским характеристическим показателем, равным 0.098. В режиме аттрактора  $W_s$  стадии колебаний, соответствующие аттрактору  $P_c$ , прерываются вращательными движениями с постоянным нарастанием разности фаз  $\varphi$ .

**5.3.** При численном исследовании модели (3) выяснено, что переходы к хаотическим квазисинхронным и асинхронным режимам реализуются также в результате разрушения двумерных торов в фазовом пространстве и через бифуркации удвоения торов. Первый из этих случаев иллюстрируют рис.10 и 11, на которых приведены  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов,  $(z, v)$ -проекции сечения Пуанкаре и фрагмент временной реализации  $\varphi(\tau)$ , соответствующие колебательным (рис. 10) и вращательным (рис. 11) аттракторам модели (3). Рис. 10 соответствует значениям  $\gamma = 0$ ,

$b = 1.0$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_1 = 3.7$ ,  $\mu_2 = 3.2$ , параметр  $\varepsilon_1$  изменяется от 1.2 до 0.72. Стартовым состоянием системы при  $\varepsilon_1 = 1.2$  является квазисинхронный режим колебательного предельного цикла  $S^0$  (рис. 10, *a*). Видно, что с уменьшением  $\varepsilon_1$  цикл  $S^0$  теряет устойчивость и в фазовом пространстве рождается притягивающий двумерный тор  $T^0$  (рис. 10, *б*), которому в сечении Пуанкаре соответствует замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma^0$  (рис. 10, *в*). Далее, начиная со значения  $\varepsilon_1 = 0.85$ , наблюдается искажение формы кривой  $\Gamma^0$  (рис. 10, *г*), что свидетельствует о постепенном вырождении тора  $T^0$  в колебательный хаотический аттрактор типа тор – хаос (рис. 10, *д–к*).

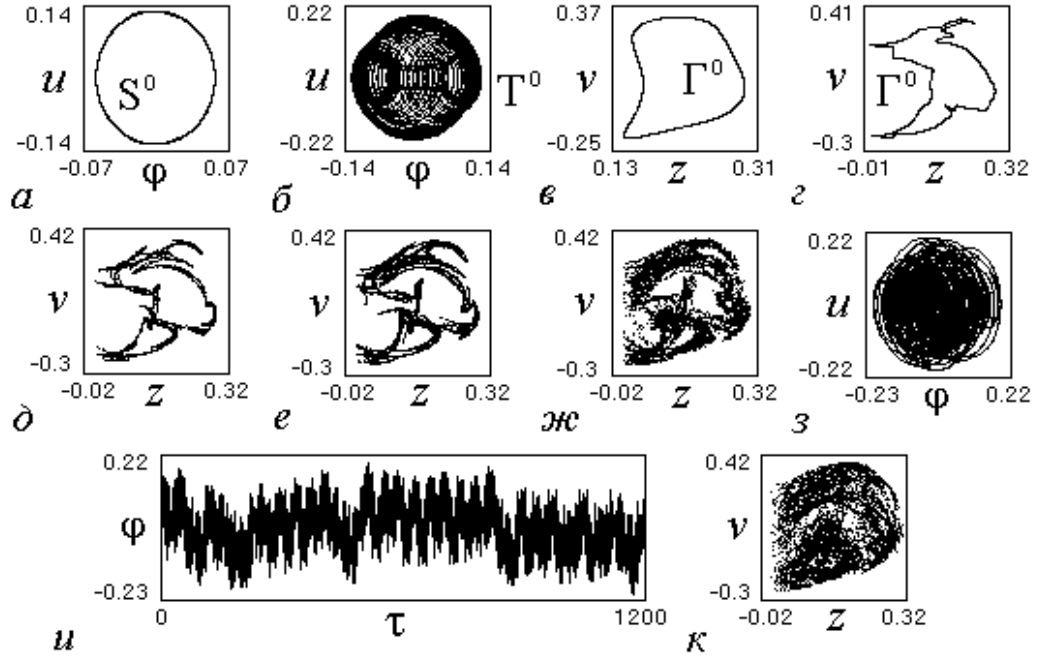


Рис. 10. Эволюция периодического квазисинхронного режима при изменении параметра  $\varepsilon_1$ : 1.2 (*a*); 1.01 (*б, в*); 0.835 (*г*); 0.81 (*д*); 0.78 (*е*); 0.76 (*ж*); 0.72 (*з–к*) ( $\gamma = 0$ ,  $b = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_1 = 3.7$ ,  $\mu_2 = 3.2$ )

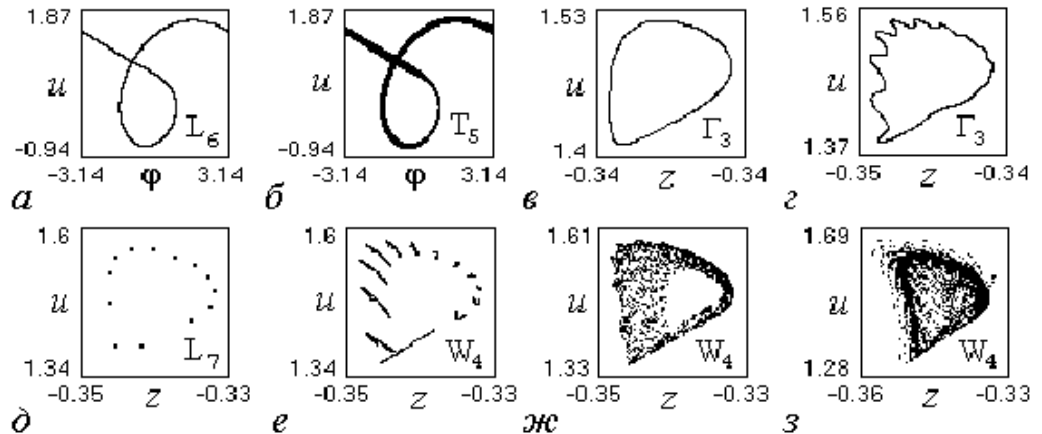


Рис. 11. Эволюция периодического асинхронного режима при изменении параметра  $\mu_1$ : 4.77 (*a*); 4.788 (*б, в*); 4.792 (*г*); 4.794 (*д*); 4.796 (*е*); 4.797 (*ж*); 4.804 (*з*) ( $\gamma = 0.01$ ,  $b = -1.0$ ,  $\varepsilon_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 35$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\mu = 2.5$ ,  $\mu_2 = 11$ )

Рис. 11 соответствует значениям  $\gamma = 0.01$ ,  $b = -1.0$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\varepsilon_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 35$ ,  $\mu = 2.5$ ,  $\mu_2 = 11$ , то есть случаю инверсного включения дискриминатора в цепи частотного управления, параметр  $\mu_1$  изменяется от 4.77 до 4.804. Исходным состоянием системы при  $\mu_1 = 4.77$  является режим вращательного предельного цикла  $L_6$  (рис. 11, *a*). При увеличении  $\mu_1$  вначале в фазовом пространстве из цикла  $L_6$  рождается притягивающий вращательный тор  $T_5$  (рис. 11, *б*), которому в сечении Пуанкаре отвечает инвариантная замкнутая кривая  $\Gamma_3$  (рис. 11, *в*). Далее наблюдается искривление кривой  $\Gamma_3$  (рис. 11, *з*), а затем на торе образуется тринадцатиоборотный (26 $\pi$ -периодический по  $\varphi$ ) вращательный предельный цикл  $L_7$  (рис. 11, *д*). С увеличением  $\mu_1$  этот цикл теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода, которая приводит к разрушению тора  $T_5$  [18]. В результате последовательности бифуркаций удвоения периода образуется вращательный хаотический аттрактор  $W_4$  (рис. 11, *д-з*).

Рис. 12 и 13 иллюстрируют переходы к хаотическим квазисинхронному и асинхронному режимам системы ЧФАП, которые осуществляются через бифуркации удвоения колебательных и вращательных двумерных торов, соответственно. На этих рисунках изображены  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов,  $(u, v)$ - и  $(\varphi, v)$ -проекции сечения Пуанкаре и фрагменты временных реализаций  $u(\tau)$ , соответствующие аттракторам модели (3) колебательного (рис. 12) и вращательного (рис. 13) типа. Рис. 12 соответствует значениям  $\gamma = 0$ ,  $b = 1.0$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\varepsilon_2 = 15.2$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_1 = 3.7$ ,  $\mu_2 = 3.2$ , варьируемым параметром является  $\varepsilon_1$ ; рис. 13 отвечает значениям  $b = 15$ ,  $\beta = 20$ ,  $\varepsilon_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_1 = 355$ ,  $\mu_2 = 2.0$ , варьируемым параметром является  $\gamma$ . В качестве исходных состояний системы выбраны режим колебательного тора  $T^*$  (рис. 12, *a*) и режим вращательного тора  $T_r$  (рис. 13, *a, б*). Рис. 12, *б-г* (рис. 13, *в-д*) показывают эволюцию замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma^*$  (инвариантной замкнутой кривой  $\Gamma_r$ , 2 $\pi$ -периодической по  $\varphi$ ), соответствующей

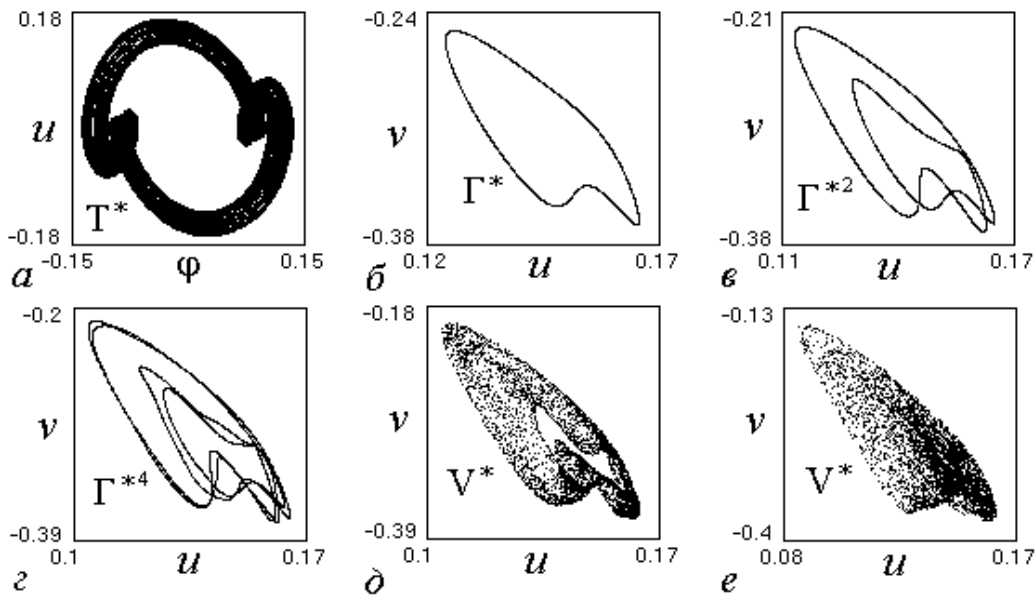


Рис. 12. Переход к хаотическому квазисинхронному режиму через бифуркации удвоения двумерного тора при изменении параметра  $\varepsilon_1$ : 1.44 (*a, б*); 1.4 (*в*); 1.39 (*г*); 1.38 (*д*); 1.3 (*е*) ( $\gamma = 0$ ,  $b = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 15.2$ ,  $\beta = 20.5$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_1 = 3.7$ ,  $\mu_2 = 3.2$ )



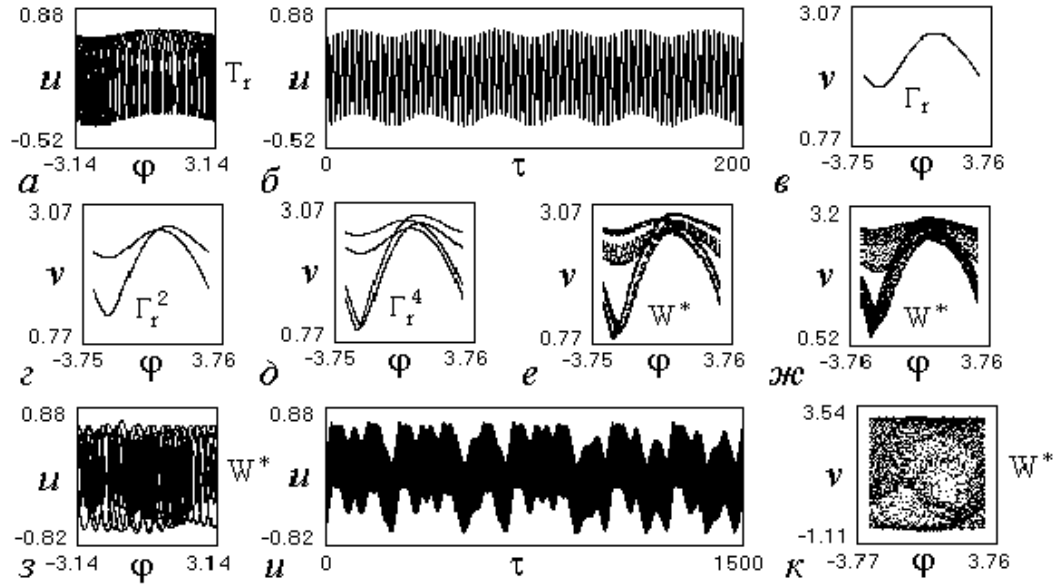


Рис. 13. Переход к хаотическому асинхронному режиму через бифуркации удвоения двумерного тора при изменении параметра  $\gamma$ : 0.43 (а-б); 0.4 (з); 0.37 (д); 0.36 (е); 0.35 (ж); 0.3 (з-к) ( $b = 15$ ,  $\varepsilon_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 15$ ,  $\beta = 20$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_1 = 355$ ,  $\mu_2 = 2.0$ )

тору  $T^*$  (тору  $T_r$ ), при изменении параметра  $\varepsilon_1$  (параметра  $\gamma$ ). Уменьшение  $\varepsilon_1$  (уменьшение  $\gamma$ ) приводит к бифуркациям удвоения периода кривой  $\Gamma^*$  (кривой  $\Gamma_r$ ), адекватным бифуркациям удвоения тора  $T^*$  (тора  $T_r$ ), которые завершаются образованием в фазовом пространстве хаотического аттрактора  $V^*$  (рис. 12, д, е) (хаотического аттрактора  $W^*$  (рис. 13, е-к)).

**5.4.** При исследовании модели (3) был выяснен интересный эффект образования режимов хаотических аттракторов колебательного и вращательного типа с переключениями движений между двумя бассейнами притяжения в фазовом пространстве. Рис. 14, на котором приведены бифуркационная диаграмма  $\{\mu_1, \varphi\}$ , соответствующая значениям параметров  $\gamma = 0.15$ ,  $b = 5.0$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\varepsilon_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 35$ ,  $\mu = 2.5$ ,  $\mu_2 = 13.5$  (а),  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов,  $(\varphi, v)$ -проекции сечения Пуанкаре и фрагменты зависимостей  $\varphi(\tau)$ , соответствующие колебательным аттракторам модели (3) при различных значениях варьируемого параметра  $\mu_1$  (рис. 14, б-и), характеризует процесс перехода от режима колебательного предельного цикла  $S_1^*$  (см. рис. 14, б) к режиму колебательного хаотического аттрактора  $V_0$  с переключениями движений. Видно, что при увеличении  $\mu_1$  вначале реализуются бифуркации удвоения периода цикла  $S_1^*$ , в результате которых возникает режим колебательного хаотического аттрактора  $P_1^*$  (см. рис. 14, в). В интервале значений  $\mu_1$ , соответствующих существованию аттрактора  $P_1^*$ , область хаотического разброса значений  $\varphi$  на диаграмме  $\{\mu_1, \varphi\}$  сосредоточена в одной полосе. Затем наблюдается явление перемежаемости «хаос-хаос», через которую система переходит к режиму колебательно хаотического аттрактора  $V_0$  (см. рис. 14, з-е). После возникновения аттрактора  $V_0$  на диаграмме  $\{\mu_1, \varphi\}$  и на  $(\varphi, v)$ -проекции сечения Пуанкаре (см. рис. 14, е) наблюдаются две области сосредоточения разброса значений  $\varphi$  и  $v$  с нерегулярными переходами между этими областями.

Отметим, что диапазон изменения переменной  $\varphi$  на аттракторе  $V_0$  превосходит  $2\pi$ . Примечательно, что по мере увеличения параметра  $\mu_1$  в сравнительно небольшом интервале значений  $\mu_1$  спектр ляпуновских характеристических показателей

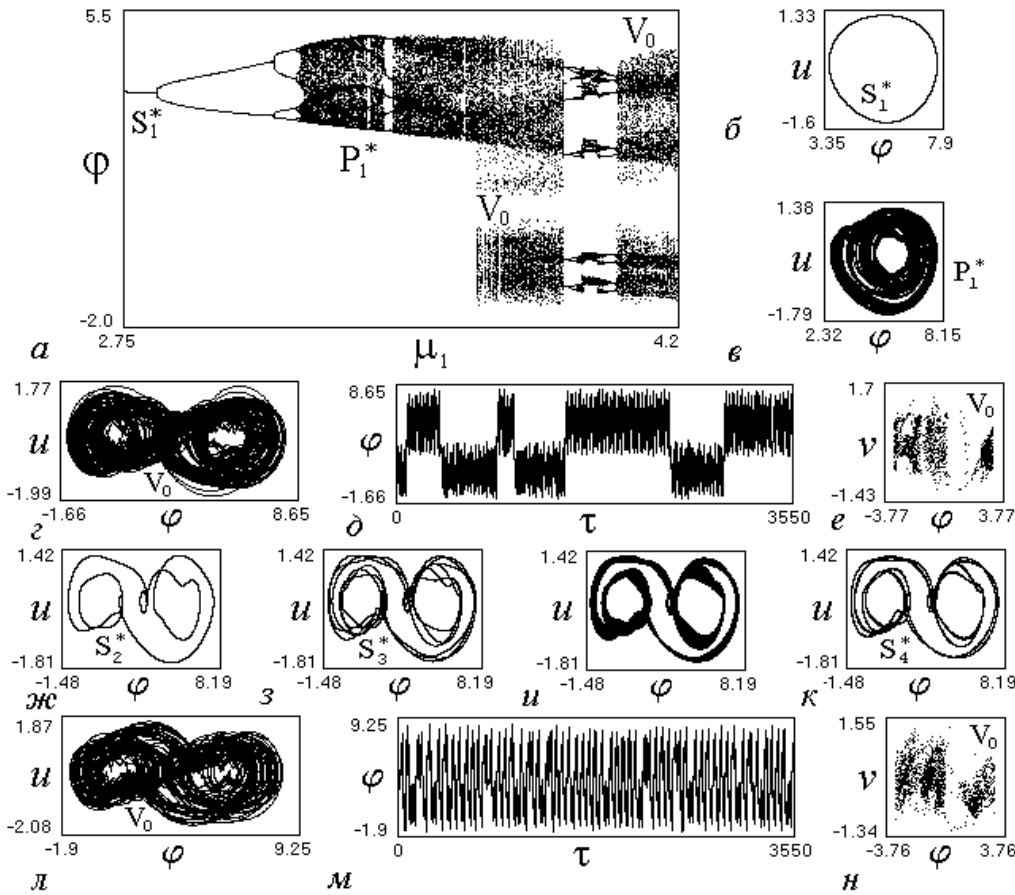


Рис. 14. Бифуркационная диаграмма  $\mu_1, \varphi$  (а) и аттракторы режимов (б-н), иллюстрирующие переход к хаотическому квазисинхронному режиму с переключениями колебаний при значениях  $\gamma = 0.15, b = 5, \varepsilon_1 = 1.0, \varepsilon_2 = 35, \beta = 1.0, \mu = 2.5, \mu_2 = 13.5, \mu_1 = 2.75$  (б); 3.4 (в); 3.68 (з-е); 3.9 (ж); 3.97 (з); 3.99 (и); 4.02 (к); 4.79 (л-н)

аттрактора  $V_0$  содержит два положительных показателя, то есть аттрактор  $V_0$  становится гиперхаотическим [19]. Следующий эффект, наблюдаемый при увеличении  $\mu_1$ , состоит в появлении на диаграмме  $\{\mu_1, \varphi\}$  «окна», в котором реализуются сложные периодические модуляционные режимы с переключениями, соответствующие колебательным предельным циклам  $S_2^*, S_3^*$  и  $S_4^*$  (рис. 14, ж, з, к). В этом окне происходят переходы к колебательному хаотическому режиму с переключениями (рис. 14, и) по сценарию удвоения предельных циклов и через перемежаемость. Вне окна при дальнейшем увеличении  $\mu_1$  имеет место увеличение частоты переключений движений на аттракторе  $V_0$  и уменьшение длительности стадий колебаний между переключениями (рис. 14, л-н), затем аттрактор  $V_0$  преобразуется в колебательно-вращательный аттрактор, похожий на хаотический аттрактор  $W_s$  (см. рис. 9, в).

Рис. 15 и 16 иллюстрируют процесс перехода от режимов вращательных предельных циклов к режиму вращательного хаотического аттрактора с переключениями колебаний. На этих рисунках изображены бифуркационные диаграммы  $\{\mu_2, u\}$  (рис. 15, а, 16, а),  $(\varphi, u)$ - и  $(z, u)$ -проекции фазовых портретов,  $(z, u)$ -проекции сечения Пуанкаре и фрагменты зависимостей  $u(\tau)$ , соответствующие вращательным аттракторам, существующим в фазовом пространстве модели (3) при различных значениях варьируемого параметра  $\mu_2$  (рис. 15, б-к, 16, б-с). Диаграммы  $\{\mu_2, u\}$  постро-

ены для случаев, когда значения параметров  $\gamma = 0.05$ ,  $b = -1.5$ ,  $\beta = 5.75$ ,  $\varepsilon_1 = 10$ ,  $\varepsilon_2 = 1.9$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_1 = 1.5$  (см. рис. 15, *a*) и когда  $\gamma = 0.05$ ,  $b = -1.55$ ,  $\beta = 5.0$ ,  $\varepsilon_1 = 1.8$ ,  $\varepsilon_2 = 2.05$ ,  $\mu = 2.33$ ,  $\mu_1 = 3.1$  (см. рис. 16, *a*). Оба случая соответствуют инверсному включению дискриминатора рассогласований в цепи частотного управления системы ЧФАП. В качестве исходного состояния системы выбран асинхронный режим вращательных предельных циклов  $L_1^*$  (см. рис. 15, *б*) в первом случае и  $L_2^*$  (см. рис. 16, *б*) во втором случае. Диаграммы на рис. 15, *a* и 16, *a* отображают влияние изменения параметра  $\mu_2$  на поведение системы.

В первом случае (рис. 15, *a*) при увеличении  $\mu_2$  вначале происходит формирование в фазовом пространстве вращательного хаотического аттрактора  $W_1^*$  (см. рис. 15, *в*) по сценарию удвоения периода колебаний на цикле  $L_1^*$ . Затем че-

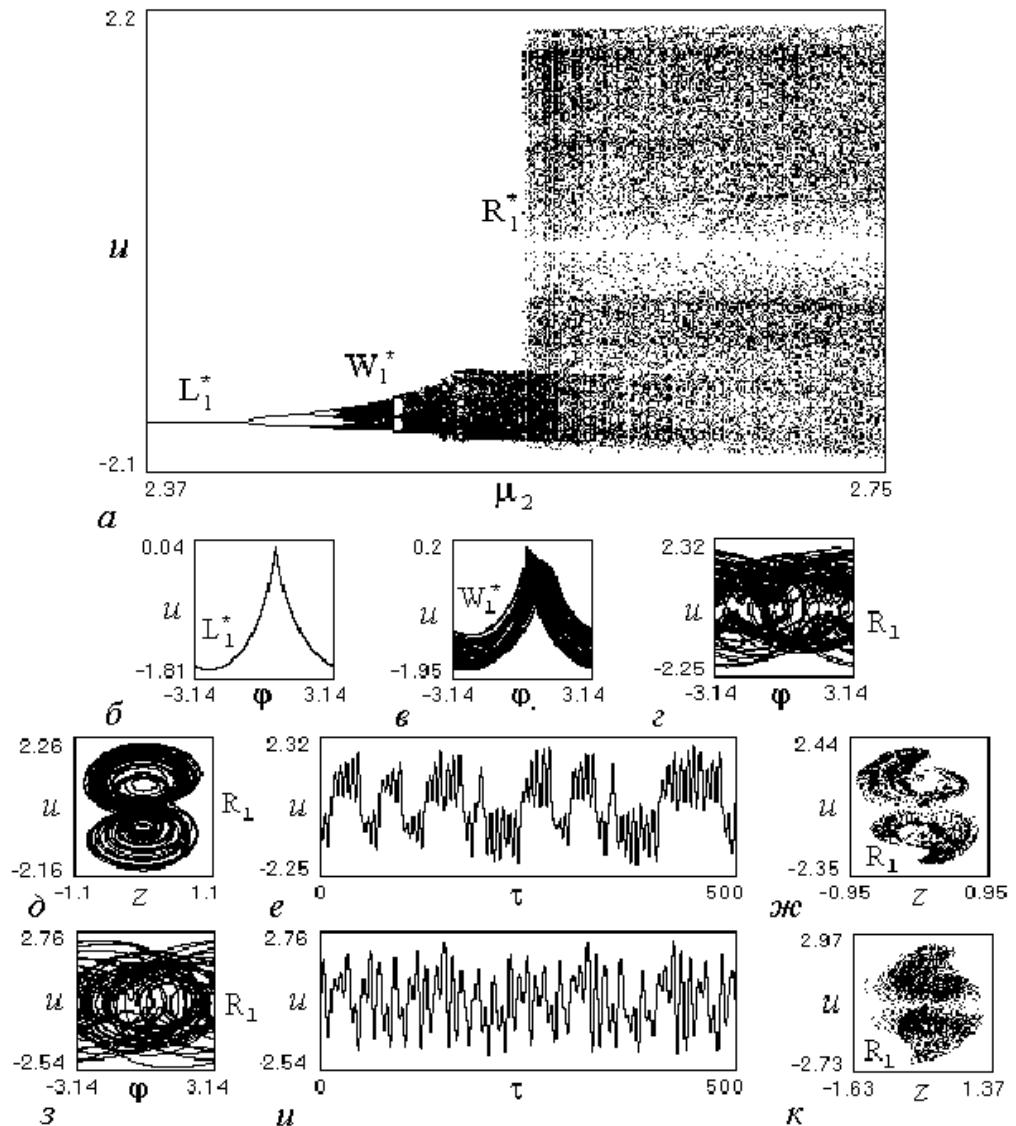


Рис. 15. Бифуркационная диаграмма  $\mu_2, u$  (*a*) и аттракторы режимов (*б-к*), иллюстрирующие переход к хаотическому асинхронному режиму с переключениями колебаний при значениях  $\gamma = 0.05$ ,  $b = -1.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10$ ,  $\varepsilon_2 = 1.9$ ,  $\beta = 5.75$ ,  $\mu = 2.0$ ,  $\mu_1 = 1.5$ ,  $\mu_2 = 2.37$  (*б*); 2.55 (*в*); 2.7 (*з-ж*); 4.7 (*з-к*)

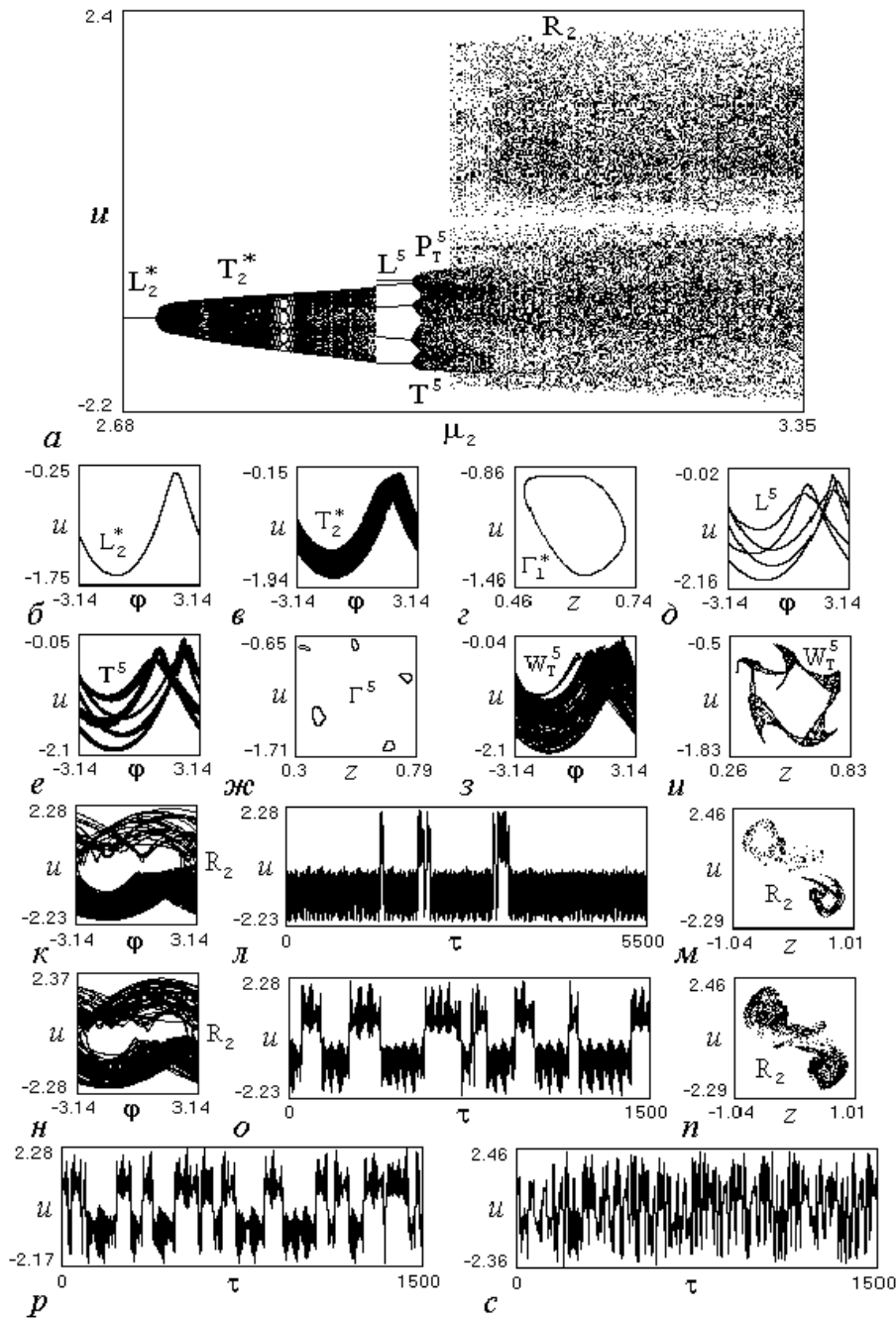


Рис. 16. Переход к хаотическому асинхронному режиму с переключениями колебаний при изменении параметра  $\mu_2$  : бифуркационная диаграмма  $\mu_2, u$  (а) и аттракторы режимов (б-с) ( $\gamma = 0.05, b = -1.55, \varepsilon_1 = 1.8, \varepsilon_2 = 2.05, \beta = 5, \mu = 2.33, \mu_1 = 3.1, \mu_2 = 2.68$ ) (б); 2.78 (в, з); 2.951 (д); 3.01 (е, ж); 3.04 (з, и); 3.061 (к-м); 3.15 (н-п); 3.35 (р); 4.5 (с)

рез перемежаемость «хаос – хаос» в фазовом пространстве образуется вращательный хаотический аттрактор  $R_1$  с переключениями движений, соответствующих двум бассейнам притяжения (см. рис. 15, з-ж). Факт существования аттрактора  $R_1$  отражается наличием на  $\{\mu_2, u\}$ -диаграмме и на  $(z, u)$ -проекции сечения Пуанкаре (рис. 15, ж) двух областей хаотического разброса значений переменной  $u$ . Приме-

чательно, что в проекции  $(z, u)$  аттрактор  $R_1$  похож на хаотический аттрактор типа двойной завиток (double-scroll), существующий в модели отдельной системы с частотным управлением [6–8]. Изменение характера движений на аттракторе  $R_1$  при увеличении  $\mu_2$  отражают рис. 15, *з–к*, из которых видно, что несмотря на уменьшение длительности колебаний между переключениями на  $(z, u)$ -проекции сечения Пуанкаре по прежнему выделяются две области сгущения значений  $u$  и  $z$ . Отметим, что хаотический аттрактор, изображенный на рис. 15, *з–к*, является гиперхаотическим, так как он имеет два положительных ляпуновских характеристических показателя (0.21 и 0.037).

Во втором случае, отображаемом  $\{\mu_2, u\}$ -диаграммой на рис. 16, *а*, процесс перехода от режима предельного цикла  $L_2^*$  к хаотическому аттрактору с переключениями  $R_2$ , отличается от процесса, иллюстрируемого рис. 15, *а*. Образованию аттрактора  $R_2$  здесь предшествует возбуждение квазипериодических автомодулированных колебаний в результате рождения в фазовом пространстве притягивающего двумерного вращательного тора  $T_2^*$  (рис. 16, *в, з*). При увеличении  $\mu_2$  вначале тор  $T_2^*$  вырождается в резонансный тор с пятиоборотным ( $10\pi$ -периодическим по  $\varphi$ ) предельным циклом  $L^5$  (рис. 16, *д*), затем реализуется бифуркация потери устойчивости цикла  $L^5$  с рождением пятиоборотного вращательного тора  $T^5$  (рис. 16, *е, ж*). Далее тор  $T^5$  разрушается, система переходит к режиму вращательного хаотического аттрактора  $P_T^5$  (рис. 16, *з, и*), а от режима аттрактора  $P_T^5$  через перемежаемость «хаос-хаос» (рис. 16, *к–л*) к режиму хаотического аттрактора  $R_2$  (рис. 16, *н–п*). Зависимости  $u(\tau)$  на рис. 16, *р, с* показывают изменение колебаний на аттракторе  $R_2$  при увеличении  $\mu_2$ . При этом в интервале  $\mu_2 \in [3.15; 4.5]$  величина максимального ляпуновского характеристического показателя аттрактора  $R_2$  изменяется от 0.08 до 0.21.

**6.** В данной работе выявлена чрезвычайно сложная картина нелинейных динамических процессов в автогенераторной системе с частотно-фазовой автоподстройкой, содержащей фильтры второго порядка в фазовой и третьего порядка в частотной цепях управления. Обнаружен ряд новых эффектов нелинейной динамики в такой системе, обусловленных инерционностью цепей управления и инверсией характеристики дискриминатора рассогласований в цепи частотного управления, на основе математической модели системы. Численное исследование этой модели, проведенное при различных наборах значений параметров, дало возможность увидеть специфику аттракторов несинхронных режимов, развивающихся в системе, и выяснить, что исследуемая система обладает большим разнообразием регулярных и хаотических модуляционных режимов различной сложности, а также сценариев преобразования режимов и перехода от регулярных режимов к хаотическим при изменении параметров системы. Показано, что возможно сосуществование различных типов модуляционных колебаний, определяемых колебательными и вращательными аттракторами в фазовом пространстве. Характерными являются переходы между квазисинхронными и асинхронными режимами, переходы к хаотическим квазисинхронным и асинхронным режимам с переключениями колебаний, возникновение хаотических режимов в результате бифуркаций удвоения периода предельных циклов, через перемежаемость, через разрушение двумерных торов, а также в результате бифуркаций удвоения торов и эволюции трехмерного тора.

Установленное существование различных квазисинхронных и асинхронных режимов в системе частотно-фазовой автоподстройки, соответствующих регулярным и хаотическим аттракторам в фазовом пространстве модели (3), создает предпосыл-

ки для расширения области применения системы и, в частности, для использования в системах передачи информации с хаотическими сигналами [4]. Выясненная сильная зависимость режимов системы от параметров цепей управления и начального частотного рассогласования позволяет осуществлять эффективное управление модуляционными колебаниями путем изменения указанных параметров, перевод системы от режимов с периодической автомодуляцией к режимам с хаотической автомодуляцией и обратно. Особый интерес при этом представляют модуляционные режимы, соответствующие вращательным и колебательно-вращательным хаотическим аттракторам с нерегулярными переходами между различными колебательными состояниями.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-02-16449).*

### **Библиографический список**

1. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. *Ходаковский В.А., Бычков В.Г.* Оптимальное устройство синхронизации при больших частотных нестабильностях радиоканала // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1974. Т. 17, № 4. С. 29.
3. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новый носитель информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
4. *Дмитриев А.С., Широков М.Е.* Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.
5. *Матросов В.В.* Регулярные и хаотические колебания в фазовой системе // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 23. С. 4.
6. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828.
7. *Пономаренко В.П.* Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 44.
8. *Пономаренко В.П.* Формирование сложных колебаний в автогенераторной системе с нелинейной цепью частотного управления // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 565.
9. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // Журнал технической физики. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
10. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125.
11. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 4–5. С. 31.
12. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 698.
13. *Пономаренко В.П., Тихонов Е.А.* Хаотическая и регулярная динамика автогене-

- раторной системы с нелинейной петлей частотно-фазового управления // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 2. С. 205.
14. Пономаренко В.П., Тихонов Е.А. Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 75.
  15. Пономаренко В.П. Динамические режимы в моделях автогенераторных систем с частотным и частотно-фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 33
  16. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Научн. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
  17. Матросов В.В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002.
  18. Афраймович В.С. Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации / Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович. М.: Наука, 1987. С. 189.
  19. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.

*НИИ прикладной математики  
и кибернетики при ННГУ*

*Поступила в редакцию 9.07.2008*

## **DYNAMICAL REGIMES AND NONLINEAR PHENOMENA IN GENERATOR WITH FREQUENCY-PHASE CONTROL**

*V.P. Ponomarenko*

The paper represents the results of numerical study of dynamical regimes and bifurcation transitions in oscillatory system with frequency-phase control. The study was carried out on the base of mathematical model with three degrees of freedom in cylindrical phase space. Rich variety of various attractors of oscillatory and rotatory type corresponding to modulating modes of the system has been detected. Various scenarios of transition from regular dynamical regimes to chaotic ones under variation of the control loops parameters are analyzed. Strong dependence of oscillatory modes on these parameters that allow to control of modulating modes is established.



*Пономаренко Валерий Павлович* – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail: povp@uic.nnov.ru