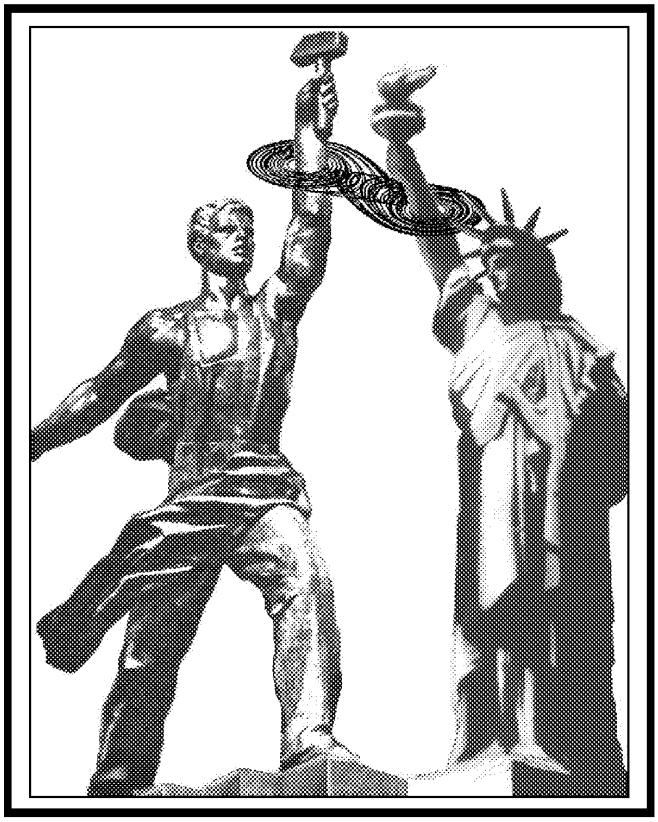
К 20-летию журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика»

ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS



4

1998

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

This issue is supported by the FPP «Integration», 6 96.3

DEPARTMENT OF GENERAL AND PROFESSIONAL EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year Vol. 6, № 4, 1998, Saratov

CONTENTS

REVIEWES OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Information concerning the states of open systems. *Yu.L. Klimontovich* 3

Channels and jokers: neural view of complex dynamics. *G.G. Malinetskii, A.B. Potapov* 18

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Some problems of cluster dynamics: models of molecular scissors. *Yu.M. Romanovsky, A.V. Netrebko* 31

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

Gap solitons. *S.V. Polyakov. A.P. Sukhorukov* 45

DETERMINISTIC CHAOS

Chaotic oscillations in a model of vocal source. *P.S. Landa* 57

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Phase synchronization of switchings in stochastic and chaotic bistable systems. *V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, A.N. Silchenko, L.A. Khovanov* 68

Relaxation oscillations in solid-state lasers with derivative feedback. *N.B. Abraham, P.A. Khandokhin, V.G. Zhislina* 86

Scale properties of random optical fields: fundamentals and applications. *D.A. Zimnyakov, V.V. Tuchin, I.S. Peretochkin* 94

METODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

New model of Brownian transport. *A.N. Malakhov* 105

ANNOUNCEMENTS

The International Center for Advanced Studies in Saratov 109

Metodical papers on nonlinear dynamics

Izv. VUZ «AND», vol. 6, № 4, 1998

A NEW MODEL OF BROWNIAN TRANSPORT

A. N. Malakhov

A new model of the Brownian particle transport on the base of a deterministic modulation of ratchet potential is proposed. This model leads to the directed constant drift of the Brownian particles rather than to their diffusion.

1. Recently a great attention in a theory of the nonlinear Brownian motion is paid to so-called molecular, or Brownian, motors (or stochastic ratchets), which essentially come down to a directed diffusion current of the Brownian particles due to the asymmetrical conditions for the diffusion. These conditions are achieved via time modulation of a space periodic asymmetrical potential profile, taking into account diffusion times in the potential profile scales (see, e.g., [1–7] and the references cited there). In this work a new model of the Brownian motors, different from the known ones, is proposed. In this model the directed current of the Brownian particles arises due to the drift of the Brownian particles and not due to the diffusion.

2. Let us consider the Brownian particle motion in a viscous medium along the tilted potential profile $\Phi(x) = -ax$, where $a > 0$, from the initial delta-shaped probability distribution $W(x, 0) = \delta(x)$ (Fig. 1, *a*).

The Langevin equation for coordinates of the Brownian particles $x(t)$ in overdamped regime reads

$$dx(t)/dt = -(1/h)d\Phi(x)/dx + \xi(t) = a/h + \xi(t), \tag{1}$$

where $\xi(t)$ is Gaussian thermal fluctuations with $\langle\xi(t)\rangle = 0$, $\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = D\delta(\tau)$. Here $D = 2kT/h$ is the thermal fluctuations intensity, k is Boltzmann constant, h and T are the equivalent medium viscosity and the temperature.

The linearity of equation (1) implies that the probability density $W(x, t)$ of the Brownian particles is Gaussian for every t, and it is easy to find that

$$W_G(x, t) = [1/(2\pi Dt))^{1/2}] \exp[-(x-at/h)^2/(2Dt)]. \tag{2}$$

Hence, the probability density, on the one hand, travels in direction of positive x so that $\langle x\rangle = at/h$ and, on the other hand, spreads according the diffusion law: $\sigma_x^2 = Dt$ (Fig. 1, *b*), where σ_x^2 is the variance.

Thus, the tilted potential profile may exert directed transport of Brownian particles in the direction of decreasing potential. At the same time, if this model is to be realistic, it is necessary to bound the potential.

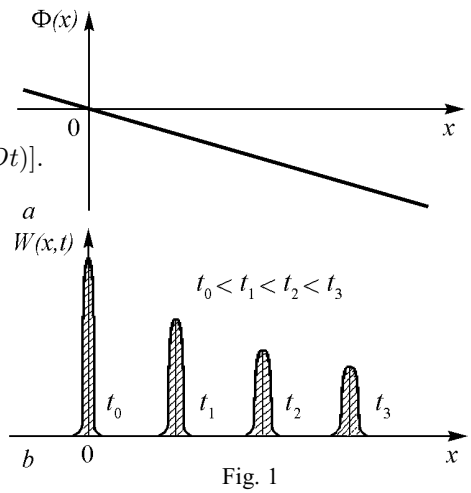


Fig. 1

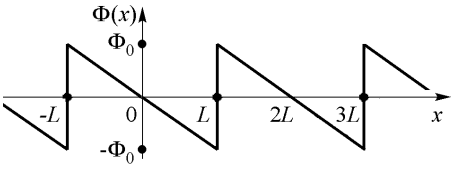


Fig. 2

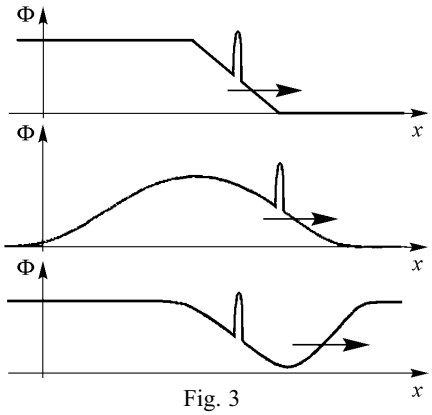


Fig. 3

3. Let us choose the ratchet potential with period $2L$ (Fig. 2). The Brownian particle movement from $x = 0$ to the right will take place according (2) as long as $\langle x \rangle + 3\sigma_x < L$.

We suppose that the process of the diffusive spreading inside the potential period is slower than the drift, i.e. $(Dt)^{1/2} \ll L$, where $t = Lh/a$. It is easy to show that this condition means that thermal fluctuations are much less than the height of the potential barrier:

$$kT \ll \Phi_0/2 = La/2 \tag{3}$$

This condition is taken, as a rule, in all studied models of stochastic ratchets, in order to prevent the Brownian particles from passing over potential barriers and breaking the symmetry of the diffusion.

Thus, under condition (3) by the time $t_L = Lh/a$ the probability density $W_G(x,t)$ moves to the point L practically without any spread.

The further movement of the probability density is stopped by the potential jump $2\Phi_0$. In order to overcome this situation, it is necessary to use appropriate modulation of the ratchet potential and in result to place the Brownian particles again on the potential profile slope, e.g. in the middle of the potential period.

It can be done, for example, as follows.

a) The most simple and effective method is to move the ratchet potential with the velocity a/h so, that the Brownian particles to be always in the middle of the slope. This modulation can be named as the *running potential or the surfing potential*. The shape of the running potential can be different. It will be sufficient to move to the right single slope only with the velocity a/h (Fig. 3).

It is obvious that an artificial creating of such a running potential with velocity depending on the slope steepness is a rather difficult, if not hopeless, problem. However, in biological structures of a cell, where the directed Brownian motion is supposed to be instead of ordinary noneffective diffusion processes (see, e.g., [1]), this running potential can be materialized via the interaction of active macromolecules moving along a polymer with the electrical field of the polymer. It is possible that the running macromolecule by itself «makes» appropriate down-slope of the potential profile which is fully synchronized in a velocity with directed movement of macromolecules.

b) The second evident method of the deterministic modulation is step-wise displacement of the ratchet potential to and fro in a half of period when the Brownian particles are transported up to the potential jump. So, translation of the ratchet potential forth in half of period puts the Brownian particles again in the slope middle and gives possibility for them to be transported up to coordinate $x = 2L$. The back displacement of the ratchet potential in initial position will bring the Brownian particles to the point $x = 3L$, etc. Thus, if the ratchet potential is regularly translated in halves of periods to and fro, at interval of $\Delta t = Lh/a$, the mean value of the Brownian particles coordinate shifts to the right with constant velocity $\langle x \rangle = at/h$ (Fig. 4).

In order to exclude difficulties connected with an interaction of the Brownian particles with potential jump $2\Phi_0$ at the reverse displacement of the ratchet potential from position B to position A, it is sufficient to switch off the potential itself before translation from position B to position A (i.e. to set $\Phi(x) = 0$) and then switch on the potential in position B.

5. Now let us take into account the spreading of the probability distribution of the Brownian particles drifting to the right, which may be detectable after N switching, when instead of $\sigma_x(L) = (Dt)^{1/2} = (2kTL/a)^{1/2}$ we shall have $\sigma_x(NL) = (2kTNL/a)^{1/2}$. At enough large N (i.e. large t) the probability density $W(x,t)$ will be against the potential jump and will take the non-Gaussian shape (Fig. 5) which at $kT \ll \Phi_0/2$ is

$$W_0(x) = \begin{cases} 2a/(hD)\exp[2ax/(hD)], & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

After replacing of this probability density on the slope middle (at next switching) it will drift and spread according to

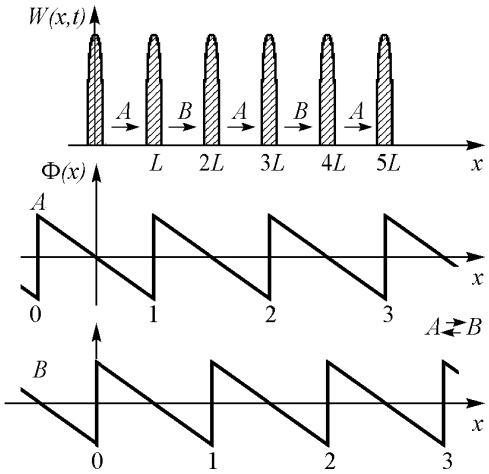


Fig. 4

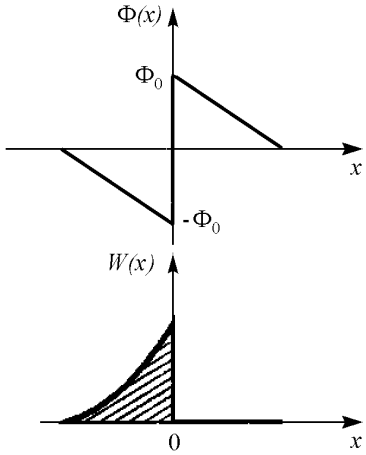


Fig. 5

$$W(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_0(u) W_G(x-u,t)du, \tag{5}$$

where $WG(z,t)$ is given by (2). Under condition $kT \ll \Phi_0/2$ the spreading of the probability density (5) will be practically negligible in process of its movement down along the slope till the next potential jump, and near the potential jump the probability density again takes the same shape (4).

So, at enough large number of the switching of the ratchet potential the probability density of the Brownian particles equals

$$W(x,t) = \begin{cases} 2a/(hD)\exp[2a/(hD)(x-at/h)], & x < at/h, \\ 0, & x > at/h. \end{cases} \tag{6}$$

and in course of time it has practically constant shape.

6. Thus, the proposed model of the Brownian motor describes the directed transport of the Brownian particles with constant velocity and permits to translate the Brownian particles $\sim t$ and not $\sim t^{1/2}$, as it takes place for other known models of stochastic ratchets, because we have here deterministic drift of the probability density instead of drift associated with the asymmetrical diffusive spreading.

This work has been supported by RFBR (Projects № 96-02-16772-a and № 96-15- 96718).

References

1. *Magnasco M.* // Phys.Rev.Lett. 1994. Vol. 72. P. 2656.
2. *Doering C.R., Horsthemke W., Riordan J.* // Phys.Rev.Lett. 1994. Vol. 72. P. 2984.
3. *Luczka J., Bartussek R., Hanggi P.* // Europhys. Lett. 1995. Vol.31, № 8. P. 431.
4. *Bier M.* // Phys.Rev.Lett.A. 1996. Vol. A211. P. 12.
5. *Bier M., Astumian R.D.* // Phys.Rev.Lett. 1996. Vol. 76, № 22. P. 4277.
6. *Nikitin A .P.* // Izv. vuz. Applied nonlinear dynamics. 1997. Vol. 5, № 1. P.30.
7. *Shimansky-Geier L., Kschischo M., Fricke T.* // Phys.Rev.Lett. 1997. Vol. 79. P. 3335.

Department of Radiophysics
Nizhny Novgorod Stale University

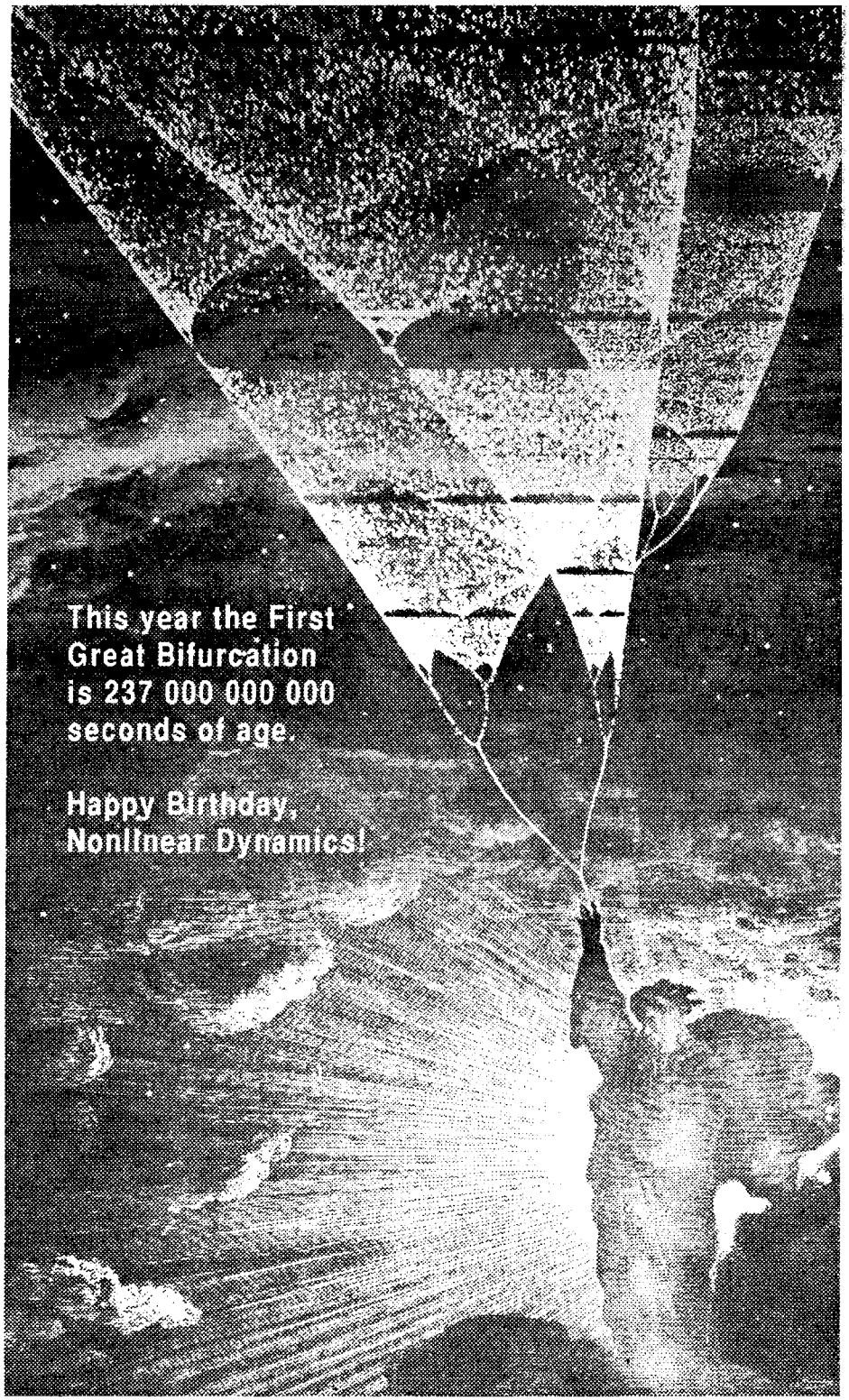
Received 1.06.98

УДК 539

НОВАЯ МОДЕЛЬ БРОУНОВСКОГО ПЕРЕНОСА

А. Н. Малахов

Предложена новая модель переноса броуновских частиц с помощью детерминированной модуляции «ratchet» потенциала. Модель приводит, главным образом, к направленному постоянному дрейфу броуновских частиц, сопровождающемуся ограниченным расплыванием частиц.


This year the First
Great Bifurcation
is 237 000 000 000
seconds of age.
Happy Birthday,
Nonlinear Dynamics!

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год Том 21, № 4, 2013, Саратов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Страницы из прошлого 1

Материалы Школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2012» Саратов, 8–9.11.2012, 27–29.11.2012

НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ

Трубецков Д.И. Две лекции о двух путях истории симметрии 13

Щеголев С.Ю. Современные взгляды на эволюцию: О роли горизонтального переноса генов 34

Иванченко М.В., Канаков О.И., Котельников Р.А., Крылов И.Б. Нелинейная динамика синтетических сетей генной регуляции 52

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. PERSONALIA

Куркина Е.С., Князева Е.Н. С.П. Курдюмов и его эволюционная модель динами ки сложных систем 135

Правила для авторов 218

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993
Published 6 times a year Vol. 21, № 4, 2013, Saratov

C O N T E N T S

The pages from the past 1

Transactions of the Scientific school
«Nonlinear Days in Saratov for Youth – 2012»
Saratov, 8–9.11.2012, 27–29.11.2012

SCIENCE FOR EDUCATION

Trubetskov D.I. Two lectures about the two ways of symmetry investigation 13
Shchyogolev S.Yu. Current views of evolution: On the role of horizontal gene transfer 34
Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Kotelnikov R.A., Krylov I.B. Nonlinear dynamics of synthetic gene regulatory circuits 52

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

Kurkina E.S., Knyazeva H.N. Sergey P. Kurdyumov and his evolutionary model of dynamics of complex systems 135

Author's rules 218

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 4, 2013 УДК 530.1

ДВЕ ЛЕКЦИИ О ДВУХ ПУТЯХ ИСТОРИИ СИММЕТРИИ

Д. И. Трубецков

Эти лекции были прочитаны школьникам на школе-семинаре «Нелинейные дни в Саратове для молодых» в октябре 2012 года. Они посвящены изложению двух путей истории симметрии. Первый путь – самоподобие, то есть инвариантность при изменении размеров. В более общем случае говорят о скейлинге, понимая под этим термином существование степенного соотношения между некоторой переменной y и переменными $x_1, ...x_n$: $y = Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$, где A, α_1,...α_n – постоянные. В Лекции 1 приведены примеры появления скейлинга (самоподобия) в различных областях науки и культуры. Как указывает Г.И. Баренблат [1], «...степенные законы – скейлинг – никогда не появляются случайно. Они всегда обнаруживают важнейшее свойство рассматриваемого явления, его автомодельность. Слово автомодельность означает, что, изменяясь во времени и пространстве, явление воспроизводит себя в изменяющихся временных и/или пространственных масштабах». В Лекции 2 изложен второй путь – поиск решения алгебраических уравнений, приведших к теории групп. Изложение ведется на фоне исторических событий и описаний действующих лиц истории.

Ключевые слова: Симметрия, самоподобие (скейлинг), фракталы, степенные ряды, подобие, золотое и серебряное сечения, хаос.

Лекция 1. Самоподобие как вид симметрии

> Симетрія ж.греч. соразмѣръ, соразмѣрность, равно (или разно) подобіе, равномѣріе, равнообразіе, соответствіе, сходность, одинаковость, либо соразмѣрное подобие расположенья частей цѣлого, двухъ половинъ; сообразіе, сообразность; противоравенство, противоподобіе. Симетрическое расположение дома, фасада, разнообразное на обѣ половины. Полная симетрія докучаетъ, а изящное разнообразие краситъ и тѣшитъ вкусъ.
>
> *В.И. Даль*. Толковый словарь живого великорусского языка. В 4 т. Т. 4. М.: Изд-во «Русский язык», 1998. С. 186.

Начнем с определений

Известно, что Леонид Исаакович Мандельштам предостерегал от строгих определений. Он сравнивал их введение с пеленанием младенца в колючую проволоку, особенно на раннем этапе вхождения в ту или иную проблему. Однако, вопреки

его предостережению мы дали определение уже в эпиграфе и дадим еще несколько, которые во многом носят описательный характер.

Первое из них принадлежит Герману Вейлю из его замечательной книги «Симметрия» [2, с. 37].

«Симметрия – в широком или узком смысле в зависимости от того, как вы определите значение этого понятия, – является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Вот еще одно определение [3, с. 12, 13].

«Симметрия – это не число и не форма, но специальный вид преобразований, то есть некоторый способ "шевелить" объект. Если объект выглядит неизменным после преобразования, то данное преобразование представляет собой симметрию. Например, квадрат выглядит так же, как раньше, если его повернуть на прямой угол.

Эта идея – серьезно расширенная и усовершенствованная, лежит в основе того, как современная наука понимает Вселенную и ее происхождение... Такое понимание пришло из чистой математики; роль симметрии в физике проявилась позднее...

Говоря более широко, история симметрии иллюстрирует, как культурное влияние и историческую непрерывность великих идей можно выпукло отразить на фоне как политических, так и научных сдвигов и переворотов».

И, наконец, последнее определение симметрии из книги М. Шредера [4, с. 15–16], которую будем часто цитировать, а иногда и пересказывать.

«Под симметрией мы понимаем инвариантность при каких либо изменениях: нечто остается одним и тем же, несмотря на потенциальную возможность изменения. По-видимому, сильнее других бросается в глаза зеркальная симметрия, то есть инвариантность при "перемене местами" левой и правой сторон...

Трансляционная, поворотная и зеркальная симметрии, действуя совместно, создают форму кристаллов от алмазов до снежинок. И эти же три симметрии определяют многое из того, что доставляет нам эстетическое наслаждение в орнаментальных узорах... Среди всех симметрий, пышным цветом расцветающих в Саду Инвариантности, лишь один побег до недавнего времени не был взлелеен – буквально вездесущая инвариантность при изменении размеров, называемая самоподобием, или, если речь идет более чем об одном масштабном (скейлинговом) факторе, самоаффинностью...

Слово симметричный – древнегреческого происхождения и означает "соразмерный", "упорядоченный", то есть даже отдаленно не напоминает ни о чем хаотическом. Тем не менее, как это ни парадоксально, самоподобие... – это единственная из всех симметрий, которая порождает саму антитезу симметрии – хаос, состояние полного беспорядка и отсутствия какой бы то ни было соразмерности».

Эта лекция в большей степени отвечает третьему из приведенных определений и посвящена самоподобию.

Эйнштейн доказывает теорему Пифагора на основе подобия треугольников (или анализа размерностей?)

Историки науки считают, что развитию математических способностей Эйнштейна в детстве способствовал его дядя Якоб – инженер по образованию. Он давал мальчику математические задачи, и тот испытывал удовольствие от их решения. В 1891 году Эйнштейн приобрел, по его по словам, «священную книгу по геометрии» – геометрию Эвклида. Изучая ее, он почувствовал, что некоторые доказатель-

ства в книге неоправданно сложны, в частности, доказательство теоремы Пифагора. Он предложил иное доказательство[1].

Пусть мы имеем прямоугольный треугольник ABC и опустим высоту BД из вершины прямого угла на гипотенузу AC (рис. 1). Высота делит большой треугольник на два меньших, подобных друг другу и большому треугольнику. Напомним правила подобия треугольников.

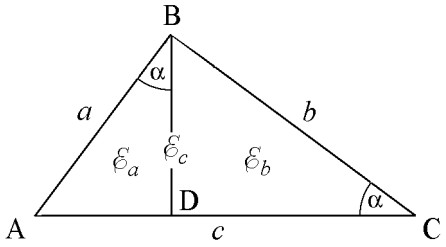


Рис. 1. Чертеж к доказательству теоремы Пифагора, которое предложил одиннадцатилетний Эйнштейн

Треугольники подобны, если их собственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Для подобных треугольников достаточно одного из следующих условий:

1) Три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

2) Два угла одного треугольника равны двум углам другого.

3) Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а заключенные между ними углы равны.

Площади подобных треугольников пропорциональны квадратам сходственных линейных элементов (сторон, высот, диагоналей и т.п.)

Из рисунка видно, что все три треугольника подобны по условию 2. Как уже указывалось в эвклидовой геометрии, площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих линейных размеров, то есть площади $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_b$ и $\mathcal{E}_c$ ($\mathcal{E}$ – начальная буква немецкого слова Ebene – площадь) трех треугольников связаны с их гипотенузами a, b и c соотношениями

$$\mathcal{E}_a = ma^2, \tag{1}$$

$$\mathcal{E}_b = mb^2, \tag{2}$$

$$\mathcal{E}_c = mc^2, \tag{3}$$

где m – безразмерный отличный от нуля коэффициент, один и тот же во всех соотношениях.

Из рис. 1 видно, что $\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_c$ или с учетом (1)–(3)

$$ma^2 + mb^2 = mc^2,$$

что приводит нас к теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Как восторженно пишет Шредер, теорема, которую доказал одиннадцатилетний ребенок, уже содержала в доказательстве принципы простоты и симметрии (частным случаем последней является самоподобие). «Однако истинная красота доказательства Эйнштейна не в том, что оно столь просто, а в том, что оно вскрывает истинную суть

[1]Шредер [4, с. 25] пишет по этому поводу следующее. «Эту историю мне рассказал Шнейор Лифсон (из Института Вейцмана в Тель-Авиве), которому поведал ее ассистент Эйнштейна Эрнст Штраус, слышавший ее от самого старика Альберта».

Рис. 2. Эйнштейн в процессе вывода своей знаменитой формулы $\mathcal{E} = mc^2$ (с точки зрения карикатуриста) [4, с. 27]

теоремы Пифагора: подобие и масштабируемость (скейлинг)» [4, с. 27].

Случайное буквенное совпадение соотношения (3) с последующим знаменитым открытием Эйнштейна об эквивалентности энергии и массы $\mathcal{E} = mc^2$, следующим из инвариантности при преобразованиях Лоренца, породило забавную карикатуру (рис. 2).

Впрочем, Эйнштейн мог вывести теорему Пифагора и из соображений размерности.

Действительно, из размерности вытекает, что площадь $\mathcal{E}_c$ треугольника можно записать как произведение квадрата гипотенузы c^2 на произвольную функцию угла $f(\alpha)$. Аналогично можно представить и площади $\triangle\,\mathrm{ABD}$ и $\triangle\,\mathrm{BCD}$, в которых гипотенузами являются катеты треугольника ABC. Тогда $c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha)$.

Может быть, Эйнштейн решал задачу и так.

Самоподобная расстановка ферзей, не бьющих друг друга. Снежинка Коха и размерность для фракталов. Канторово множество и ковер Серпинского

Если мы повторяем некую операцию снова и снова, но в меньшем и меньшем масштабе, то мы практически неизбежно приходим к самоподобной структуре. Повторяющаяся операция может быть алгебраической, символической или геометрической, как, например, в случае следующей шахматной задачки: «Как на шахматной доске заданных размеров должны быть расставлены ферзи, которые не бьют друг друга, то есть никакие два ферзя не стоят на одной горизонтали, одной вертикали или одной диагонали доски?» Задача решается просто, если мы будем говорить о досках, размеры или порядок которых k равен целой степени какого-нибудь целого числа, то есть $k = n^m$, где m и n – целые числа.

Расстановка пяти не бьющих друг друга ферзей показана на рис. 3. Понятно, что легко найти решение для доски 25×25, которую можно считать состоящей из $5 \times 5 = 25$ досок размером 5×5. Следует просто оставить пустыми большую часть из этих 25 досок, за исключением пяти, соответствующих занятым на рис. 3 ферзями. Действуя по аналогии, мы придем к доске размером $5^n \times 5^n$ с расставленными на ней 5^n ферзями, не бьющими друг друга[2]. Расстановка безукоризненно само-

[2]Шредер предлагает более романтическую постановку задачи: имеем пять спящих красавиц-королев, которых мы на пути к совершенному самоподобию пробудили ото сна и позволили безгранично множиться.

подобна: выбирая одну из пяти непустых «поддосок» со стороной, составляющей одну пятую от всей доски, и увеличивая ее в пять раз, получим исходную доску. Множитель 5 – коэффициент подобия доски. Запомним цифру 5, поскольку именно на ней сомкнутся обе темы лекций.

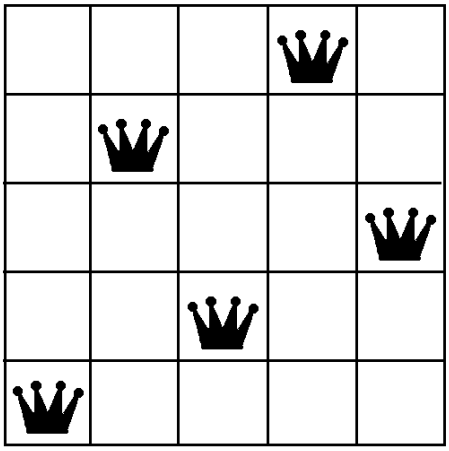


Рис. 3. Пять не бьющих друг друга ферзей на доске 5×5 [4, с. 29]

Следующий пример – кривая Коха, предложенная шведским математиком Хельге фон Кохом в 1940 году. Последовательность ее построения показана на рис. 4. Возьмем прямолинейный отрезок единичной длины $L(1) = 1$ ($n = 0$ на рис. 4), разделим его на три равные части и заменим среднюю часть двумя другими сторонами построенного на ее базе равностороннего треугольника. Получится так называемый образующий элемент, которому на рис. 4 соответствует $n = 1$. Длина всей построенной кривой $L(1/3) = 4/3$, поскольку каждое звено кривой, состоящей из четырех прямолинейных звеньев, равно 1/3. На следующем шаге построения ($n = 2$) той же элементарной операции подвергался каждый отрезок длиной 1/3. Иными словами, каждое прямолинейное звено заменяется уменьшенным образующим элементом и получается кривая, состоящая из 16 звеньев, длина которой $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$. Действуя подобным образом, получим кривые для любых n. Кривая на любом конечном шаге n имеет длину $L(\delta) = (4/3)^n$, где $\delta = 3^{-n}$. При $n \to \infty$ длина звена $\delta \to 0$, а длина всей ломаной $L(\delta) \to \infty$. Эта кривая бесконечной длины нигде не дифференцируема, хотя и всюду непрерывна.

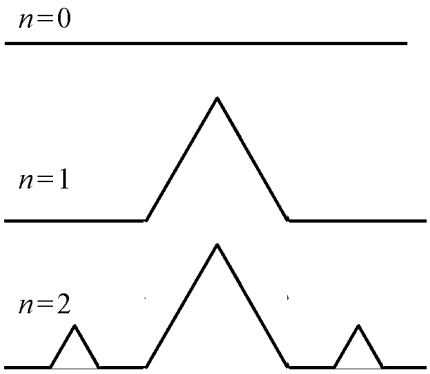


Рис. 4. Последовательность построения триадной кривой Коха

Впервые побочные функции, которые непрерывны, хотя ни в одной точке к ним невозможно провести касательную, были построены Карлом Вейерштрассом. Многие ужаснулись, но были и те, кто увидел в них нечто новое.

Первым был Людвиг Больцман, который в 1809 году писал в письме Феликсу Клейну, что недифференцируемые функции могли бы быть изобретены физиками, поскольку в статистической механике имеются проблемы, для решения которых «недифференцируемые функции абсолютно необходимы». В 1906 году Жан Перрен предсказывал, что «кривые, не имеющие касательных, являются общим правилом, а гладкие кривые, такие как окружность, – интересным, но весьма частным случаем» (цит. в обоих случаях по [4, с. 30–31]). Удивительно, не правда ли?

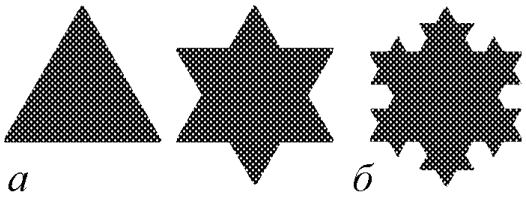


Рис. 5. *а* – исходная фигура и образующий элемент для снежинки Коха; *б* – промежуточный пример для снежинки

Сегодня, с легкой руки Мандельброта, мы называем такие недифференцируемые кривые просто фракталами.

Применяя образующий элемент Коха к равностороннему треугольнику и закрасив внутренность получившейся фигуры в черный цвет, приходим к сплошной звезде Давида (рис. 5, *а*). Бесконечная итерация приводит к снежинке Коха (пример на рис. 5, *б*). После n итераций периметр снежинки становится в $(4/3)^n$ раз больше периметра исходного треугольника, а при $n \to \infty$ становится бесконечно большим. Мы уже указывали на это, анализируя кривую Коха. Как же измерить периметр?

Для гладкой кривой мы заменили бы ее ломаной так, чтобы длина $L(\delta) = N\delta$, где N – число прямолинейных отрезков, умещающихся на кривой, а δ – длина отрезка. Тогда при $\delta \to 0$ $L(\delta)$ стремится к конечному пределу – длине L рассматриваемой кривой.

С фракталами так поступать нельзя: произведение $N\delta \to \infty$, потому что когда $\delta \to 0$, мы учитываем все более мелкие извивы фрактала. Но стремление к бесконечности происходит по определенному однородному степенному закону от δ, такому что при некотором значении показателя $D > 1$ произведение $N\delta^D$ остается конечным. При показателях, меньших D, произведение обращается в бесконечность, а при больших D стремится к нулю. Эту величину D называют размерностью Хаусдорфа–Безиковича, и она выражается формулой

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N}{\ln(1/\delta)}.$$

Если при построении снежинки Коха шаг на n-м этапе построения равен $\delta = 1/3^n$, то число шагов $N = 4^n$. Следовательно,

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26...$$

Величина D лежит между 1 и 2, и это понятно: бесконечно длинная кривая представляет собой нечто большее, чем просто одномерный объект, но в то же время она не двумерная фигура, так как такая кривая не покрывает никакой области на плоскости. Таким образом, то, что D может принимать дробные значения – разумно.

Очевидно, что для гладкой кривой $D = 1$, для гладкой поверхности[3] $D = 2$, для трехмерного тела $D = 3$. Интересно, однако, что размерность $D = 2$ может иметь и топологически одномерный объект – линия. Классический пример – асимптотически самоподобная кривая Джузеппе Пеано (работы которого анализировал Гильберт), проходящая сколь угодно близко от любой точки единичного квадрата

[3]Для гладкой поверхности число N покрывающих дисков пропорционально $1/\delta^2$, где δ – диаметр малых дисков, необходимых для того, чтобы покрыть фигуру.

(рис. 6). Поскольку n-й образующий элемент кривой Пеано состоит из $2^{2n} - 1$ звеньев длиной $1/2^n$, то ее размерность $D = 2$, как и полагается кривой, заполняющей плоскую фигуру.

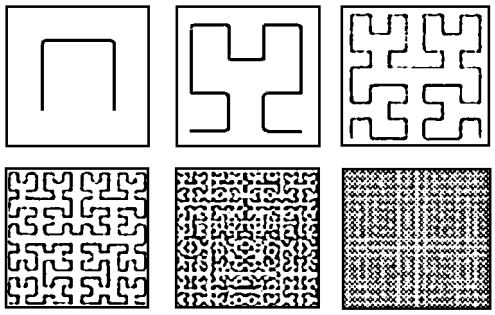


Рис. 6. Этапы построения кривой Пеано [4, с. 34]

Размерность Хаусдорфа–Безиковича полезна и для описания точечных множеств – «кривых» нулевой длины. Знаменитый пример – множество, построенное Георгом Кантором (рис. 7). Для построения канторова множества возьмем отрезок [0,1], имеющий единичную длину, разделим его на три части и выбросим середину – открытый интервал (1/3; 2/3). Будем поступать дальше аналогично: отрезки [0; 1/3][2/3;1] делим на три части и выбрасываем середины. На k-м шаге описываемой процедуры получим 2^k оставшихся отрезков, не связанных друг с другом. Длина каждого отрезка равна $1/3^k$. В пределе, когда $k \to \infty$, число вырезанных отрезков неограниченно возрастает, а длина их стремится к нулю. К нулю же стремится и их суммарная длина. Действительно, суммарная длина всех вырезанных отрезков представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2/3$ и первым членом $a_1 = 1/3$, то есть

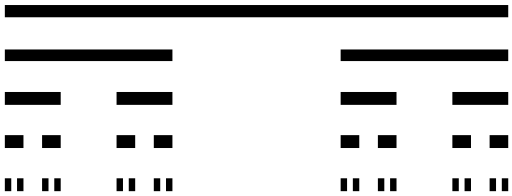


Рис. 7. Построение канторова множества

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

Поскольку исходная длина отрезка равна 1, то мера ее остатка равна нулю. Но это не значит, что ничего нет.

В случае размерности Хаусдорфа–Безиковича роль радиуса элемента заполнения будет играть длина отрезка, оставшегося на k-м этапе построения, то есть $1/3^k$; число элементов укрытия равно числу отрезков, то есть 2^k. Тогда

$$D = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63...$$

Размерность получилась дробной, принимающей значения между 0 и 1. Почему? Потому, что «канторова пыль» гораздо больше, чем точка с размерностью 0, и много меньше, чем отрезок прямой или кривой с размерностью 1. Теперь, пожалуй, можно дать и определение фрактала, следуя Бенуа Мандельброту.

Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого больше его топологической размерности.

Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Первое определение весьма ограничительно, но строго. Второе подчеркивает важный признак фрактала: он выглядит одинаково, в каком бы масштабе его ни наблюдать. И хотя неологизм «фрактал» был введен недавно, можно считать,

что фрактальная геометрия появилась давно, а главными фигурами в развитии идеи фрактальной размерности были Феликс Хаусдорф (1868–1942) и Абрам Самуилович Безикович (1891–1970).

Естественен вопрос: «Существуют ли двумерные множества, подобные квантовой пыли?» Да, существуют.

Рассмотрим равносторонний треугольник и удалим перевернутый центральный равносторонний треугольник со стороной, равной половине длины исходного треугольника. Останется три треугольника со сторонами, вдвое меньшими стороны исходного треугольника. Если повторять эту операцию над неперевернутыми треугольниками, после n шагов получаем $N = 3^n$ треугольников со сторонами $r = r_0 2^{-n}$. Получающееся при бесконечном повторении этой процедуры множество называется ковром Серпинского (польский математик Вацлав Серпинский, 1882–1969). Размерность Хаусдорфа–Безиковича этого множества $D = \ln 3/\ln 2 = 1.58$. Заметьте, что $D < 2$ несмотря на то, что ковер существует в двумерном пространстве (рис. 8).

Заметим, что самоподобие ковра Серпинского сочетается с классической симметрией – симметрией поворота, поскольку форма ковра не изменяется при повороте вокруг его центра на угол $120°$ или на любое целое, кратное $120°$. Как замечает Шредер [4, с. 42], «такие симметрии, сочетающие в себе бесконечный скейлинг и поворот на конечный угол, наблюдаются во многих фрактальных построениях и в работах известного художника Морица Эшера». На рис. 9 приведен трехмерный вариант ковра Серпинского. Построение начинается с пирамиды, гранями которой являются четыре равносторонних треугольника (с правильного тетраэдра), из которой вырезается центральная перевернутая пирамида вдвое меньших размеров. Эта операция продолжается со всеми оставшимися пирамидами и т.д. Получается что-то вроде ажурной башни (см. рис. 9). Размерность Хаусдорфа–Безиковича следует из самой процедуры построения: уже из первого этапа имеем $N = 4$ (четыре оставшихся пирамиды) и размер $r = 1/2$, поэтому $D = \ln 4/\ln 2 = 2$. Фрактальная размерность оказывается целой, но на единицу меньше эвклидовой размерности несущего пространства $d = 3$.

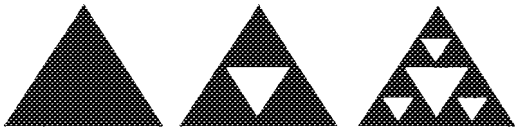


Рис. 8. Построение ковра Серпинского

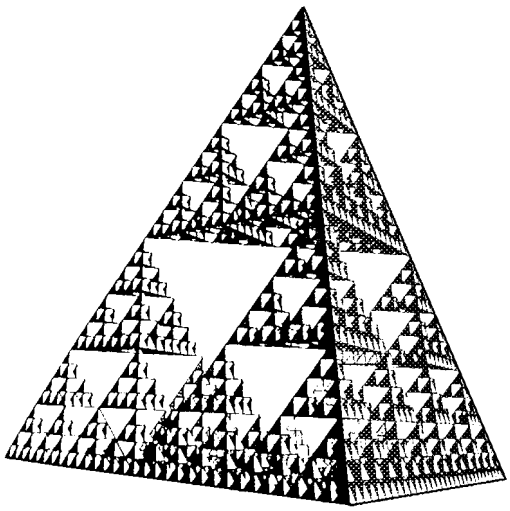


Рис. 9. Трехмерный вариант ковра Серпинского [4, с. 44]

Приведем любопытную цитату из книги [4, с. 43–45].

«Двумерные и трехмерные аналоги ковра Серпинского моделируют многие природные явления и рукотворные сооружения. Взять хотя бы Эйфелеву башню в Париже, спроектированную Густавом Эйфелем. Если бы вместо всемирно извест-

ной ажурной конструкции это сооружение было спроектировано в виде сплошной пирамиды, то на его строительство было бы израсходовано дополнительно невероятное количество железа без сколько-нибудь заметного увеличения прочности. Эйфель пошел по другому пути: он применил фермы, то есть структурные модули, элементы которых используют жесткость треугольника. (Треугольник в отличие от прямоугольника не может быть деформирован без деформации по крайней мере одной из его сторон.) Однако отдельные элементы больших ферм сами представляют собой фермы, которые в свою очередь состоят из ферм еще меньшего размера. Такая самоподобная конструкция гарантирует высокую прочность при низком весе. Конструкция готических соборов также выдает глубокую веру их строителей в принцип достижения максимальной прочности при минимальной массе. В то же время американский архитектор Бакминстер Фуллер (1895–1983) и его ажурные купола наглядно продемонстрировали всем, что прочность кроется не в массе, а в точках ветвления. Вопреки тому, что нам подсказывает здравый смысл, ковер Серпинского и аналогичные ему конструкции состоят сплошь из одних лишь точек ветвления. (В сколь угодно малой окрестности точки ветвления на кривой содержится более чем 2 точки)».

Степенные законы и самоподобие

Принцип подобия лежит в основе значительной части алгебры. Возьмем, например, однородную степенную функцию

$$f(x) = cx^{\alpha},$$

где c и α – постоянные. Если $\alpha = 1$, то $f(x) = cx$ и при $c < 0$ функция описывает восстанавливающую силу линейной пружины. Если же $\alpha = -2$ и $c < 0$, то уравнение становится законом всемирного тяготения Ньютона $f(x) = cx^{-2}$. Эти простые степенные законы, встречающиеся в природе часто, являются самоподобными: если подвергнуть x преобразованию подобия, умножив его на некоторую константу, то функция $f(x)$ по-прежнему будет пропорциональна x^{α}, правда с другим коэффициентом пропорциональности. Таким образом, закон Ньютона $F \sim r^{-2}$ справедлив независимо от значения величины r (будь r – длиной световой волны или длиной светового года). В законе Ньютона нет собственного, «встроенного» масштаба. Мы при желании можем растянуть или сжать гравитирующую Вселенную по своему усмотрению.

Закон обратных квадратов описывает и убывание мощности радиолокационного сигнала с расстоянием, чем во время второй мировой войны пользовались немецкие подводные лодки: они оценивали быстроту приближения авиации противника и успевали погрузиться прежде, чем вражеские самолеты начинали их атаковать. Американский физик Луис Альварес (1911–1988) изобрел устройство «Vixen» (лисица), предложив уменьшить интенсивность радиолокационного сигнала настолько, чтобы она была пропорциональна кубу расстояния до подводной лодки ($I \sim r^3$). Таким образом, при приближении самолета к подводной лодке интенсивность падала, создавая у моряков впечатление, что самолет удаляется. В то же время интенсивность отраженного сигнала от подводной лодки возрастала по мере приближения к цели.

Степенные законы описывают и спектры мощности различных шумов, в том числе самый загадочный из них – вездесущий, но часто труднообъяснимый фликер-шум $1/f$, где f – частота.

В мире фракталов степенные законы не обязательно должны быть целыми: они часто бывают дробными. Вот пример из человеческого восприятия. В весьма широком диапазоне амплитуд звуковых сигналов субъективная громкость $L \sim I^{0.3}$, где I – физическая интенсивность звука (мы вернемся к этой теме позднее). Так, для усиления звучания своей музыки вдвое рок-группа из 5 музыкантов должна увеличить свою численность в 10 раз (50 музыкантов) при условии, что «выходная мощность» каждого музыканта останется на прежнем уровне. Вот почему рок-группы так пристрастны к электронным усилителям. Итальянский экономист Вильфредо Парето (1848–1923), работая в Швейцарии, обнаружил, что вероятность того, что один человек в 10 раз богаче другого, подчиняется нормальному распределению, но вероятность стократного превышения благосостояния оказывается намного больше той, что предсказывается нормальным распределением. По мнению Парето, такой «утолщенный хвост» возникает, наверное, потому, что богатый может эффективнее умножать свое богатство, чем средний индивид, чтобы достичь более высоких доходов и большего богатства. Таким образом, по Парето, число людей с доходом, превышающим некоторую большую величину, следует степенному закону. Похожий обратно-степенной закон был найден Джорджи Кингсли Ципфом (1902–1950) для частоты использования слов: длинные слова используются реже, чем короткие. Математическое выражение закона имеет следующий вид:

$$f(r) \approx \frac{1}{r \ln(1.78R)},$$

где f – частота использования слова; r – ранг слова – слово, стоящее на r-м месте в списке слов данного языка, расположенных в порядке убывания их употребления; R – общее число различных слов. Законы, подобные $f(r) \sim 1/r$ называются гиперболическими законами. Предположим, что для английского языка $R = 12000$ слов. Тогда относительные частоты слов высокого ранга (the, of, and, to и т.д. в порядке убывания рангов) приближенно равны 0.1; 0.05; 0.033; 0.025; и т.д. На рис. 10 показано, сколь точно соответствуют экспериментальные данные и расчеты по закону Ципфа [4, с. 66].

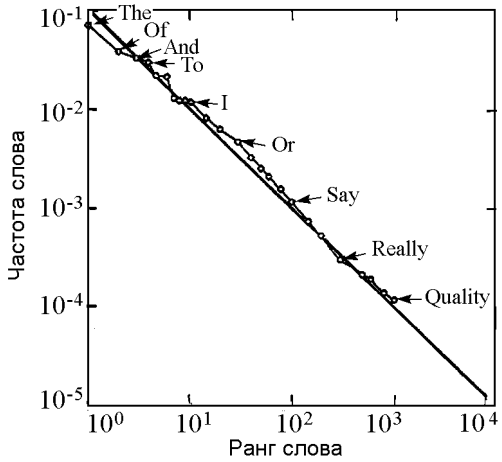


Рис. 10. Зависимость частоты слова от ранга слова: сплошная кривая – расчет по закону Ципфа

Интересны результаты применения закона Ципфа к языку отдельных писателей. У хорошего писателя с активным словарем примерно в 100000 слов 10 слов наивысшего ранга занимают 24% текста. В то же время в примитивном газетном английском со словарем в $R = 10000$ слов доля часто употребляемых слов около 30%, то есть не на много больше. Дело в том, что любому писателю трудно избежать таких слов, как the, of, and и to. У Шредера

есть интересный пассаж, касающийся обезьяньего языка [4, с. 67–69]. Если обезьяна «печатает» на пишущей машинке, на клавиатуре которой имеется N равновероятных клавиш с буквами и одна клавиша для пробела (с вероятностью p_0), то создаваемые обезьяной слова, то есть последовательности букв между пробелами, имеют частоты

$$f(r) \sim r^{\frac{-1+\ln(1-p_0)}{\ln N}}.$$

При $N = 26$ и $p_0 = 1/5$ показатель величины r равен $(-1,068)$, что лишь немного меньше (-1). Далее Шредер пишет следующее [4, с. 67–68].

«В общем случае обезьяньи слова можно моделировать как канторово множество с фрактальной размерностью D, равной величине, обратной показателю дроби $1/r$. В нашем примере

$$D = \frac{1}{\dfrac{1-\ln(1-p_0)}{\ln N}} \approx 0.936.$$

Для алфавита из 9 букв и $p_0^{-1} = 110$ показатель равен (-1.048), что соответствует “канторовой пыли” с $D \approx 0.954$. Арифметической моделью для слов (бесконечно большого количества слов) такого девятибуквенного “языка” служат все десятичные дроби между 0 и 1, в записи которых после запятой не встречается ни одного нуля (не считая нулей на концах конечных дробей)».

Поскольку обезьяний язык имеет фрактальную размерность, то он обладает и самоподобием. Действительно, если все слова этого языка умножить на 10 и отбросить целую часть или просто отбросить самую левую «букву» каждого слова, то получится еще один обезьяний язык. «Можно сказать, что слова такого рода языков растут на самоподобных деревьях: выберите любую ветвь, как бы высоко она ни росла и как бы ни мала была, и она окажется тождественной всему дереву. В этом особенно наглядно проявляется отличие обезьяньего языка от языков естественных: языки, на которых говорят и пишут живые люди, не растут на самоподобных деревьях, а если мы станем-таки настаивать на том, чтобы туда их повесить (Боже упаси!), то большинство ветвей окажутся мертвыми» [4, с. 68–69].

Альфред Лотка привел примеры обратно-степенных законов из области социологии. Один из них изложен в статье [5] и касается публикации научных статей в академических журналах. Смысл закона просто формулирует Э. Петерс в своей книге [6, с. 131]: «Чем больше статей опубликовал академик, тем более вероятна его публикация. Это происходит потому, что интенсивность публикаций подкрепляется учащимися студентами; большинство хорошо известных и старых членов академии могут быть соавторами, тем самым увеличивая свою продуктивность».

Золотое и серебряное сечения и гиперболический хаос

Итерация является одним из богатейших источников самоподобия. Если выбрано подходящее начальное значение, то повторное применение некоторой одной и той же операции – геометрической, арифметической или просто абстрактной, производимой над символами, почти неизбежно приводит к самоподобию. Возьмем в

качестве примера простое правило

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

При $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$ эта рекуррентная формула порождает хорошо известную последовательность чисел Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... «Что же в них самоподобного?» – спросите вы. Умножим каждое из чисел на 1.6 и округлим до ближайшего целого числа. В результате получим: 0, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., то есть за исключением нескольких первых членов (и, возможно, нескольких более поздних) ту же последовательность чисел Фибоначчи.

Рассмотрим числовую последовательность, образованную из отношений соседних чисел Фибоначчи при $F_1 = F_2 = 1$, то есть

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1}{1};\ \frac{2}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{8}{5};\ \frac{13}{8};\ \frac{21}{13}; ... \tag{4}$$

или

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1;\ 2;\ 1.5;\ 1.66;\ 1.6;\ 1.625;\ 1.61538;\ ...$$

К чему стремится эта последовательность, то есть к чему стремится последовательность F_{n+1}/F_n при $n \to \infty$? Для ответа на этот вопрос перепишем последовательность (4) иначе:

$$\frac{1}{1} = 1;\ \ \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1};\ \ \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}};\ \ \frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} ...,$$

то есть мы получаем, что это отношение можно представить в виде цепной дроби

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}.$$

Причем $\lim_{n\to\infty} (F_n/F_{n-1}) = (1 + \sqrt{5})/2 = \tau$, где τ – число Фидия, знаменитое золотое сечение. Как доказать это? Вспомним задачу из «Начал» Эвклида о делении отрезка в крайнем и среднем отношении. Суть задачи в следующем: разделить отрезок AB точкой C в таком отношении, чтобы большая часть отрезка CB так относилась к меньшей части AC, как отрезок AB к своей большей части CB (рис. 11), то есть $\mathrm{AB}/\mathrm{CB} = \mathrm{CB}/\mathrm{AC} = x$.

Рис. 11. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»)

Тогда имеем $\dfrac{\mathrm{AC} + \mathrm{CB}}{\mathrm{CB}} = \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}} = x = 1 + \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}}} = 1 + \dfrac{1}{x}.$

Откуда получаем $x^2 = x + 1$; уравнение имеет решение $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Приближенное значение золотой пропорции равно:

$$\tau \approx 1.6180339887498948482045868343656381177203...$$

В качестве удивительного примера золотого сечения рассмотрим следующую задачу.

Ускорение силы тяжести при удалении от земной поверхности описывается формулой $g_h = g_0 R^2/(R+h)^2$, где h – высота над поверхностью Земли, R – ее радиус, g_0 – ускорение силы тяжести на поверхности Земли. При опускании тела вглубь Земли выполняется зависимость $g_{-h} = g_0(1 - h/R)$. Когда $g_h = g_{-h}$? Элементарные преобразования показывают, что равенство выполняется при $R = h(\sqrt{5} + 1)/2$.

Если вместо x подставить в квадратное уравнение τ, то получим $\tau^2 = 1 + \tau$ или $\tau = 1 + 1/\tau$. Подставляя в правую часть последнего выражения его значение, придем к представлению τ в виде «многоэтажной» дроби

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\tau}}.$$

Продолжая такую подстановку в правой части бесконечное число раз, получим дробь с бесконечным количеством «этажей»

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}.$$

Таким образом, мы пришли к дроби F_n/F_{n-1} и тем самым доказали, что $\lim_{n\to\infty} F_n/F_{n-1} = \tau = (\sqrt{5} + 1)/2$.

На рис. 12 приведено изображение периодической непрерывной дроби для величины золотого сечения, из которого видно, что она геометрически самоподобна[4]. Заменив 1 в соотношении $\tau = 1/\tau$ на любое другое положительное число n, мы получим серебряные сечения τ_n, определяемые соотношением $\tau_n + n = 1/\tau_n$, которые также можно представить в виде цепных дробей.

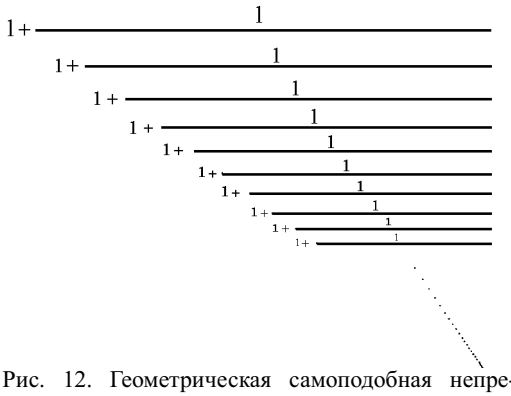


Рис. 12. Геометрическая самоподобная непрерывная дробь для величины золотого сечения [4, с. 88]

Цепная дробь для данного положительного иррационального числа $\alpha < 1$ вычисляется следующим образом: положим $x_0 = 1/\alpha$ и применим итерацию $x_{n+1} = 1/\langle x_n \rangle_1$, где угловые скобки $\langle\ \rangle_1$ с индексом 1 означают дробную часть числа, то есть «взятие остатка по модулю 1» (например, $\langle \pi \rangle_1 = 0.14...$). Тогда непре-

[4]Замечу, что Шредер называет золотым сечением и число $\gamma = (\sqrt{5} - 1)/2$, то есть число, обратное τ, приводя для γ рассуждения, аналогичные представленным выше.

рывная дробь для α запишется как $[\lfloor x_0 \rfloor, \lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \lfloor x_3 \rfloor ...]$, где скобки $\lfloor\ \rfloor$ означают округление до ближайшего целого числа, а $[x_0]$ – целую часть числа α. Так как все члены непрерывной дроби для α (за исключением первого) равны 1, число α является неподвижной точкой и итерация $x_{n+1} = 1/\langle x_n \rangle$, называется также гиперболическим отображением.

Проитерируем гиперболическое отображение, начиная с какого-либо серебряного сечения, на компьютере, производящем вычисления с любой конечной точностью. Результатом будет полнейший хаос.

Пример. Пусть начальным значением выбрано $(\sqrt{13} - 3)/2 = [3, 3, 3, ...] = 0.3027756...$ – серебряное сечение τ_3. Гиперболическое отображение, вычисленное с помощью микрокалькулятора, дает (запишем только первую цифру после запятой) восемь раз подряд 0.3, а затем 0.2; 0.8; 0.2; 0.6; 0.4; 0.0; 0.2 и т.д. – полностью непредсказуемая последовательность с хаотическим хвостом [4, с. 89].

Откуда берется здесь этот хаос? В исследуемом отображении имеет место чувствительность к начальным данным. Если начальные данные известны с погрешностью ε, то погрешность в x_n будет расти с ростом n экспоненциально.

О подобии в физике

В физике даже на элементарном уровне подобие существенно упрощает решение разных задач. Вот несколько примеров. Возьмем физическую систему с потенциальной энергией U, которая представляет собой однородную функцию степени k от пространственных координат r_m

$$U(\alpha r_1, \alpha r_2, ...) = \alpha^k U(r_1, r_2, ...).$$

Изменим все пространственные координаты в α раз, а время – в β раз. Тогда все скорости изменятся в α/β раз, а кинетическая энергия – в α^2/β^2 раз. Но, если коэффициент α^2/β^2 равен множителю α^k потенциальной энергии, то лагранжиан физической системы умножается на постоянный коэффициент α^k, и уравнения движения остаются неизменными. Траектории движения всех материальных точек («частиц») остаются подобными исходным траекториям, изменяются только масштабы. Временные интервалы вдоль новой траектории изменяются в $\beta = \alpha^{1-k/2}$ раз, значения энергии – в α^k раз, а угловые моменты – в $\alpha^{1+k/2}$, поскольку они имеют ту же размерность, что и квант действия Планка (энергия, умноженная на время).

Применим эти общие рассуждения к конкретным системам.

1. Начнем с линейного осциллятора, потенциальная энергия которого представляет однородную квадратичную функцию, то есть $k = 2$. Выясним, зависит ли период колебаний такой системы (математический маятник) от амплитуды малых колебаний. Мы не будем решать никаких уравнений. Выше получено, что время при изменении масштаба изменяется в $\alpha^{1-k/2}$ раз, то есть при $k = 2$ – в α^0 раз. Отсюда вывод: все значения времени, в том числе и период колебаний, остаются неизменными, то есть собственная частота линейного осциллятора не зависит от амплитуды. Линейный осциллятор обладает свойством изохронности. В квантовой механике этому соответствует эквидистантность уровней энергии – расстояние между двумя любыми уровнями энергии равно $h\nu$, где h – постоянная Планка, ν – частота.

2. Рассмотрим теперь нелинейный осциллятор с восстанавливающей силой, подчиняющейся кубическому закону, то есть с однородным потенциалом четвертой степени ($k = 4$). Нам не удастся в этом случае найти решение в элементарных функциях. Но подобие показывает нам, что время должно изменяться как $\alpha^{1-k/2} = \alpha^{-1}$, то есть частоты пропорциональны α. Чем больше энергия осциллятора, тем больше его резонансная частота, чего и следовало ожидать от пружины с возрастающей жесткостью. Точнее говоря, резонансная частота такого нелинейного осциллятора изменяется как корень четвертой степени из его энергии.

3. В однородном силовом поле потенциальная энергия является однородной линейной функцией пространственных координат, то есть $k = 1$, и значения времени изменяются как $\alpha^{1-k/2} = \alpha^{1/2}$. Это действительно так, в чем убедился Галилей, который, по легенде, для увеличения продолжительности свободного падения в два раза должен был взбираться по ступеням Пизанской башни на вчетверо большую высоту[5]. По легенде, Галилей заметил, что большие и маленькие камни, брошенные с Пизанской башни, падают с почти одинаковой скоростью. В действительности Галилей скатывал шары по наклонным плоскостям, но... легенда о падающей башне живет своей жизнью, и ей нет дела до исторических фактов. Если пренебречь аэродинамическим сопротивлением, то время падения t прямо пропорционально корню квадратному из высоты h и не зависит от массы камня $t \sim h^{1/2}$. На справедливость этого закона никак не влияет масштаб входящих в него величин – почти никак, потому что если хотя бы взобраться на высокую гору, то притяжение Земли станет меньше. Поэтому существует естественный предел, ограничивающий масштабную инвариантность или самоподобие галилеевского закона $t \sim h^{1/2}$, а именно – радиус Земли.

4. В законе ньютоновского притяжения потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию, то есть $k = -1$. Для круговых орбит вокруг массивного центра следует ожидать, что время будет изменяться как $\alpha^{1-k/2} = \alpha^{3/2}$. Мы переоткрыли с вами частный случай одного из основных законов небесной механики – третьего закона Кеплера о движении планет.

5. Более общие законы движения планет рассмотрел в своих «Началах» Исаак Ньютон, показав, что, если выполняется скейлинговое соотношение $\tau \sim r^n$, то для круговой орбиты радиусом r и периодом обращения τ гравитационный потенциал $U \sim r^{2-2n}$. Из нашего принципа подобия при $n = 3/2$ мы возвращаемся к закону $U \sim r^{-1}$, то есть к реальному миру падающих яблок и лун, движущихся по орбитам.

Великое озарение Ньютона состояло в том, что он увидел или понял: сила, с которой Земля притягивает яблоко, в $3600 = 60^2$ раз больше, чем сила, с которой Земля притягивает Луну, расположенную в 60 раз дальше от центра Земли. Благодаря этому озарению (а может быть, падению яблока), Ньютон вывел закон Всемирного тяготения, согласно которому сила гравитационного притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния. Забавно, что немецкое слово Einfall (озарение) произносится так же, как ein Fall (падение).

При $U \sim r^{-2}$ одна из возможных орбит имеет форму логарифмической спирали (в полярных координатах $r(\varphi) = r_0 e^{\gamma\varphi}$, где r_0 и $\gamma = \mathrm{const}$), то есть самоподобного

[5]Шредер считает, что это даже апокриф – произведение на библейскую тему, признаваемое недостоверным и отвергаемое церковью.

объекта. Применяя к радиусу-вектору, то есть к размеру спирали, преобразование подобия с коэффициентом S, получаем ту же спираль $Sr = r_0 e^{\kappa(\varphi + \ln S/\kappa)}$, повернутую на постоянный угол $(\ln S)/\kappa$. Угол φ определен только по модулю 2π, поэтому при коэффициентах подобия $S = e^{2\pi m\kappa}$, где m – целое число, бесконечная спираль остается инвариантной, то есть логарифмическая спираль самоподобна, причем коэффициент самоподобия $S = e^{2\pi|\kappa|}$. *Логарифмическая спираль оказывается самоподобной при любом вещественном коэффициенте подобия, если пренебречь вращением.*

Независимость от масштаба весьма желательна при проектировании приемно-передающих антенн широкого диапазона длин волн. При использовании круговых поляризованных волн поворот антенны на любой угол никак не отразится на коэффициентах усиления и направленного действия антенны. Если мы придадим антенне форму логарифмической спирали (хорошо бы из сверхпроводящей проволоки), то она одинаково хорошо будет работать на всех длинах волн в любом заданном диапазоне. Такие антенны существуют. Они похожи на конусообразные диванные пружины.

Природа тоже использует самоподобие логарифмической спирали. У многокамерного моллюска наутилуса каждая камера представляет собой увеличенную копию предшествующей, причем для любых смежных камер коэффициент подобия остается постоянным. Как следствие, наутилус растет по логарифмической спирали.

Мы увлеклись гладкой самоподобной кривой. Вернемся к преобразованиям подобия. Софус Ли (1842–1899), а позднее Джордж Дэвид Биркгоф (1884–1944) занялись поиском групп преобразований, которые оставляли бы инвариантными дифференциальные уравнения, а следовательно, и их решения, получившие название подобных (или инвариантно-групповых) решений. Предположим, что для решения $\varphi(x, y)$ существует следующий предел:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^a \varphi(\varepsilon^b x, \varepsilon^c y) = \phi(x, y). \tag{5}$$

Тогда подобное решение $\phi(x, y)$ подчиняется масштабному закону

$$\phi(x, y) = \lambda^a \phi(\lambda^b x, \lambda^c y),$$

который следует непосредственно из равенства (5) и, более того, является обобщением соотношения (5). К теории групп привел и алгебраический путь к симметрии (Лекция 2).

Однако преобразование подобия не всегда так просто, как было показано на некоторых примерах. Поглощение, трение и другие механизмы энергопотерь создают трудности при попытке их масштабировать. Проблемы возникают при проектировании концертных залов и оперных театров, в СВЧ электродинамике и в гидродинамике, хотя они решаемы.

Масштабирование в психологии

В психологии измерения фактически отсутствовали до тех пор, пока физиолог Э.Г. Вебер (1795–1878), брат физика Вильгельма Вебера (1804–1891), не провел тщательные исследования звуковых и тактильных ощущений, заложив основы науки об ощущениях. Закон Вебера звучит так: увеличение интенсивности раздражителя, необходимое для того, чтобы вызвать едва заметное усиление ощущения, не

является раз и навсегда заданной величиной, а зависит от отношения приращения интенсивности раздражителя к его первоначальной интенсивности. Позднее физик и философ Г.Т. Фехнер (1801–1887) переформулировал закон, который стал называться законом Вебера–Фехнера, и указал область его применимости. Фехнер заложил основы экспериментальной эстетики, исследуя, какие формы и размеры приятны глазу. Современным психологам удалось ввести в психологию измерения, почти столь же однозначные, как и в физике, появилась новая дисциплина – психофизика, а психоакустика и психовизуальные исследования стали ее разделами. Стивенс [7] ввел отношение масштабов для субъективных параметров (громкость, яркость и т.п.), а также установил простые степенные соотношения между этими субъективными параметрами и такими физическими величинами как поток энергии, интенсивность и т.п. В чем суть обнаруженного? Для того чтобы громкость звука возросла вдвое, его интенсивность I должна увеличиться в 10 раз. Это верно для большей части диапазона интенсивности звука, воспринимаемого человеческим ухом без болевых ощущений (диапазон охватывает более 12 порядков величины при средних звуковых частотах). Так как $\lg 2 \approx 0.3$, мы получаем следующий степенной закон для громкости как функции от интенсивности звука:

$$L \sim I^{0.3},$$

о чем мы уже упоминали в связи с тем, что степенной закон может иметь и дробную степень. Входящие в психофизические степенные ряды показатели, такие как число 0.3 в приведенном соотношении, не универсальны, но специфичны для исследуемого ощущения (например, для субъективной яркости, кажущегося веса груза или видимой длины) и детально проанализированы психофизиками. Таким образом, универсальность психофизике не присуща.

Самоподобие в музыке

Древние греки обнаружили, что деление струны на две равные части дает приятный для слуха музыкальный интервал, называемый ныне октавой. Соответствующее соотношение физических частот равно $2:1$. Другой приятно звучащий интервал – чистая квинта – с соотношением частот $3:2$. У пифагорейцев возник вопрос, можно ли получить целое число октав из одной лишь квинты путем повторного применения простого отношения частот $3:2$? Или иначе, можно ли найти решение уравнения

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$$

в целых числах m и n? Из теории чисел известно, что уравнение $3^n = 2^k$ не имеет решений в целых числах при $n > 0$. Древних греков сие не остановило, и они нашли хорошее приближенное решение

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7,$$

основанное почти на точном равенстве $3^{1/19}$ и $2^{1/12}$.

Систематический подход к получению таких почти точных равенств сводится к записи отношения логарифмов двух целых оснований данного уравнения в виде непрерывной дроби[6]:

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}.$$

Обрывая непрерывную дробь на пятом члене, мы получаем хорошее приближение для музыкальной квинты:

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx \frac{12}{19},$$

откуда следует, что $(3/2)^{12} \approx 2^7$.

Чтобы, скажем, на фортепьяно (или других инструментах с фиксированным наборов тонов) можно было играть в различных тональностях, частоты этих тональностей должны выбираться из одного и того же основного набора частот. Это подвигло Иоганна Себастьяна Баха разработать темперированный строй, основанный на полутоне $2^{1/12}$. Настроенный в соответствии с темперированной гаммой музыкальный инструмент имеет частоты, близкие к следующим кратным самого низкого тона:

$$1,\ 2^{1/12},\ 2^{2/12},\ 2^{3/12},\ 2^{4/12},\ 2^{5/12}\ldots$$

Эти частоты имеют самоподобную последовательность с коэффициентом подобия $2^{1/12}$. Если бы все эти ноты прозвучали одновременно, то инструмент создал бы акустических выход, близкий к самоподобной функции Вейерштрасса.

Джон Робинсон Пирс и замечательные соотношения между числами 3, 5 и 7

Джон Робинсон Пирс – один из великих инженеров-провидцев в области вакуумной СВЧ-электроники[7]. Им опубликовано большое число известных в науке книг и статей по фундаментальным вопросам СВЧ-электроники. Ему принадлежит также реализация нескольких проектов синхронных спутников Земли. Именно он придумал термин «транзистор». Он написал 22 научно-фантастических рассказа, несколько научно-популярных книг: «Почти все о волнах», «Электроны, волны, сообщения» (переведены на русский язык), «Волны и сигналы: наука коммуникаций», «Истоки спутниковых коммуникаций», «Наука о музыкальном звуке». В частности, он заинтересовался вопросом о том, нельзя ли заменить отношение частот октавы $2:1$ отношением частот $3:1$ (соответствующий интервал Пирс предложил назвать тритавой) и создать самоподобный (равнотемперированный) ряд с отношением частот, в

[6]Непрерывные дроби, как правило, дают хорошие рациональные аппроксимации иррациональных чисел, например, $\pi \approx 355/113$. Это приближение, использующее не очень большие целые числа, было известно еще древним китайцам.

[7]Впрочем, Шредер [4, с. 165] приписывает Пирсу фразу: «Природе отвратительны вакуумные лампы», сравнивая ее с высказанной в 1550 году Томасом Кранмером, архиепископом Кентеберийским, «природа не терпит пустоты» (Naturall reason abhorreth vacuum)

которых участвуют 5 и 7 [8]. Вопрос стоит так: существует ли корень целой степени N из числа 3 ($3^{1/N}$) – такой, что его целыми степенями хорошо аппроксимируются отношения $5/3$ и $7/5$ (по аналогии с аппроксимациями $3/2 \approx 2^{7/12}$ и $5/2 \approx 2^{9/12}$ хорошо темперированного строя Баха)? Раскладывая отношение $\ln 3/\ln 5$ в непрерывную дробь и оборвав ее на числе 6, получим

$$\frac{\ln 3}{\ln 5} \approx \frac{13}{19},$$

то есть $3^{1/13} \approx 5^{1/19}$. Это означает, что начальное отношение частот $3^{1/13} \approx 1.088$ представляет собой подходящий «полутон» для построения музыкального строя, который дает хорошее согласие, по модулю тритавы, с нотами, порождаемыми отношением частот $5:3$. В самом деле, $3^{6/13}$ совпадает с $5:3$ с точностью до 0.4%.

Разложение $\ln 3/\ln 7$ в непрерывную дробь дает аппроксимацию $3^{1/13} \approx 7^{1/23}$. Таким образом, число $3^{1/13}$ выступает как предпочтительный начальный интервал для построения хорошо темперированного строя Пирса. Разница между $7/3$ и одной из степеней основания $3^{1/13}$, а именно числом $3^{4/13}$ составляет всего 0.16%. Отношения частот снова образуют самоподобную последовательность

$$1,\ 3^{1/13},\ 3^{2/13},\ 3^{3/13}, \ldots$$

Говорят, что слушатели, тестировавшие музыкальный строй Пирса, упорно отдавали предпочтение сочинениям, написанным в традиционной манере.

Еще о степенных законах

Приведем еще несколько примеров того, как степенные законы с целыми и дробными показателями являются источниками самоподобия. Самоподобие имеет место для объектов, которые растут (например, города), и для объектов, разбитых на куски (раздробленные камни). Отсутствие у данного объекта (вида объектов) внутреннего масштаба – единственное необходимое условие для того, чтобы в некотором диапазоне размеров выполнялся степенной закон.

В космическом пространстве средняя частота, с которой различные виды межпланетных обломков врезаются в земную атмосферу, обратно пропорциональна квадрату диаметра падающего тела, причем данное соотношение выполняется в диапазоне, охватывающем более 10 порядков величины (рис. 13).

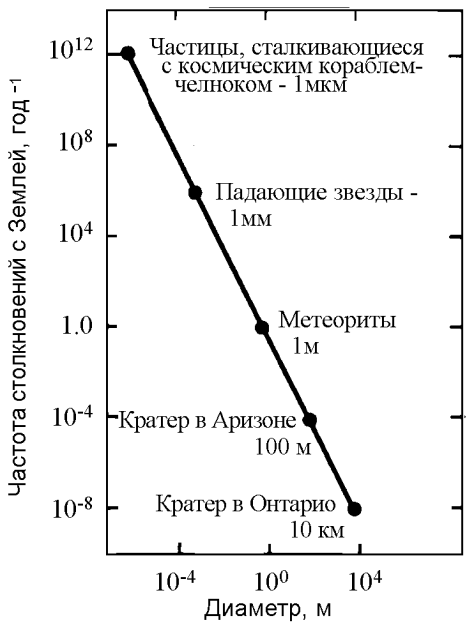


Рис. 13. Частота столкновений метеоритов с Землей как функция диаметра частиц [4, с. 152]

Луис Альварес (о нем шла речь в связи с борьбой с подводными лодками) и его сотрудники использовали рис.13 для подтверждения гипотезы Альвареса о внезапной гибели динозавров 65 миллионов лет назад. По Альваресу, причиной явилось падение гигантского метеорита, которое подняло в воздух огромное количество пыли, закрыв солнечный свет и тем самым лишив динозавров необходимой для выживания зелени. Нетрудно увидеть аналогию с моделью «ядерной зимы».

Говоря о динозаврах, интересно обратиться к рис. 14 [9], на котором представлено приблизительное распространение сухопутных животных в зависимости от длины тела животного. Из анализа следует степенной закон с показателем (-2), справедливый в диапазоне, охватывающем диапазон изменения длины от 1 мм до 10 м.

Масштабная инвариантность может даже помочь объяснить особенности нашего восприятия музыки. Музыкальное произведение, независимо от того, в каком ключе оно написано, будет приятным для слуха только в том случае, если в нем присутствуют изменения тональности во многих масштабах частот и изменения ритма хотя бы в нескольких временных масштабах. Иоганн Себастьян Бах в своих Бранденбургских концертах, не подозревая о том, использовал однородную степенную функцию

$$f(x) \approx cx^{-1},$$

которая, как упоминалось, называется гиперболическим законом.

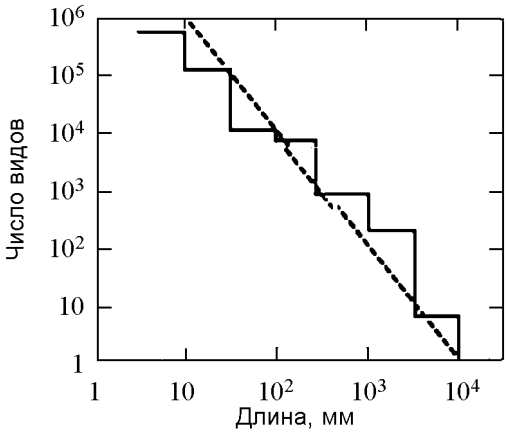


Рис. 14. Число видов сухопутных животных как функция длины их тела

Именно так может быть аппроксимирован спектр мощности $f(x)$ в довольно широком диапазоне (квадрат преобразования Фурье) относительных частотных интервалов x между последовательными нотами. Перепишем исходную функцию в виде

$$\ln f(x) = \mathrm{const} - \ln x,$$

где x измеряется в полутонах. Видно, что в двукратно логарифмической системе координат ($\ln f$ от $\ln x$) данные ложатся на прямую с наклоном $(-45°)$.

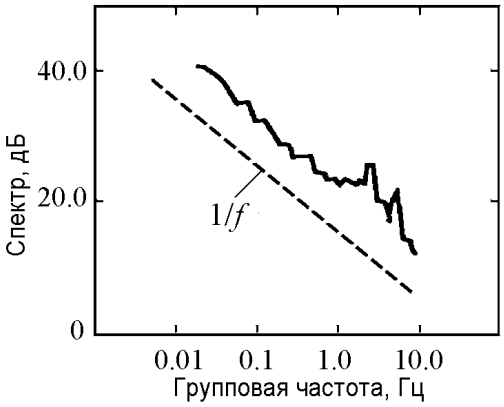


Рис. 15. Спектр вариаций амплитуды для Первого Бранденбургского концерта Баха [10]

Степенному закону подчиняется и спектр амплитуд (или мгновенных громкостей) музыки Баха. Причем показатель такой же, как в законе для спектра частотных интервалов (рис. 15).

Хочется задать вопрос: «Почему при сочинении музыки Бах использовал гиперболический степенной закон?». Но это некорректный вопрос. Бах стремился к тому, чтобы его музыка была интересна для слушателя. Правильнее спро-

сить: «Почему спектры частотных интервалов и амплитуд интересных музыкальных произведений (хотя бы некоторых) являются гиперболическими?».

На этот вопрос дает ответ, в какой-то мере, теория «эстетической ценности» Джорджа Дэвида Биркгофа (1884–1944). Суть теории в следующем: спектр мощности «эстетической» функции не должен вести себя ни как утомительно однообразный «коричневый» шум с зависимостью от частоты f^{-2}, ни как совершенно непредсказуемый белый шум с зависимостью f^0. На бытовой язык сказанное переводится так: произведение искусства приятно и интересно лишь при условии, что оно не слишком предсказуемо и правильно, и в то же время не таит в себе слишком много сюрпризов.

Показатели, встречающиеся в большинстве музыкальных произведений, находятся, как обнаружил Восс в цитируемой нами статье [10], посередине интервала $(0, -2)$, что дает гиперболический закон. Иллюстрация сказанного взята из книги Шредера и представлена на рис. 16 и 17 [4, с. 159 и 161].

Шредер [4, с. 158] приводит любопытное высказывание ван дер Поля о музыке Баха: «Это великая музыка, потому что она неотвратима (подразумевая $\alpha < 0$) и вместе с тем неожиданна $(\alpha > -2)$».

Поскольку спектр мощности любого шума, подчиняющегося однородному степенному закону (f^{α}), самоподобен, соответствующая временная диаграмма также

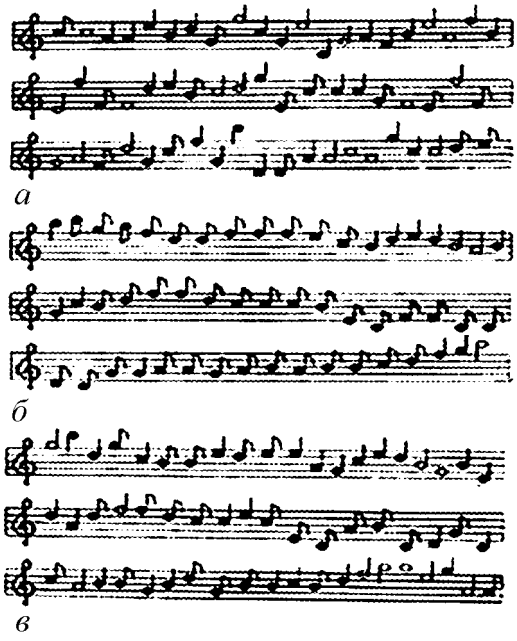


Рис. 16. *а* – «белая» музыка, составленная из независимых нот; *б* – «коричневая» музыка, составленная из нот с независимыми инкрементами по частоте; *в* – «розовая» музыка – частоты и продолжительность звучания нот определяются $1/f$-шумом (розовым шумом)

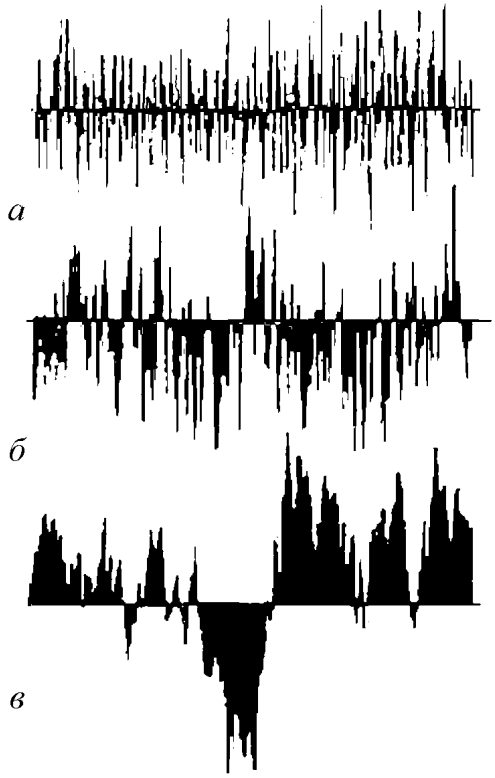


Рис. 17. Временные диаграммы шумов: *а* – белый шум с f^0-спектром мощности; *б* – «розовый» шум с $1/f$-спектром; *в* – «коричневый» шум с $1/f^2$-спектром

должна быть самоподобна. Разумеется, в случае шума самоподобие носит лишь статистический характер: увеличенный фрагмент не является точной детерминированной копией формы сигнала до изменения масштаба. Более того, для сохранения мощности при изменении масштаба частот амплитуды должны измениться в $r^{-\alpha/2}$ раз (r – коэффициент изменения масштаба). Поэтому, строго говоря, такие стохастические процессы самоаффинны, то есть имеют более одного масштабирующего множителя: r – для частот (или, что эквивалентно $1/r$ для значений времени) и $r^{-\alpha/2}$ – для амплитуд.

Наверное, мало кто отмечал, что соотношение неопределенностей Гейзенберга в квантовой механике

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar,$$

где q и p – две «канонически сопряженные» переменные, например, координата и импульс, а $\hbar$ – постоянная Планка, деленная на 2π, также является гиперболическим законом. Насколько известно, область применимости принципа неопределенности не ограничена. Как пишет Шредер [4, с. 163]: «Теории приходят и уходят, но “аш перечеркнутое” всегда остается с нами».

Коснемся еще таких самоподобных природных систем, как деревья, реки, артерии, легкие, для которых важны показатели при поперечных сечениях. Пусть ствол дерева имеет диаметр d, который разветвляется на две главные ветви с диаметрами d_1 и d_2. Вопрос: «существует ли некоторое устойчивое соотношение между этими диаметрами по мере того, как мы продвигаемся от ствола дерева ко все более тонким ветвям вплоть до черенков листьев?». Леонардо да Винчи считал, что для беспрепятственного движения соков вверх по дереву поперечные сечения двух главных ветвей в сумме должны быть равны поперечному сечению ствола, то есть $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ [11, с. 224–225]. Его гипотеза ныне воплощена в трубчатой модели дерева [12]. Эта модель опирается на идеализированное представление о том, как сок поступает от корней дерева к листьям по многочисленным неветвящимся сосудам («трубкам»), занимающим определенную долю сечения каждой ветви. Такое же соотношение, а именно

$$d^\Delta = d_1^\Delta + d_2^\Delta, \tag{6}$$

где $\Delta = 2$, выполняется в месте слияния двух рек (d_1, d_2, d – ширина рек). Установлено, что ширина d реки пропорциональна корню из количества воды Q, переносимого рекой: $d \sim Q^{0.5}$. Однако глубина реки t, как правило, изменяется в соответствии с законом $t \sim Q^{0.4}$. Возникающая разница восполняется за счет увеличения скорости течения v, которая пропорциональна $Q^{0.1}$. Таким образом, река, образовавшаяся от слияния двух притоков одинаковой величины и несущая, следовательно, вдвое больший объем воды в секунду, обычно в 1.4 раза шире каждого из своих притоков, но лишь в 1.3 раза глубже их. Скорость же течения реки приблизительно в 1.1 раза больше, чем скорость течения притоков. Произведение $1.1 \cdot 1.3 \cdot 1.4 \approx 2$, поскольку вода при слиянии никуда не теряется и ниоткуда не добавляется. Поскольку, в отличие от рек, сливающиеся или разветвляющиеся дороги не имеют глубины, для них показатель Δ в соотношении (6) равен 1 при условии, что количество машин, проезжающих по одной полосе за минуту, одинаково для всех дорог. Иными словами, полосы движения играют ту же роль, что и сосуды с древесными соками в трубчатой модели деревьев.

В диапазоне, охватывающем примерно 20 бифуркаций от сердца до капиллярных сосудов, артерии и вены в сосудистой системе млекопитающих удовлетворяют степенному закону (6) с $\Delta \approx 2.7$. Поскольку необходимо, чтобы артерии и вены доходили до каждой точки тела для обеспечения питания или избавления от отходов, эта величина Δ вполне разумна. Идеальное значение $\Delta = 3$ недостижимо, ибо в этом случае сосудистая система заполнит все пространство, оставив слишком мало места для других задач. Бронхи легкого имеют показатель подобия, очень близкий к $\Delta = 3$ (такое значение имеет фрактал, заполняющий трехмерное пространство). Как показано в статье [13], на протяжении 15 бифуркаций бронхиальное дерево остается почти самоподобным (рис. 18).

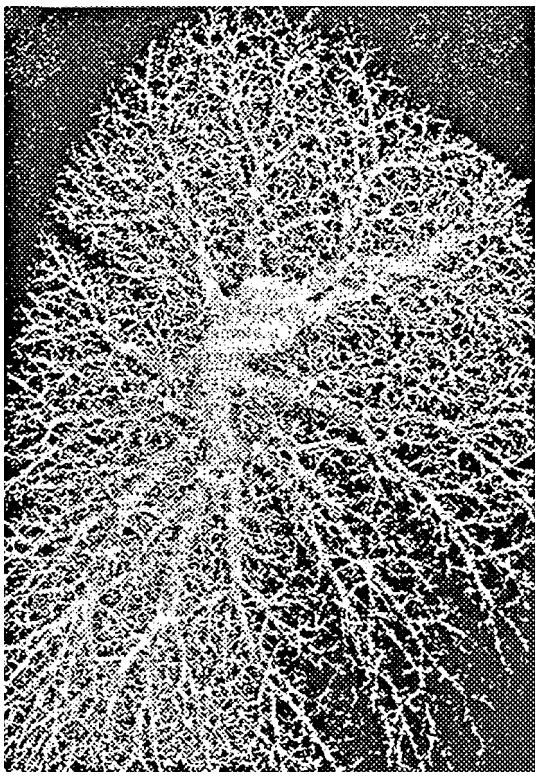


Рис. 18. Самоподобное бронхиальное дерево (рис. 6 из главы 4 книги [4])

Если предположить, что геометрия бронхиального дерева определяется требованием минимального сопротивления потоку воздуха во всей бронхиальной системе, то $d/d_1 = d/d_2 = 2^{1/3}$, то есть существует постоянный коэффициент ветвления [14]. Тогда из соотношения (6) находим, что $\Delta = 3$. Мандельброт [11, с. 226–227] дает иное объяснение заполнения бронхами трехмерного пространства, не требующее внесения коэффициентов ветвления $d/d_1 = d/d_2 = 2^{1/3}$ в генетический код. Он пишет: «Мы будем опираться на тот фундаментальный факт, что внутриутробный рост легкого начинается с почки, из которой вырастает трубка, на которой, в свою очередь, образуются две новые почки, каждая из которых ведет себя вышеописанным образом. Помимо всего прочего, такой рост самоподобен (а ствол легкого образует остаток!)... Ветви нашего дерева образуют стандартное множество: его размерность и в топологическом, и во фрактальном смысле равна эвклидовой. Если оболочка каждой ветви является гладкой, то размерность всей оболочки равны показателю Δ» [11, с. 227–228]. Получается, что эмпирически наблюдаемое самоподобие (рис. 18) достигается не потому, что самоподобная структура оптимальна, а потому, что оно следует кратчайшей программе управления: каждая стадия повторяет предыдущую, но в меньшем масштабе. Таким образом, геометрия легких полностью определяется двумя параметрами: отношением ширина/длина ветвей бронхов и показателем при диаметре Δ. То, что $\Delta \approx 3$, получается из-за того, что большое число бифуркаций должно заполнить почти все пространство, не вытесняя друг друга.

В лекции 2 мы рассмотрим другой путь к симметрии в контексте истории нахождения решений алгебраических уравнений.

Библиографический список

1. *Баренблат Г.И.* Автомодельные явления – анализ размерностей и скэйлинг. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009. 216 с.
2. *Вейль Г.* Симметрия. М.: Изд-во «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 191 с.
3. *Стюарт Иэн.* Истина и красота. Всемирная истории симметрии. М.: Изд-во Астрель: CORPUS, 2010. 461 с.
4. *Шредер М.* Фракталы, хаос и степенные законы. Москва; Ижевск: РХД, 2001. 528 с.
5. *Lotka A.J.* The frequency distribution of scientific productivity // Journal of the Washington Academy of Sciences. 1926. 16.
6. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. М.: Мир, 2000. 334.
7. *Stevens S.S.* On predicting exponent for cross-modality matches // Percep. Psychophys. 1969. Vol. 6. P. 251.
8. *Mathes M.V., Pierce J.R., Reeves A., Roberts L.* Theoretical and experimental exploration of Bohlen–Pierce scale // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. Vol. 84. P. 1214.
9. *May P.M.* How many species are there on earth? // Science. 1988. Vol. 214. P. 1441.
10. *Voss R.F., Clark J.* $1/f$ noise in music: Music from $1/f$ noise // J. Acoust. Soc. American. 1978. Vol. 63. P. 258.
11. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
12. *Zimmerman M.N.* Hydraulic architecture of some diffuse-porous trees // Can. J. Botany. 1978. Vol. 56. P. 2286.
13. *Comroe J.H.* The Lung// Scientific American. February. 1966. Vol. 214. P. 56.
14. *Wilson T.A.* Design of the bronchial tree // Nature. 1967. Vol. 213. P. 668.

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 25.01.2013

Лекция 2. Алгебраический путь к симметрии

Естественный вопрос – как связаны поиск решений алгебраических уравнений и понятие симметрии? Иэн Стюарт [1, с. 13] отвечает на него так: «Причина в том, что в качестве доминирующей идеи симметрия появилась не так, как можно было бы ожидать, – то есть не через геометрию. Вместо этого глубинно прекрасная и жизненно необходимая концепция симметрии, которой сегодня пользуются математики и физики, пришла к нам из алгебры». Заметим, что создатели алгебраического пути к симметрии были яркими, часто необычными людьми, поэтому в лекции могло быть и более броское название «Герои и злодеи в истории решения алгебраических уравнений». Погрузимся в мир поиска решений алгебраических уравнений, начав с древности.

Глиняные клинописные таблички вавилонян

О культуре жителей Вавилона известно очень много. Археологам повезло из-за того, что вавилоняне делали записи на влажной глине клинописью – своеобразным клинообразным шрифтом. Надписи становились практически неуничтожимыми, когда глина затвердевала. Пожар не уничтожал таблички, а превращал их в керамику,

которая могла сохраняться еще дольше. Пески пустыни помогали сохранять написанное сколь угодно долго.

Приведем далее важное замечание Стюарта [1, с. 24–25]. «Таким образом Вавилон и стал тем местом, с которого начинается письменная история. Там же берет свое начало и история понимания человечеством симметрии – и её воплощения в систематическую и количественную теорию, исчисление “симметрии”, ни в чем не уступающее по своей мощи дифференциальному и интегральному исчислению, созданному Исааком Ньютоном и Готфридом Вильгельмом Лейбницем. Без сомнения, его истоки можно было бы проследить еще дальше вглубь веков, если бы у нас нашлась машина времени или хотя бы еще немного больше глиняных табличек. Но, как нам сообщает письменная история, именно вавилонские математики направили человечество на путь познания симметрии, что в свою очередь радикально повлияло на наше восприятие физического мира».

Вавилоняне использовали шестидесятиричную систему счисления, они знали о прямоугольных треугольниках и использовали математику, как бы сейчас сказали, для фундаментальных исследований – для астрономии, для сельскохозяйственных и религиозных нужд, а также для прикладных целей – задач торговли и сбора налогов.

Самое важное достижение вавилонских математиков – начало понимания того, как решать алгебраические уравнения. Им была известна некоторая стандартная процедура для решения таких уравнений.

Востоковед Отто Нейгенбауэр в 1930 году (а первые раскопки были в 1811 году) понял, что на одной из табличек написано квадратное уравнение: уравнение, которое содержит неизвестное и его квадрат, перемешанные с различными конкретными числами. Не исключено, что вавилоняне знали и какие-либо хитрые способы решения кубических уравнений с помощью численных таблиц[1].

Стюарт [1, с. 39] приводит задачу о решении квадратного уравнения, которой около 4000 лет.

«Найти сторону квадрата, если площадь минус сторона составляет 14.30». На той же табличке приводится и решение. «Возьми половину от 1, что есть 0;30. Умножь 0;30 на 0;30 что даст 0;15. Прибавь это к 14.30 и получишь 14.30;15. Это квадрат числа 29;30. Теперь прибавь 0;30 к 29;30. Результат равен 30 – стороне квадрата».

В современных обозначениях решение выглядит так.

Возьми половину от 1, что есть 0;30	$\frac{1}{2}$
Умножь 0;30 на 0;30, что даст 0;15	$\frac{1}{4}$
Прибавь это к 14.30 и получишь 14.30;15	$870\frac{1}{4}$
Это квадрат числа 29;30	$870\frac{1}{4} = 29\frac{1}{2} \cdot 29\frac{1}{2}$
Теперь прибавь 0;30 к 29;30	$29\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
Результат равен стороне квадрата 30	30.

[1]Кстати, вавилонские математики знали и умели вычислять с высокой точностью значение $\sqrt{2}$. Оно вычислялось так:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.4142129.$$

Поскольку $\sqrt{2} = 1.4142135$, то разница составляет около шести миллионных.

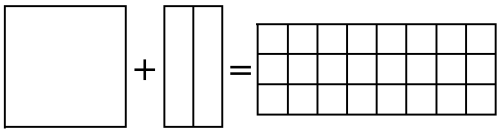


Рис. 1. Геометрическое представление квадратного уравнения

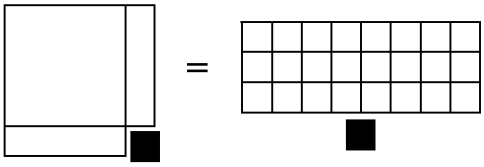


Рис. 2. Дополнение квадрата

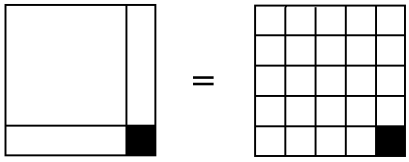


Рис. 3. Окончательный вариант геометрического решения: неизвестное плюс 1 при возведении в квадрат дает квадрат числа 5

Как додумались вавилоняне до решения? Стюарт [1, с. 40–41] считает, что они могли рассуждать геометрически, и демонстрирует ход решения на примере более простой задачи, чем предыдущая.

«Найти сторону квадрата, если площадь плюс две стороны равна 24».

На современном языке – нужно решить уравнение $x^2+2x-24=0$. Задачу можно представить себе как показано на рис. 1. Вертикальный размер и квадрата и прямоугольника слева соответствует неизвестному, а малые квадраты имеют единичный размер. Разобьем высокий прямоугольник пополам и приклеим два полученных куска к квадрату.

Получится фигура в виде квадрата с одним недостающим углом. Дополним квадрат путем добавления к обеим частям уравнения недостающего угла (рис. 2). Получился квадрат слева и 25 единичных квадратов справа, которые мы соберем в квадрат 5×5 (рис. 3)[2]. Неизвестное равно 4.

Итак, вавилонский писец сообщал нам, что решение квадратного уравнения $x^2 - ax = b$ есть

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

Отрицательных чисел еще не знали.

Гияс аль-Дин Абуль-файх Омар ибн аль-Нишапури аль-Хайями (Омар Хайям) и кубические уравнения

Кто не помнит знаменитые рубаи Омара Хайяма? Вот одно из них:

Кто мы? Куклы на нитках, а кукольщик наш – небосвод.
Он в большом балагане своём представленье ведёт.
Он сейчас на ковре бытия нас попрыгать заставит,
А потом в свой сундук одного за другим уберёт.

Однако кто знает его математические работы, посвященные, в частности, теории уравнений третьей степени с использованием конических сечений? Напомню, что коническими они называются потому, что их можно получить, пересекая плоскостью двойной конус, который похож на два рожка мороженого, соединённые своими острыми концами. Существует три основных типа конических сечений (рис. 4).

[2]К сожалению, некоторые сегодняшние школьники и даже студенты движутся назад, в Вавилон. На просьбу написать a^2+b^2 («a» в квадрате + «b» в квадрате) можно получить запись $\boxed{a}+\boxed{b}$.

• *Эллипс* возникает, когда секущая плоскость проходит через одну половину двойного конуса (окружность получается, если плоскость перпендикулярна оси конуса).

• *Гипербола* возникает, когда секущая плоскость проходит через обе половины двойного конуса.

• *Парабола* получается, когда секущая плоскость параллельна какой-либо из кривых, лежащих на поверхности конуса.

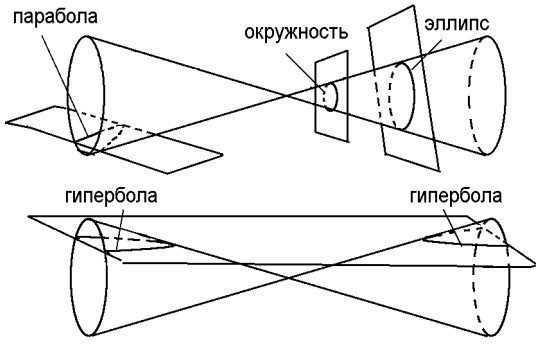


Рис. 4. Конические сечения

Пользуясь коническими сечениями, Омар Хайям получил геометрические решения для четырнадцати типов различных кубических уравнений в зависимости от того, какие слагаемые появляются в каждой части уравнения. Например: куб = = квадрат+сторона+число; куб+число = =квадрат + сторона и т.д.

Как же он решал уравнения? Чтобы понять это, остановимся на случае «куб + сторона + число = квадрат». В наших обозначениях это значит

$$x^3 + bx + c = ax^2.$$

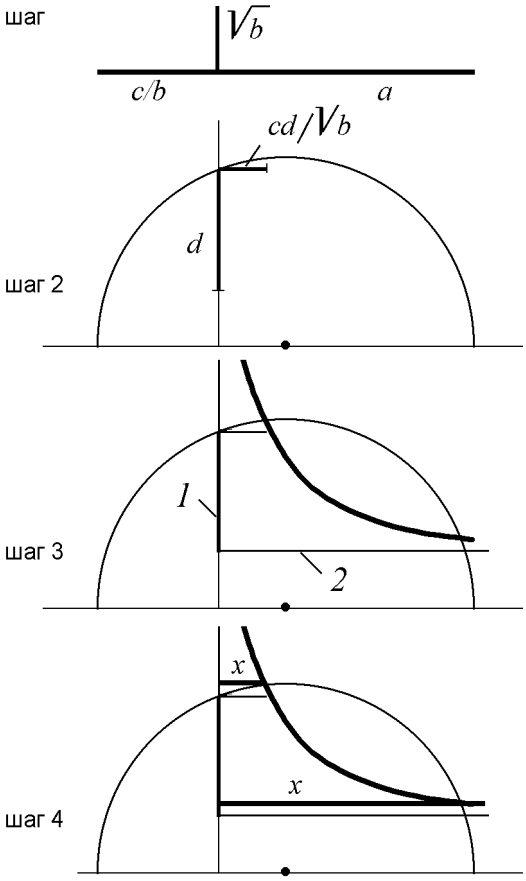


Рис. 5. Решение кубического уравнения, данное Омаром Хайямом

Вот инструкция последовательности шагов (рис. 5), которую Омар Хайям даёт читателям своей книги «Алгебра» (он окончил её в 1079 году).

1. Проводим три отрезка с длинами c/b, $\sqrt{b}$ и a так, чтобы образовался прямой угол.

2. Проводим полуокружность, диаметр которой – горизонтальный отрезок. Продолжаем вертикальную прямую до пересечения с ней. Если жирный вертикальный отрезок имеет длину d, добиваемся того, чтобы отрезок жирной горизонтальной прямой имел длину $cd/\sqrt{b}$.

3. Проводим гиперболу, асимптоты которой – прямые *1* и *2*.

4. Находим, где гипербола пересекает полуокружность. Тогда длины двух жирных отрезков x есть два положительных решения кубического уравнения.

Слово Стюарту [1, с. 78].

«Подробности, как всегда, не так важны, как общий стиль. Выполняем ряд эвклидовых построений циркулем и линейкой, потом прибегаем к помощи гиперболы, потом ещё

немного эвклидовых построений – и готово. Аналогичное решение дает Омар Хайям для всех своих четырнадцати случаев и доказывает, что решение правильное».

Отрицательных чисел, как уже указывалось, в математике ещё не было, поэтому уравнения каждый раз надо было сочинять так, чтобы все слагаемые были положительными. До Омара Хайяма не было метода решения уравнений: каждое требовало отдельного исследования. Он писал так: «Я же, напротив, никогда не ослабевал в своем желании сделать известными, притом со всей точностью, все возможные случаи и в каждом из них провести различие между возможным и невозможным» (под «невозможным» он понимал отсутствие положительного решения; цит. по [1, с. 77]).

Тарталья, Кардано, Феррари и... опять кубическое уравнение [2, 3]

Первая фигура в этой миниатюре – Никколо Фонтана по прозвищу Тарталья-заика (1500–1557)[3]. Родился он в бедной итальянской семье, отец его умер рано, оставив жену с тремя детьми. В 1506 году родной город Никколо Брешию захватили французские войска, устроив кровавую бойню. Людей не спасли даже стены храма, где они пытались укрыться от расправы. Никколо чудом остался жив, но был ранен. Ему повредили горло, рассекли язык, поэтому он с трудом произносил слова. Отсюда и прозвище «Тарталья-заика». Мать не могла платить за учебу, поэтому в школе Никколо проучился лишь 15 дней. Благодаря терпению и настойчивости, мальчик научился читать. Легенда гласит, что, поскольку денег на бумагу не было, он каждый день ходил на кладбище и писал упражнения и задачи углём на мраморных надгробиях. В математике Тарталья самостоятельно добился небывалых успехов, став выдающимся математиком своего времени. Он преподавал в Вероне, Брешии и Венеции, написал несколько книг. Главная из них под названием «Общие исследования чисел и мер» была издана в 1556 году в Венеции. Драматические события в жизни Тартальи связаны с тем, что он и ещё один итальянский математик дель Ферро открыли способ нахождения корней кубического уравнения. В чём драматизм ситуации?

Начиная с XII века в Европе возобновились математические турниры, заменившие кровавые рыцарские. Инициатором интеллектуальных турниров стал император «Священной римской империи Германской нации» Фридрих II Гогенштауфен. Но, если во времена Эвклида в Александрии ученики соревновались за первенство в глазах Эвклида, то теперь они боролись за должность при дворе[4]. Ожесточённая борьба разгорелась между двумя лучшими итальянскими математиками XVI века Никколо Тартальей и Джироламо Кардано. И хотя они добивались признания разными путями, в истории математики их имена не разделить: есть алгоритм Кардано–Тартальи.

Поэтому вторая фигура в нашем рассказе – Джироламо (Джероламо, Иероним) Кардано (1501(?)–1576), также известный как Жером Кардан. О Джироламо Карда-

[3]Истинная фамилия Тартальи неизвестна. Не исключено, что он и сам не знал её. На своем завещании он подписался Фонтана, хотя своего отца называл Микелетто.

[4]В одном из таких турниров победил Леонардо Пизанский или Фибоначчи (filius Bonacci – сын Боначчи). Он победил придворного математика и секретаря короля, решив все три предложенные сложные алгебраические задачи, в то время как его соперник не решил ни одной. Его именем назван числовой ряд – ряд Фибоначчи, описывающий решение задачи о размножении кроликов.

но известно много, поскольку в 1575 году он сам рассказал о себе в «Книге моей жизни». В этой книге он перечисляет написанные им книги, выделяя математический тракт «Великое искусство» с подзаголовком «Правила алгебры». В трактате Кардано написано и о физике, и об астрономии, о вопросах морали, о драгоценных камнях, воде, медицине, теологических предсказаниях. В его книге собраны методы решения квадратных уравнений, известные, как вы помните, ещё вавилонянам, но приведены решения кубических уравнений и уравнений четвёртой степени, которые, в отличие от решений Хайяма, были алгебраическими. Подробности его биографии можно найти в книге [3]. Наш герой был побочным сыном миланского юриста Фацио Кардано и молодой вдовы Кьяры Микериа, у которой было ещё трое детей от первого брака. Родился он предположительно в 1501 году в городе Павии, входившем в Миланское герцогство. Когда эпидемия чумы приблизилась к Милану, беременную Кьяру убедили уехать в деревню. Там и родился Джироламо, в то время как старшие его сводные братья, оставленные в городе, умерли от чумы. Отец Джироламо был образованным человеком и учил своего незаконного сына математике и астрологии[5]. Стюарт [1, с. 89] приводил следующий отрывок из биографической книги Кардано.

«В раннем детстве отец обучил меня основам арифметики, и примерно тогда же он приобщил меня к таинствам; откуда он приобрёл эти познания, мне неизвестно. Вскоре он обучил меня началам арабской астрологии... а когда мне исполнилось двенадцать, он преподал мне первые шесть книг Эвклида».

Он начал изучать медицину в Павии, а затем в Падуе. Видимо он был одним из лучших студентов, и впоследствии, когда отец умер, Джироламо был избран с перевесом в один голос ректором университета. Впрочем, многие его не любили за склонность к резким высказываниям. Это, в частности, привело к тому, что его долго не принимали в коллегию врачей, хотя репутация его была высока. Карьера Кардано развивалась по нескольким направлениям: известного врача и литератора, авторитетного математика, плодовитого учёного. Но Джироламо растратил по пустякам полученное им наследство и бросился в омут авантюр и азартных игр. О себе он писал: «...насколько сильно меня привлекали излишества шахматной доски и игорного стола, настолько же я знаю, что в глазах людей я заслуживаю самого сурового порицания. Я играл и в то, и в другое многие годы – в шахматы более сорока лет, а в кости – около двадцати пяти; и не только каждый год, но – сознаюсь со стыдом – каждый день, теряя при этом всё – мысль, состояние, время» (цит. по [1, с. 90]).

Его биография подобна авантюрному роману. Он неосторожно высказывался о религии и составил гороскоп Иисуса Христа. Все это инквизиция расценила как святотатство, и Кардано чуть было не угодил в тюрьму. Спасли его заступничество влиятельных людей, которых он успешно лечил, мировая слава учёного и немалый денежный залог. Приоритет в открытии формулы для нахождения корней кубического уравнения – предмет серьёзного столкновения между Кардано и Тартальей.

Тарталья был впереди: ему удалось решить широкий класс кубических уравнений. Кардано долго добивался, чтобы Тарталья открыл ему секрет решения, дав в 1539 году клятву не раскрывать его. Тарталья поверил ему и сообщил Кардано в

[5]Фацио Кардано преподавал геометрию в университете в Павии и в благотворительном учреждении Пьятти в Милане и даже консультировал по геометрии Леонардо да Винчи.

стихотворной форме правило нахождения корней кубического уравнения. Строчки относятся к уравнению $x^3 = qx + r$.

Когда куб рядом с вещью
Вместе равны какому-либо числу,
То найди два других числа.
На него разнящихся,
Потом допусти и всегда держись
этого правила, что их произведение
Должно равняться кубу трети вещи.
Возьми от них стороны кубов
И правильно вычти их.
Остаток даст тебе искомую вещь.
(цит. по [3, с. 149])

В книге [3] дано следующее объяснение стихотворного алгоритма. «Куб рядом с вещью» – это $x^3 + qx$; «число» – это r; «на него разнящихся» означает $u - v = r$; произведение, равное «кубу трети вещи» – это $u\mathrm{v} = (q/3)^3$; «возьми от них стороны куба» – то есть $\sqrt[3]{u}$ и $\sqrt[3]{\mathrm{v}}$, «правильно вычти их» значит $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{\mathrm{v}}$; «остаток» или «искомая вещь» – это, разумеется, x.

Но через 6 лет в книге Кардано «Великое искусство» Тарталья находит полное изложение своего решения. Конечно, он был взбешён и написал Кардано: «Вы вероломно украли у меня самое лучшее моё украшение...». Возможно, два великих математика и не боролись бы друг с другом, если бы не было известного профессора Болонского университета Сципиона дель Ферро. Именно он первым нашёл корни кубического уравнения определенного вида и перед смертью поделился решением со своим учеником Антонио Фиоре, которого, по словам современников, интересовала совсем не наука, а больше дочь профессора. Однако Фиоре, получив столько неожиданный подарок, решает снискать славу первого математика и вызывает на состязание самого Тарталью в конце 1534 года. Тарталья знал, что Фиоре владеет секретом, подаренным его учителем. За 10 дней, оставшихся до состязания, Тарталья сумел найти решения для всех неисследованных Фиоре уравнений.

Состязание состоялось 12 февраля 1535 года, когда соперники через нотариуса предложили друг другу по 30 задач. Фиоре не решил ни одной задачи, предложенные Тартальей, а тот решил за два часа все задачи противника. Фиоре надеялся победить соперника кубическими уравнениями, но для Тартальи их решение не составляло труда. Тарталья же задал вопросы Фиоре по всему курсу математики. И, как пишет В. Кессельман [2, с. 73], «...университетское образование явно уступило кладбищенскому». Победа была сокрушительной и известие о ней и об открытии Тартальи быстро разнеслось по всей Италии[6]. И вот здесь на сцену выходит Кардано с навязчивой идеей узнать тайну Тартальи. Как уже было сказано, в 1539 году он узнает секрет, дав клятву не разглашать его. В Болонье в 1542 году Кардано знакомится с рукописями покойного профессора дель Ферро. Теперь он понял все и, нарушив клятву, через шесть лет публикует тайный алгоритм. Справедливости ради надо заметить, что Кардано ссылался на Тарталью.

«В наши дни Шипионе[7] дель Ферро из Болоньи решил случай куба и первой

[6]Проигравший в соревновании по условиям оплачивал обед победителю и его 29 друзьям. Кроме того, он платил по сольди за каждую решенную задачу.

[7]В традиционном переводе – Сципион.

степени, равных постоянной, – очень изящное и достойное восхищения достижение... Состязаясь с ним, мой друг Никколо Тарталья из Брешии ... решил тот же случай, когда участвовал в поединке с его (дель Ферро) учеником Антонио Марио Фиором, и подвигнутый к тому множественными мольбами, передал решение мне» (цит. по [1, с. 92]).

Досаду Тартальи легко понять: люди будут помнить книги, а не истинного открывателя решения, к тому же в Европе того времени математические секреты могли стоить больших денег.

В книге Кардано содержалось и алгебраическое решение уравнений четвертой степени, которое было найдено учеником Кардано – Лудовико Феррари (1522–1565).

Через год Тарталья выпустил книгу «Проблемы и различные изобретения», в которой обрушился на Кардано в весьма жестких выражениях. Кардано молчал. Тогда за честь Кардано вступился его ученик Феррари, наговорив Тарталье гадостей и вызвав на состязание по все наукам от математики до астрологии. Главным и обязательным условием состязания было место его проведения – Милан – город, где родился Феррари. Тарталья, надеясь на честные правила соревнования, согласился ехать в Милан. Он чувствовал себя правым в споре с Кардано и не сомневался в своих познаниях. В церкви Святой Марии в Милане 10 августа 1548 года в 6 часов вечера посмотреть на математическую дуэль собралось множество людей из разных слоев общества. Здесь были горожане, военные, представители знати, преподаватели и студенты университетов, огромная толпа друзей Лудовико Феррари, которого называли «человеком с лицом ангела и сердцем дьявола». С Никколо Тарталья был только его родной брат. Кардано – главная фигура в споре, зная о соревновании, уехал из Милана.

Честным поединок не назовешь: Тарталью оскорбляли, не давали говорить, Феррари тянул дело к ночи длинными речами. Тарталья понял настроения толпы, прекратил соревнования и покинул Милан. Он опасался, что ближе к ночи диспут может быть закончен ударом кинжала наёмного убийцы.

Феррари счел себя победителем, а Тарталью в Брешии посчитали неудачником, отказали в работе, не заплатили за уже прочитанные лекции. Он прожил в бедности до самой смерти и никогда не утверждал, что выиграл дебаты. Напротив, Феррари приписанная им самим себе победа принесла славу: ему предлагали читать лекции в лучших университетах, обучать сына императора. Он выбрал пост руководителя налогового управления при правителе Милана и стал вскоре очень богатым; в Болонье он возглавил кафедру математики. По легенде, он был в 43 года отравлен родной сестрой.

Последний поворот сюжета связан с трагедией Кардано. Процитируем здесь В. Кессельмана [2, с. 75], который так пишет о злоключениях Джироламо Кардано. «Его старший сын Джамбаттиста втайне женился на девушке сомнительной репутации и дурного характера, которая всюду заявляла, что вышла замуж по расчету. Однажды в пылу гнева она назвала имена настоящих отцов их детей. Молодой муж не мог перенести такого позора. У аптекаря он раздобыл яд и уговорил слугу подсыпать его в праздничный торт, пообещав за это денег и одежду. Торт был испечен, жена – отравлена. Но убийц быстро нашли, и Джамбаттиста был “казнен отсечением головы”. Смерть сына потрясла Кардано, он был близок к невменяемости. Как безумный, целыми днями он носился на коне по полям, ночами играл в азартные игры, пытался заглушить душевные страдания физической болью и голодом. Не успев отойти от первого потрясения, Кардано узнает, что его второй сын стал бродягой и вором. Кардано пытался остановить сына; однажды

во время ссоры он отрубил ему ухо (так поступил человек, написавший десятки книг о методах гуманного воспитания и лечения!). В ответ сын ограбил отца, и Кардано обратился к властям за помощью. Через неделю сын снова грозится поджечь дом и убить отца. Альдо арестовали, судили и приговорили к пожизненному заключению, но Кардано добился смягчения: сын был осужден на изгнание из родного города Болонья. Кардано покончил жизнь самоубийством».

В его автобиографической «Книге моей жизни» есть такие слова: «Сознаюсь, что в математике кое-что, но в самом деле ничтожное количество, я заимствовал у брата Никколо». Похоже, что его все-таки мучила совесть.

Чтобы оценить, чего же достигли Тарталья, Кардано и Феррари, вернемся к вавилонским табличкам, объясняющим, как решать квадратные уравнения. Напомним, что их рецепт для уравнения $x^2 - ax = b$ есть $x = a/2 + \sqrt{(a/2)^2 + b}$.

Решение кубического уравнения $x^3 + ax = b$ выглядит во времена Тартальи и Кардано (и сегодня) посложнее и имеет следующий вид:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}.$$

В который раз отметим, что не было отрицательных корней и тем более комплексных[8].

Наконец, алгоритм Феррари для уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

состоит в том, что при $a = 1$ его корни совпадают с корнями двух квадратных уравнений:

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0,$$

где $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$, а y – какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0.$$

Алгоритм Феррари был математической вершиной книги Кардано. Слово Стюарту [1, с. 104]. «“Великое искусство” не содержит решения квинтики – уравнения, в котором неизвестное получается в пятой степени. Но ведь по мере возрастания степени уравнения метод его решения в свою очередь усложнялся, так что мало кто сомневался, что, применив достаточную изобретательность, можно будет решить и уравнение пятой степени – скорее всего, потребуется использовать корни пятой степени, так что соответствующая формула окажется весьма громоздкой».

Оказалось, что это не так. И доказал это Нильс Хенрик Абель – норвежский математик, о котором его коллега Карл Густав Якоби написал: «Он ушел от нас, но след, оставленный им, неизгладим».

[8]Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ введением переменной $y = x + b/(2a)$ сводится к уравнению $y^3 + 3py + 2q = 0$, где $2q = 2b^3/(27a^2) - bc/(3a^2) + d/a$ и $3p = (3ac - b^2)/(3a^2)$. Если $y_1 = u + v$, $y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v$, $y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v$, то $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^2}}$, $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^2}}$, ε_1 и ε_2 – корни уравнения $x^2 + x + 1 = 0$, $\varepsilon_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, где $i = \sqrt{-1}$.

Нильс Хенрик Абель и его великая теорема

Будем следовать в изложении статье [4] и книге [5]. Абель родился 5 августа 1802 года на юге Норвегии в семье священника. В 1815 году отец отправил Нильса в кафедральную школу в столицу Норвегии Христианию. Абелю повезло: в школе он встретил учителя Бернта Микеля Хольмбое, который заметил, оценил его математическое дарование и на протяжении многих лет оказывал деятельную поддержку своему выдающемуся, но несчастному ученику. Учитель писал об ученике: «Абель сочетает в себе гениальные математические способности с неистощимым интересом к науке, ...он станет самым выдающимся математиком в мире». Абель поступил в университет в 1821 году. Отец у него умер, и у Нильса не было средств к существованию. Он подал прошение о стипендии, но у университета не было средств для этого. Тогда некоторые профессора университета, «дабы сохранить для науки редкое дарование», стали выплачивать ему стипендию из своих средств. Этого было недостаточно для содержания семьи, поэтому Абелю пришлось подрабатывать уроками, что не избавило его от нищеты. В первый ряд математиков мира Абеля поставила его статья «Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения выше четвертой степени», которая была опубликована в 1826 году. Однако следующая его работа, представленная Парижской академии наук и переданная Коши для рецензирования и представления в печать, затерялась среди бумаг великого математика. Он разыскал её только после смерти Абеля. Этот труд Абеля, вместе с трудом Якоби, был удостоен большой премии Академии. Увы, эта премия не досталась Абелю при жизни, и все последние годы Абель провел в крайней нужде. Он умер от чахотки 6 апреля 1829 года в возрасте 27 лет. Осталась великая теорема Абеля [4, с. 13]: «Ни для какого натурального n, большего четырех, нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого уравнения через его коэффициенты при помощи радикалов». Покажем, что существует (конкретное) уравнение пятой степени с целыми коэффициентами, не разрешимое в радикалах. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$p(x) = x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Для того чтобы данное уравнение имело пять вещественных корней, необходимо, чтобы по так называемой теореме Ролля производная $dp(x)/dx = 5x^4 - 4$ имела бы четыре вещественных корня, а она имеет только два.

Вместо заключения к лекции

13 мая 1832 года. Дуэль двух молодых людей – французов – из-за молодой женщины. Падает на землю смертельно раненый Эварист Галуа, которому всего 21 год. В полном собрании его работ не более 60 страниц, но они революционны для математики. Галуа изобрел язык, позволяющий описывать симметрии в математических структурах и выводить их следствия. Язык этот сегодня носит название «теория групп» и широко используется в современной физике (о жизни и работах Галуа см. [1, глава 7] и [6]). С позиций этой теории общее уравнение пятой степени нельзя решить с помощью формулы, потому что у него неправильные симметрии, но это уже другая история.

Библиографический список

1. *Стюарт Иэн.* Истина и красота. Всемирная история симметрии. М.: Изд-во Астрель: CORPUS, 2010. 461 с.
2. *Кессельман В.* Занимательная математика. М.: АСТ-Астрель, 2008. 224 с.
3. *Гутер Р., Полунов Ю.* Джироламо Кардано. Гений времени и места. М.: ЭНАС, 2010. 256 с.
4. *Тихомиров В.* Абель и его великая теорема // Квант. 2003, № 1. С. 11.
5. *Оре О.* Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. 343 с.
6. *Инфельт Л.* Эварист Галуа. Избранник Богов. М.: Изд-во ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия», 1958. 367 с.

Саратовский госуниверситет *Поступила в редакцию* *25.01.2013*

TWO LECTURES ABOUT THE TWO WAYS OF SYMMETRY INVESTIGATION

D. I. Trubetskov

These lectures were delivered to the high school students at the School – seminar «Nonlinear Days for Youth in Saratov – 2012» in October 2012. They present the two ways of historical investigation of symmetry. The first way is self-similarity, i.e. invariance at dimension scale changing. In a more general way the term «scaling» is used, meaning the existence of power-law correlation between some variable and variables $x_1, ...x_n$: $y = Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$, where A, α_1,...α_n – are constant. Lecture 1 gives examples of scaling (self-similarity) appearing in various fields of science and culture. G.I. Barenblatt indicates that scaling laws never appear by accident. They always reveal the most important property of the phenomenon under consideration: its self-similarity. The term self-similarity means that changing in time and space, a phenomenon repeats itself in changed temporary and / or space scales. Lecture 2 describes the second way of symmetry investigation. It is search for solutions of algebraic equations which led to creation of group theory. As a background the lecture includes historical events and characters dealing with the described scientific investigations.

Keywords: Symmetry, self-similarity, scaling, fractals, power series, similarity, golden and silver ratio, chaos.

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: dtrubetskov@yahoo.com

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 4, 2013 УДК 573.8:579.23

СОВРЕМЕННЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ: О РОЛИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ГЕНОВ

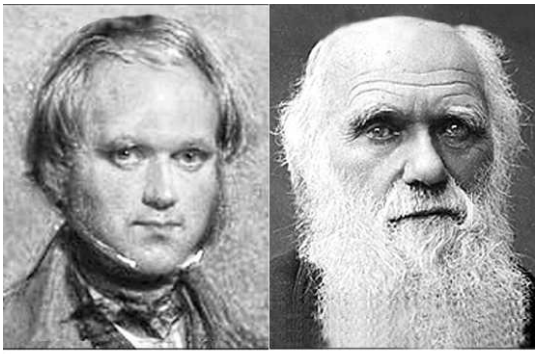
С. Ю. Щеголев

Статья представляет собой расширенный конспект лекции, прочитанной для студентов и аспирантов факультета нелинейных процессов СГУ на школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2012». В ней представлен краткий обзор работ, отражающих основные положения современной теории биологической эволюции. В огромном разнообразии источников, посвященных изложению различных подходов к проблеме (включая ряд основополагающих исследований по вопросам самоорганизации открытых систем) и анализу экспериментальных данных (порой довольно противоречивых) предпочтение отдано публикациям российских и зарубежных авторов, представляющим (по мнению докладчика) наибольший интерес для микробиологов. Особое внимание уделено, в частности, роли межвидового (горизонтального) обмена генетической информацией, его значению для эволюции, возникновения и функционирования широкого круга эндо- и эктосимбиотических систем с участием растений и микроорганизмов, генной инженерии.

Ключевые слова: Биологическая эволюция, горизонтальный перенос генов, открытые системы, панспермия, прокариоты, самоорганизация, симбиогенез, филогения.

1. Теория Дарвина и открытые системы

В 2009 г. исполнилось 200 лет со дня рождения Чарльза Дарвина и 150 лет со времени выхода в свет первого издания его знаменитой книги [1], круто изменившей всю систему взглядов на происхождение жизни и оказавшей огромное влияние на ход мыслей ученых в самых разных отраслях естествознания. Выдающийся физик-теоретик Ю.Л. Климонтович (внесший большой вклад в развитие статистической физики и физики открытых систем) в своих трудах неоднократно отмечал [2], что один из величайших физиков Людвиг Больцман был, по его мнению, первым, кто отчетливо понимал общность и важность понятия Эволюция. Именно поэтому на рубеже двух веков Больцман назвал век XIX веком Дарвина.



Ч. Дарвин – молодой ученый (1830-е годы) Ч.Р. Дарвин в зрелом возрасте (1870-е годы)

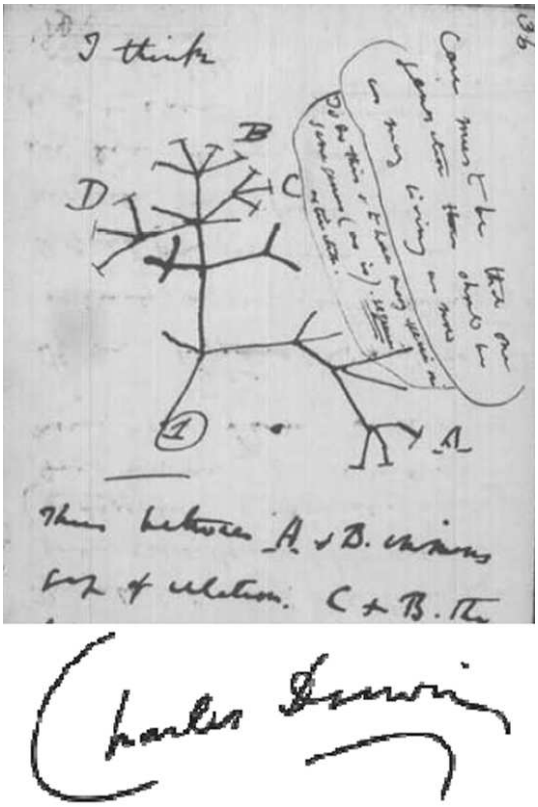


Рис. 1. Набросок древа жизни в блокноте Ч.Дарвина, 1837 г.

Отдавая должное вкладу этого человека в мировую науку, взглянем на его портреты, отразившие неизбежную печать времени (так много значащего в историко-эволюционном развитии всего живого), и приведем цитату из упомянутой выше великой книги: «...Всякое существо, которое в сложных и нередко меняющихся условиях его жизни хотя незначительно варьирует в выгодном для него направлении, будет иметь больше шансов выжить и таким образом подвергнется *естественному отбору*....Отобранная разновидность будет склонна размножаться в своей новой и модифицированной форме». Как говорится, «ни убавить, ни прибавить».

В связи с темой данной статьи отметим прежде всего черновой набросок филогенетического «древа жизни» (отражающего эволюционные взаимосвязи между различными видами или другими сущностями, имеющими общего предка), сделанный рукой Дарвина (рис. 1). Напомним, что хранение генетического материала в клетках и его распространение обеспечивается особенностями структуры двойной спирали ДНК. Делению клеток предшествует *репликация* ДНК, при которой образуются две дочерние спирали. Каждая из них включает одну материнскую и одну вновь синтезированную дочернюю последовательность, восстановленную по материнской в соответствии с правилом Чаргафа (А+Т, Г+Ц). При *дивергентной эволюции*, основной движущей силой которой является естественный отбор, разделение видов отражается на филогенетическом древе жизни в виде соответствующих разветвлений. На рис. 2 приведен пример такого построения, отражающего эволюционное сродство между тремя царствами ныне живущих организмов: растениями, животными и грибами. Несмотря на большое внешнее сходство многих известных грибов с растениями, современный филогенетический анализ указывает на то, что более близкими родственниками для них являются животные. В том числе люди.

В построениях такого типа отражена одна из долго существовавших генетических догм. Согласно этой догме, биологические виды могут приобретать новые

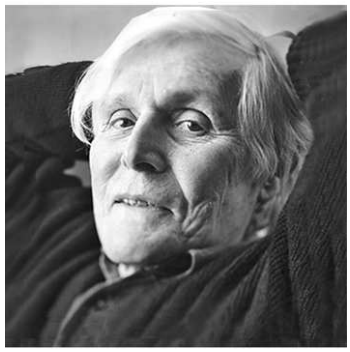
черты лишь путем постепенного, шаг за шагом, накопления мутаций, передаваемых из поколения в поколение. Вариант так называемого *вертикального переноса генов*. Долгое время это считалось единственно возможным генетическим механизмом видообразования со строгим запретом преодоления неродственных межвидовых барьеров.

Однако с конца 50-х годов 20-го столетия стали появляться данные, свидетельствующие о возможности передачи генов не только от предков к потомкам, но и «по горизонтали». То есть реализации обмена генетической информацией между различными видами организмов, порой весьма отдаленно родственными. Вместо постепенного накопления мутаций в этих случаях может иметь место единовременное приобретение организмами большого количества генетического материала (рис. 3).

Таким образом, *горизонтальный перенос генов* – это процесс, в котором организм передаёт генетический материал другому организму, *не являющемуся* его потомком. Изучение этого феномена и оценка его значения в эволюционном развитии жизни стало предметом пристального внимания многочисленных исследователей. Особенно активно проявляемого в последние годы в связи с бурным развитием вычислительной молекулярной биологии, оперирующей быстро растущими базами данных расшифрованных геномов и структур разнообразных биомолекул.

Упрощенный вариант филогенетического дерева, принятый в последние годы в качестве некоего исходного стандарта, показан на рис. 4. На нем отмечены три таксономические единицы наиболее высокого уровня, то есть *надцарства или домены*. Этот термин был введен в систематику в 1990 г. профессором Карлом Вёзе (C.R. Woese), выдающимся микробиологом и эволюционистом (кстати, физиком по образованию и изначальным научным интересам), который предложил разделить все живые организмы на три домена: бактерии, археи и эукариоты. Указанная транскрипция его имени, отражающая немецкое происхождение, часто встречается в русскоязычной литературе. (Хотя, учитывая, что он родился в 1928 г. и вырос в США, следует, возможно, транскрибировать его имя на американский лад как Воуз.)

Работы К. Вёзе с соавторами положили начало широкому внедрению в филогению *технологии 16S рРНК* (как универсального молекулярного *филогенетического маркера*) и послужили обоснованием отнесения архей к самостоятельному домену (надцарству) на предложенном им универсальном филогенетическом дереве. Сравнение рис. 2–4 позволяет более четко определить феномен, отраженный в названии статьи, и круг рассматриваемых в ней объектов. Тема эволюции жизни охватывает широчайший спектр проблем, явлений и экспериментальных данных. Ее более или менее осмысленное рассмотрение в пределах одной статьи предполагает введение неких ограничений. Эти ограничения определяются, в первую очередь, научными интересами ИБФРМ РАН, который я имею честь представлять на этой школе-конференции, сосредоточенными на исследованиях микроорганизмов и растений, их разнообразных взаимоотношений, сложившихся в ходе эволюционного развития Жизни.



Prof. C.R. Woese
Иллинойский университет
в Урбане и Шампейне, США

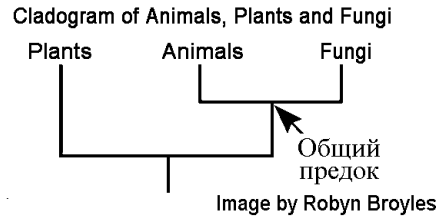


Рис. 2. Пример дивергентной эволюции (вертикальный перенос генов)

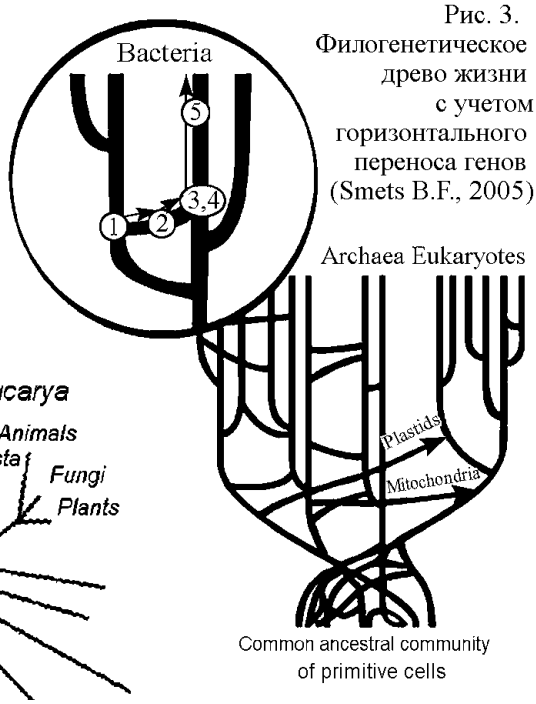


Рис. 3. Филогенетическое древо жизни с учетом горизонтального переноса генов (Smets B.F., 2005)

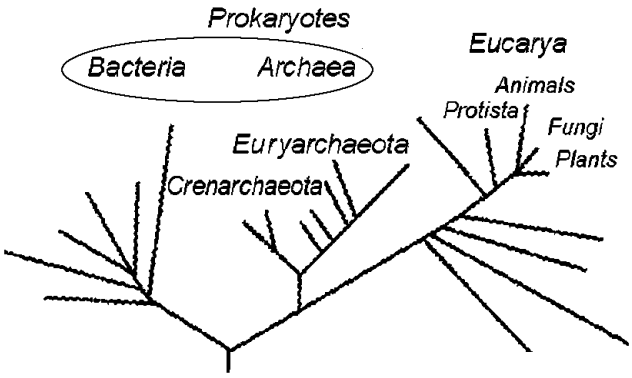


Рис.4. Универсальное филогенетическое дерево (16S рРНК), по данным работы [3]

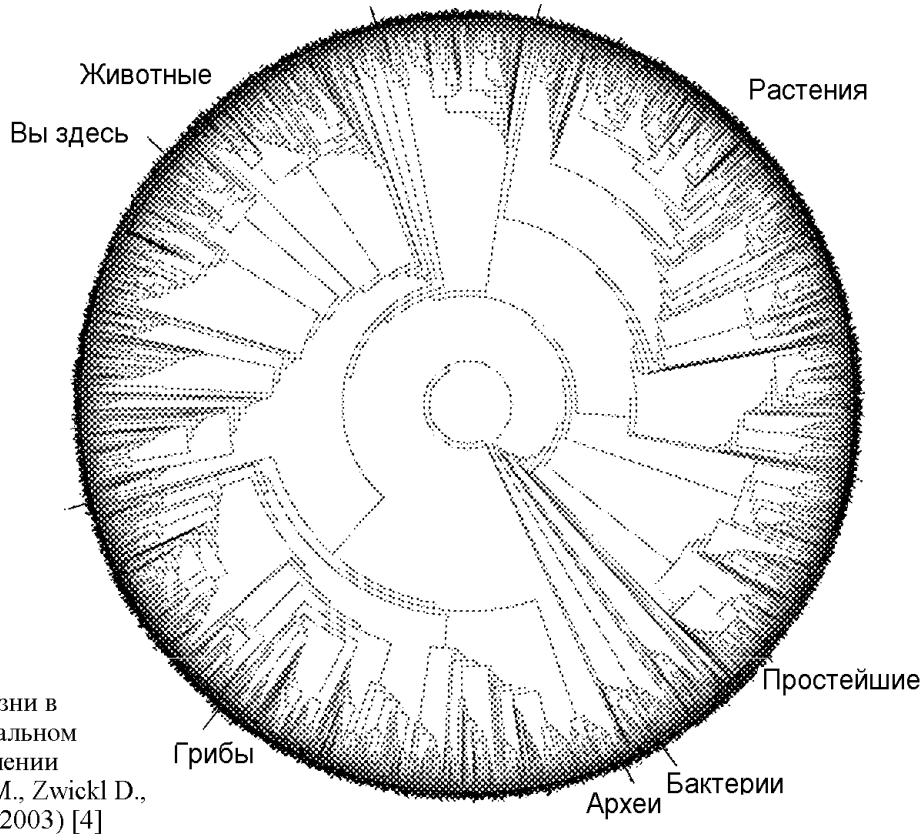


Рис. 5. Древо жизни в более детальном представлении (Hillis D.M., Zwickl D., Gutell R., 2003) [4]

Далее мы увидим, что, согласно результатам последних 10–15 лет, построение на рис. 4 следует рассматривать лишь как первое приближение, отражающее соотношение между таксономическими группами без учета межвидового (горизонтального) обмена генетическим материалом. В соответствии с комментарием самого Вёзе к этому рисунку данное построение справедливо для тех стадий эволюционного развития жизни, на которых *клетка становится достаточно целостной и устойчивой к «эрозивным»* (как считал Вёзе еще в 2000 году) *эффектам горизонтального переноса генов, чтобы могли существовать истинные клеточные линии организмов*. Позднее, однако, все более очевидной становится преимущественно конструктивная эволюционная роль этого явления, особенно актуального именно для *прокариотов*. Коими далее и будет ограничено, главным образом, наше рассмотрение.

На рис. 5 приведена более детализированная версия древа жизни, представленная сотрудниками университета штата Техас (США) [4]. Оно построено по результатам филогенетического анализа с использованием множественных выравниваний последовательностей нуклеотидов малой субъединицы рибосомальной РНК (16S рРНК). Эта макромолекула принята в качестве одного из наиболее стабильных филогенетических маркеров для всех известных организмов. Авторами использованы примерно 3000 образцов видов из всего многообразия древа жизни. Они старались включить в эту диаграмму большинство главных групп организмов, отобранных в пропорции, учитывающей число известных видов для каждой группы. Это составило около 0.2% от 1.7 миллионов описанных на то время (2003) видов.

В биологической систематике организмов таксоном самого высокого уровня до недавних пор считалось *царство*. Приведенный здесь список основных царств включает бактерии, археи, протисты (простейшие), грибы, растения, животные и вирусы. На диаграмме рис. 5 отмечено их систематическое положение. Кроме вирусов, чье причисление к категории живых существ является предметом дискуссии.

Со времени опубликования эпохальных работ Дарвина и по сию пору не утихают дискуссии относительно самой возможности существования естественного отбора как явления природы, являющегося главной (хотя и не единственной, по современным представлениям) движущей силой эволюции. Одним из аргументов в этих спорах до поры до времени было его якобы противоречие фундаментальной *H-теореме Больцмана*. Согласно этому закону, в термодинамически замкнутой системе при ее стремлении к равновесному состоянию энтропия возрастает с соответствующим уменьшением степени упорядоченности системы. При этом, однако, не принималось во внимание то, что любая эволюционирующая живая среда представляет собой существенно *открытую систему*, в которой происходит активный *обмен* с окружающими ее объектами *энергией, веществом и информацией* (см. схему на рис. 6).

Теоретическое рассмотрением таких систем, начатое в 30–40-е годы прошлого столетия целым рядом выдающихся физиков и математиков, увенчалось к началу 1980-х годов формулировкой так называемой *S-теоремы Климонтовича* [5] (буква S в этом названии – от английского self-organization – самоорганизация). По значимости для развития естествознания эксперты ставят ее в один ряд с упомянутой выше H-теоремой Больцмана.

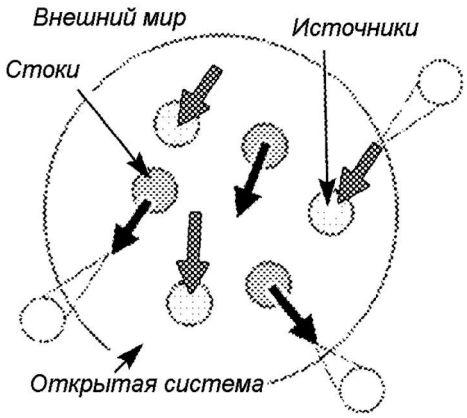


Рис. 6.
Схематическое представление открытой системы

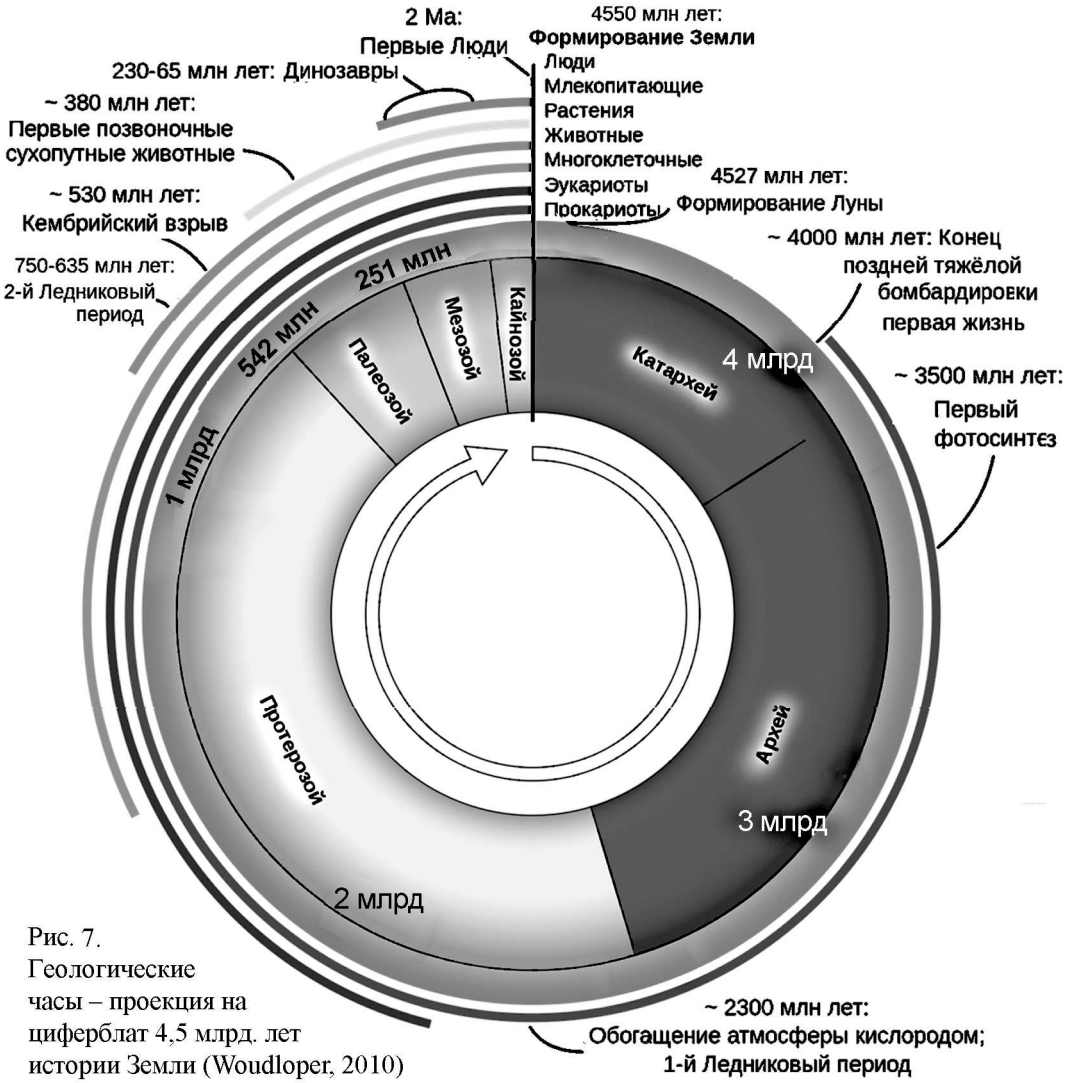
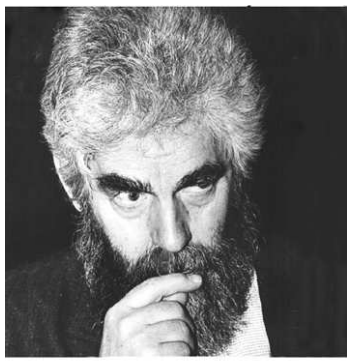


Рис. 7.
Геологические часы – проекция на циферблат 4,5 млрд. лет истории Земли (Woudloper, 2010)

Не вдаваясь в математические подробности, можно констатировать, что в ней впервые была строго доказана возможность при определенных условиях реализации процессов *самоорганизации* открытых систем с *уменьшением* энтропии, их усложнением и совершенствованием. Как утверждал профессор Климонтович, наличие выявленной им дисперсии энтропии определяет саму возможность выбора пути развития в процессе биологической эволюции, так как делает возможным (без внешнего вмешательства) *естественный отбор*.



Проф. Ю.Л. Климонтович
МГУ, лауреат Госпремии РФ 1991

Среди естественных наук есть основания по-настоящему точной наукой считать математику. Отсюда ясна фундаментальная обоснованность дарвиновской теории естественного отбора, привнесенная результатами работ Юрия Львовича Климонтовича в области статистической физики открытых систем.

2. О происхождении жизни

Изложение современных взглядов на эволюцию предполагает определение ее временных и пространственных границ. В первую очередь это связано с установлением возраста Земли и времени существования на ней биоты в соответствии с геологическими и палеонтологическими данными. Хотя, как будет видно из дальнейших материалов, результаты современных экспериментальных и теоретических исследований способны существенно раздвинуть эти границы.

На рис. 7 дано одно из наглядных представлений геолого-биологической истории Земли, насчитывающей около *4.5 миллиардов лет*. Если уподобить этот круг циферблату и принять, что эволюции земной жизни соответствует 1 час, то первые примерно 50 минут надо отвести эволюции микроорганизмов. Животным здесь будет принадлежать около 10 минут. И, наконец, только 1/100 секунды от этого часа приходится на развитие рода человеческого вида Homo sapiens. С этой точки зрения у нас с вами все только начинается!

Рассуждения о происхождении жизни имеют целью ответить на три принципиальных вопроса: *как, когда и где*? По первому из них (*как*?) уже довольно давно сложился консенсус, краткую историю которого отражает левый столбец таблицы. Этот список завершает гипотеза существования предорганизменного мира РНК, анализ и моделирование которого продолжает привлекать внимание многих исследователей.

Основные этапы развития представлений о происхождении жизни

Как?	*Когда и где*?
Абиогенез (химическая эволюция)	*Панспермия* (внеземное происхождение жизни)
Коацерваты, Опарин (1924)	Привнесение из космоса метеоритами, Рихтер (1865)
Аминокислоты, Миллер (1953)	
Рибозимы, Чек, Олтман (1981, Нобелевская премия 1989)	Бактериальная палеонтология, Розанов, Заварзин (1997)
Мир РНК, Вёзе (1968), Гилберт (1986)	

Акад. А.Ю. Розанов
Палеонтологический институт РАН

R.B. Hoover Ph.D.
рук. группы астробиологии NASA, США

Два других вопроса (*когда и где*? – правый столбец таблицы) остаются по-прежнему предметом острых дискуссий вокруг вариантов земного и внеземного происхождения жизни. Список основных этапов развития представлений о панспермии для краткости можно ограничить двумя пунктами, из которых ближайший к нам по времени связан со становлением и развитием в конце 20-го столетия *бактериальной палеонтологии*. В этой области науки были получены экспериментальные данные, свидетельствующие о возможном появлении на Земле простейших организмов уже около 4 миллиардов лет тому назад. При этом целый ряд оценок показывает, что остающихся «каких-то» 500 миллионов лет со времени возникновения Земли никак не хватает для абиогенетического возникновения и развития мира РНК как самоорганизующейся системы на основе естественного отбора.

Результаты исследований в области бактериальной палеонтологии достаточно полно и последовательно отражены в работах российских и американских специалистов. Их руководителем с российской стороны является академик Алексей Юрьевич Розанов. В серии публикаций последних лет (см., например, [6]) им приводятся данные (рис. 8, 9), свидетельствующие об обнаружении структур, интерпретируемых как окаменелые остатки древних микроорганизмов в осадочных горных породах и метеоритах, возраст которых достигает 4.5 миллиардов лет. Это дает основания академику Розанову для констатации высокой вероятности возникновения жизни в космосе гораздо раньше образования Земли, на планете «земного» типа, где была вода и подходящие температура, состав атмосферы и иные условия.

Также представляют интерес работы в этой области американских ученых [7], проводимые под руководством Ричарда Гувера (R.B. Hoover). В них морфологические исследования, проведенные с использованием самых современных вариантов полевой эмиссионной сканирующей микроскопии (рис. 10), дополняются результатами элементного анализа исследуемых метеоритных структур методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (рис. 11). Его результаты показали, что найденные в углеродсодержащих метеоритах CI1 структуры, характерные для остатков прокариот, являются скорее аборигенными окаменелостями, а не современными наземными биологическими загрязнениями, которые могли проникнуть в метеориты после их прибытия на Землю.

Гувер обращает внимание на большое значение обнаруженных на Земле *живых микробных экстремофилов*. В сочетании с палеонтологическими данными это значительно увеличивает вероятность того, что микробная жизнь может существовать в ледяных полярных шапках и вечной мерзлоте Марса, в водосодержащих астероидах, ядрах комет, в поверхностных льдах ледяных лун, таких как *Европа* (Юпитер) и *Энцелад* (Сатурн).

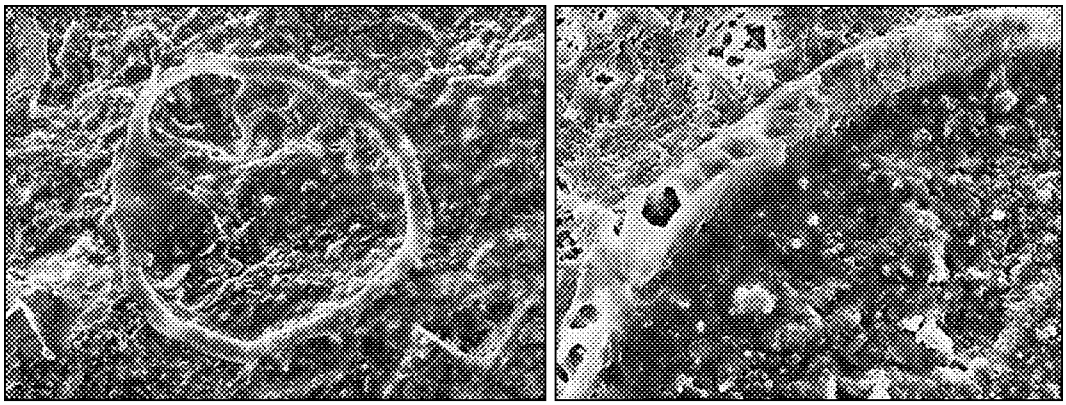


Рис. 8. Зелёные водоросли (*Pechengia*) в осадочных горных породах (фосфоритах) Карелии (2 млрд лет) [6]

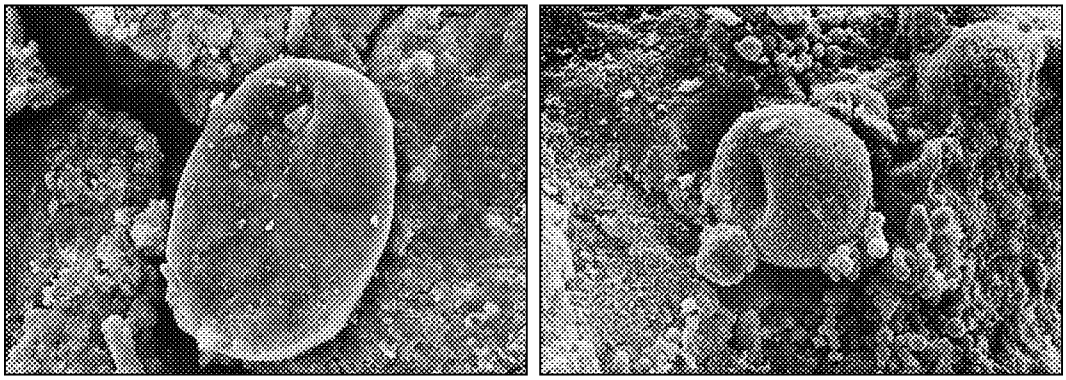


Рис. 9. Предполагаемые эукариотические организмы в метеорите Оргей (4,5 млрд лет) [6]

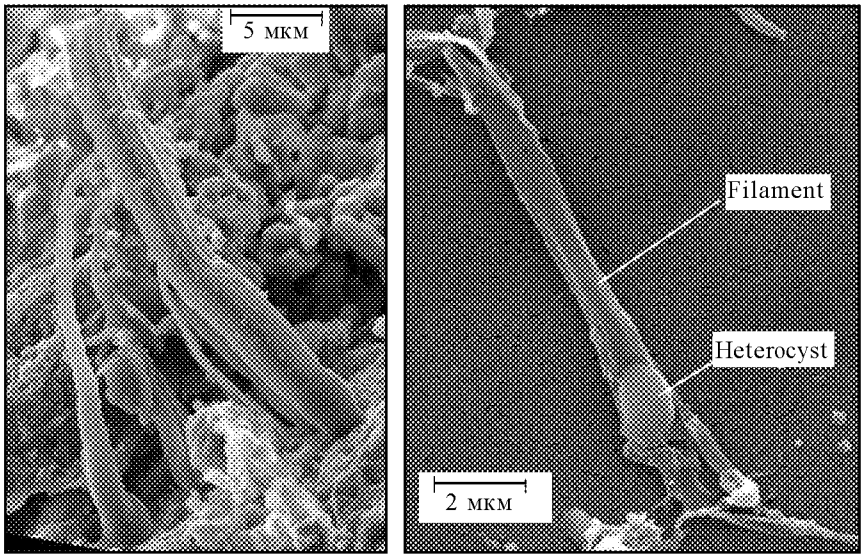
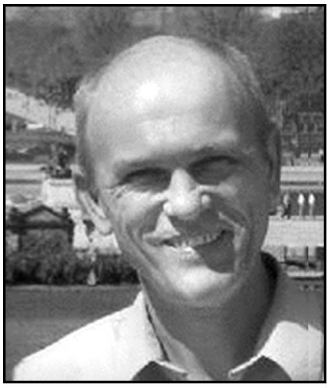


Рис. 10. Сравнение микроструктур из метеорита Оргей (4,5 млрд лет) (слева) с цианобактерией *Calothrix* с использованием полевой эмиссионной сканирующей электронной микроскопии [7]



К.б.н. А.А. Шаров
Национальный институт
по проблемам старения США

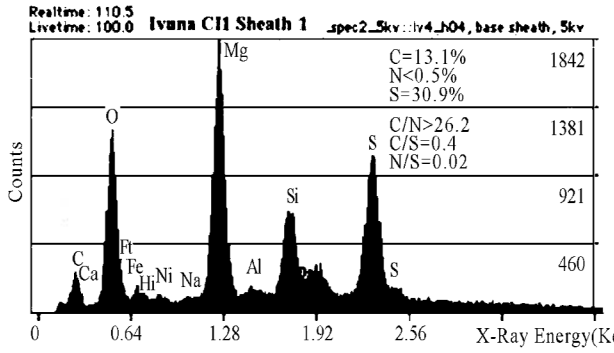
В связи с результатами, полученными в области бактериальной палеонтологии, нельзя обойти вниманием начавшуюся в 2012 году экспедицию на Марс американской автоматической станции Curiosity (что переводится как «любознательность») (рис. 12). Замечу, что в ее конструкцию входит детектор для определения воды – разработка российских специалистов. При этом стоит процитировать первую строчку из сочинения 12-летней (в 2008 году) школьницы Клары Ма, ставшей победительницей конкурса на лучшее название марсианской автоматической лаборатории (специально организованного среди американских школьников): «Любознательность – это вечный огонь, который горит в сознании каждого». Мы будем надеяться на получение в скором времени новых конкретных данных по риторическому пока вопросу «есть ли жизнь на Марсе?».

Таким образом, можно констатировать, что интересующий нас мир прокариотов (включающий бактерии, цианобактерии и археи) существует на Земле уже около 4 миллиардов лет и что этому периоду предшествовал этап ее интенсивной метеоритной бомбардировки. Все эти факты приводят А.Ю. Розанова к заключению о крайне малой вероятности возникновения жизни на Земле и возможном внеземном существовании мира РНК [6].

Приведенные выше наблюдения и выводы, озвученные в нынешнюю постгеномную эпоху, не могли не привлечь внимание специалистов, активно работающих с быстро растущими биоинформационными базами данных. В этой связи стоит отметить публикацию [8] нашего бывшего соотечественника Алексея Шарова, ныне сотрудника одного из подразделений Национального института здоровья США – Национального института по проблемам старения.

В серии публикаций, отраженных в обобщающей статье [8], он привел результаты статистической обработки геномов различных организмов – от прокариот до млекопитающих. Выделяя из них неизбыточные функциональные части и используя палеонтологические данные, автор оценил динамику изменения биологической сложности организмов в пределах 4 миллиардов лет. Эти оценки, во-первых, выявили ее экспоненциальный рост во времени с высоким коэффициентом корреляции. Во-вторых, они подтвердили достаточно высокую генетическую сложность протобионтов, возможное существование которых приходится на начало этого периода. Наконец, в данной работе была сделана экстраполяция полученной экспериментальной зависимости на глубину более 4 миллиардов лет с учетом погрешности определения возраста и размера геномов организмов (рис. 13). Это привело автора к сенсационному предположению, что зарождение жизни, соответствующее минимальной биологической сложности (экстраполяция к нулевому значению логарифма размера генома), могло состояться *от 7 до 13 млрд лет тому назад*, и что возможность панспермии как источника жизни на Земле должна обсуждаться *наравне* с гипотезами зарождения жизни *de novo*.

Эти идеи были подхвачены и развиты в работах специалистов из США и Англии [9]. Авторы, R. Joseph и N. Wickramasinghe, использовали несколько генетических моделей, более широкий набор палеонтологических данных и также экстраполировали полученные зависимости к нулевому значению логарифма числа генов (рис. 14). Полученные результаты подтвердили допущение А. Шарова о том,



Quantitative Results for iv4_h04, base sheat.
Analysis: Bulk Method: Standardless
Acquired 09-Sep-2004, 5.0 KeV @10 eV/channel

Element	Weight %	Std Dev.	MDL	Atomic %	k-Ratio	Intensities
C	6.62	1.22	0.89	13.12	0.0204	943.5
O	15.31	0.86	0.32	22.78	0.1177	7184.9
Na ?	0.00	0.00	1.57	0.00	0.0000	0.2
Mg	23.01	1.07	0.60	22.54	0.2204	10921.4
Al ?	0.00	0.00	1.79	0.00	0.0000	0.2
Si	11.73	0.75	0.98	9.94	0.1117	3952.2
S	41.58	1.29	0.77	30.87	0.3922	8297.5
Ca ?	0.01	0.02	7.11	0.01	0.0001	0.2
Fe ?	1.74	0.59	3.01	0.74	0.0105	595.8
Ni ?	0.00	0.00	2.00	0.00	0.0000	0.2
Total	100.00					

? These elements are statistically insignificant.

Рис. 11. Элементный анализ микроструктур из метеорита Оргей методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии [7]

Клара Ма, победительница конкурса на лучшее название марсохода Curiosity

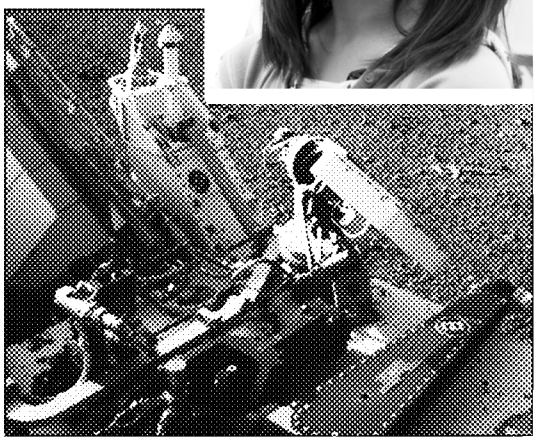


Рис. 12. Как себя «видит» Curiosity на фоне марсианского ландшафта

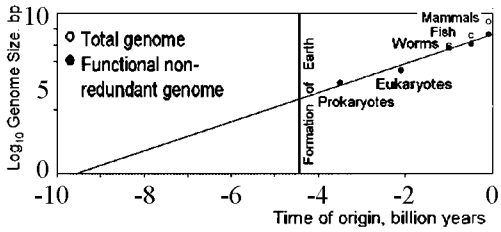


Рис.13. Эволюция размера генома на Земле от прокариот до млекопитающих, (R^2 = 0.97), рост в 7.8 раз за 1 млрд. лет [8]

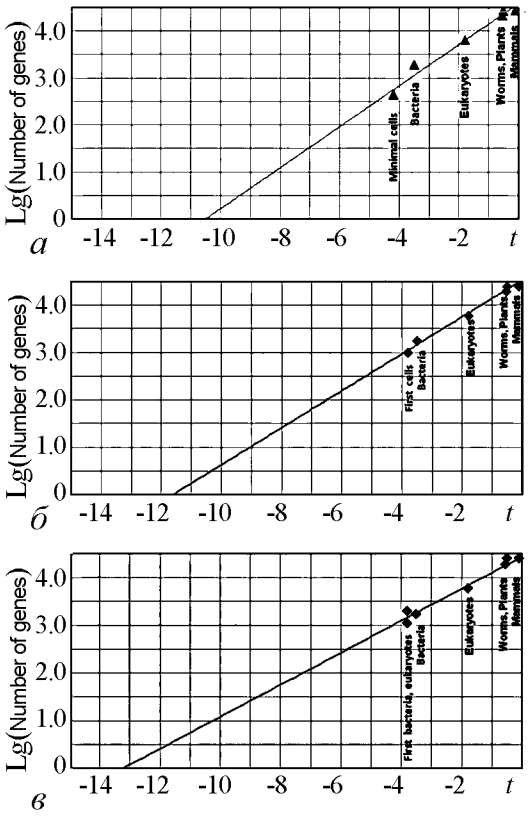


Рис.14. Связь между числом генов организмов и временем их появления на Земле (R^2 = 0.91-0.99) [9]

R. Joseph, Ph.D.
Лаборатория исследований мозга,
Эмеритус, США

Prof. N. Wickramasinghe
Букингемский центр
астробиологии, Англия

что источник первого гена мог возникнуть примерно 10 миллиардов лет тому назад. То есть вскоре (по вселенским меркам, конечно) после зарождения нашей Вселенной, произошедшего в результате *Большого взрыва* около 14 миллиардов лет тому назад.

Таким образом, по мнению авторов работы [9], первый ген был сформирован примерно *за 6 млрд лет до возникновения Земли* путем внеземного абиогенеза, вероятно, во время образования нашей галактики.

Не менее важной частью работы А. Шарова [8] следует признать обоснование соображений о том, что мир РНК слишком сложен для того, чтобы в нем в разумные сроки могла возникнуть развитая система клетки по механизму спонтанной самосборки, и что миру РНК должен был предшествовать абиогенетический мир *более простых* саморазвивающихся систем типа *коэнзимов*. На рис. 15 приведена примерная схема такого коэнзимного мира из работы [8]. Одним из основных ее выводов остается то, что эволюционный (по Дарвину–Климонтовичу) переход от коэнзимного мира к миру РНК также должен был произойти задолго до того, как на Земле появились первые живые организмы.

В связи с этой темой следует отметить также две работы российских авторов [10, 11], опубликованные одна за другой в 2007 году в одном и том же выпуске Палеонтологического журнала. Первая принадлежит перу академика Александра Сергеевича Спирина, всемирно признанного эксперта в области биохимии и молекулярной биологии. К достаточно выразительному названию этой интересной работы следует добавить то, что автором констатируется *невозможность* возникновения, существования и эволюции мира РНК в клеточные формы жизни на Земле.

Вторая представлена сотрудником Института катализа Сибирского отделения РАН кандидатом физ.-мат. наук Валерием Николаевичем Снытниковым. В ней допланетный (по отношению к Солнечной системе) околозвездный диск отмечается как

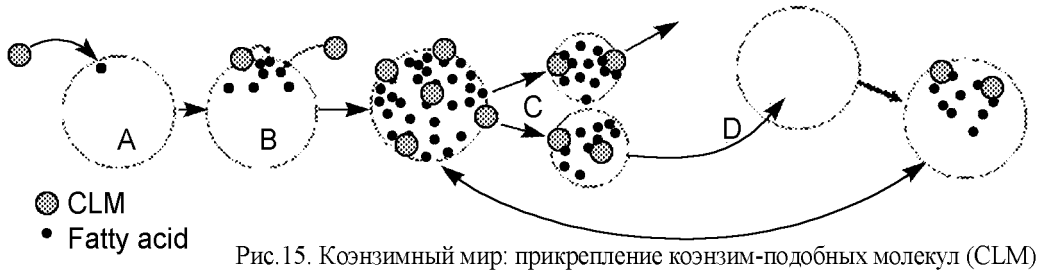


Рис.15. Коэнзимный мир: прикрепление коэнзим-подобных молекул (CLM) к жировой микросфере и окисление углеводородов (A, B), накопление жирных кислот и разделение микросферы (C), инфицирование больших микросфер малым с захватом нового жирового ресурса (D) [8]

наиболее вероятное время (4.56 млрд лет тому назад) и место первичного абиогенного синтеза пребиотического органического вещества из простых молекул с миром РНК и самим возникновением жизни (около 500 млн лет). Однако эти временны́е рамки оказываются слишком узкими по сравнению с приведенными выше оценками американских авторов.

Отметим, что, по замечанию академика Розанова, до примерно 1997 года обсуждать всерьез проблему панспермии считалось неприличным. В связи с чем мне представляется уместным завершить очень краткий обзор некоторых работ по проблеме происхождения жизни цитатой из А. Шопенгауэра: «Новые истины проходят три стадии. На первой их высмеивают, на второй им резко оппонируют и затем, в конце концов, их принимают как само собой разумеющееся».

3. Эволюционные процессы в реальном масштабе времени

Выше было сказано о принципиальном значении S-теоремы Климонтовича как теоретическом обосновании существования естественного отбора в качестве движущей силы эволюции открытых систем. Однако подавляющая часть многочисленных экспериментальных доказательств естественного отбора в живой природе по необходимости имеет характер, существенно опосредованный большими временными интервалами с неизбежной утратой нативности исследуемых объектов. Зачастую это приводит к неоднозначным толкованиям полученных результатов, используемых оппонентами против дарвиновской теории.

Поэтому трудно будет переоценить значение *долгосрочного микробиологического эксперимента*, начатого в 80-х годах прошлого столетия и имеющего целью осуществить наблюдение эволюционного развития популяций в *реальном масштабе времени*. То есть за время, соизмеримое со временем активной жизни экспериментаторов. Эта уникальная возможность обеспечена физиологическими и биохимическими особенностями микроорганизмов, накопленным большим опытом работы с ними в лабораторных условиях.

Данный эволюционный эксперимент стартовал в 1988 г., поддерживается Национальным научным фондом США и проводится в университете штата Мичиган под руководством профессора Ричарда Ленски (R. Lenski). По состоянию на 1 сентября 2012 г. согласно счетчику, приведенному на официальном сайте проекта [12], в этом эксперименте сменилось примерно 56000 поколений кишечной палочки.

Было использовано 12 стартовых популяций *E. Coli*, полученных от общего предка – 6 с геном Ara^+ и 6 с геном Ara^-, отличающихся по способности усваивать арабинозу. Это позволяет отличать современные и предковые культуры по окраске колоний на чашках в сравнительных конкурентных экспериментах по адаптации. Родительские штаммы хранятся замороженными и оживляются для проведения тестов. Культуры размножаются ежедневно. Каждые 75 дней (через 500 поколений) образцы смешанных популяций замораживаются, хранятся бессрочно и могут быть использованы как «палеонтологическая летопись». Другие интересные детали эксперимента можно найти на сайте проекта [12].

Prof. R. Lenski
университет штата Мичиган
США

Для оценки эволюционного масштаба эксперимента можно отметить, что 50 тысяч поколений, к примеру, в пределах человеческого рода соответствуют погружению в глубь веков примерно на 1.5 миллиона лет. Во времена широкого распространения на Земле *Homo erectus*. Его реконструированный портрет приведен на рис. 16 в сравнении с типичным «портретом» конгломерата кишечной палочки.

За время этого эксперимента по его результатам профессором Ленски с сотрудниками опубликовано 60 статей. Из них 4 – в *Nature* и 6 – в *Science* (текущий импакт-фактор обоих журналов более 30). Мы отметим здесь лишь некоторые из них, отражающие результаты, достаточно показательные с эволюционной точки зрения.

В работе [13], результаты которой отражены на рис. 17, отмечается, что эволюционное развитие микробных популяций в 12 исследуемых линиях выразилось в более высокой эффективности использования основного источника питания глюкозы в культуральной среде и существенном укрупнении клеток. В ней были прослежены основные эволюционные изменения, контролируемые естественным отбором. На-

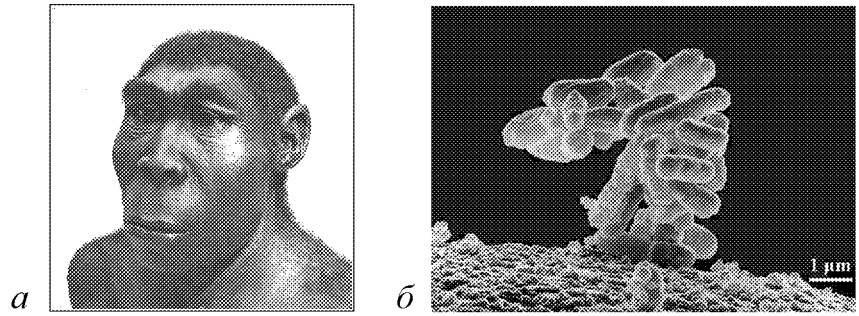


Рис. 16. *Homo erectus*, 0.3-2 млн лет тому назад (~ 50000 поколений) (*а*) и *Escherichia coli*, 1988-2012 гг. (~ 55000 поколений) (*б*)

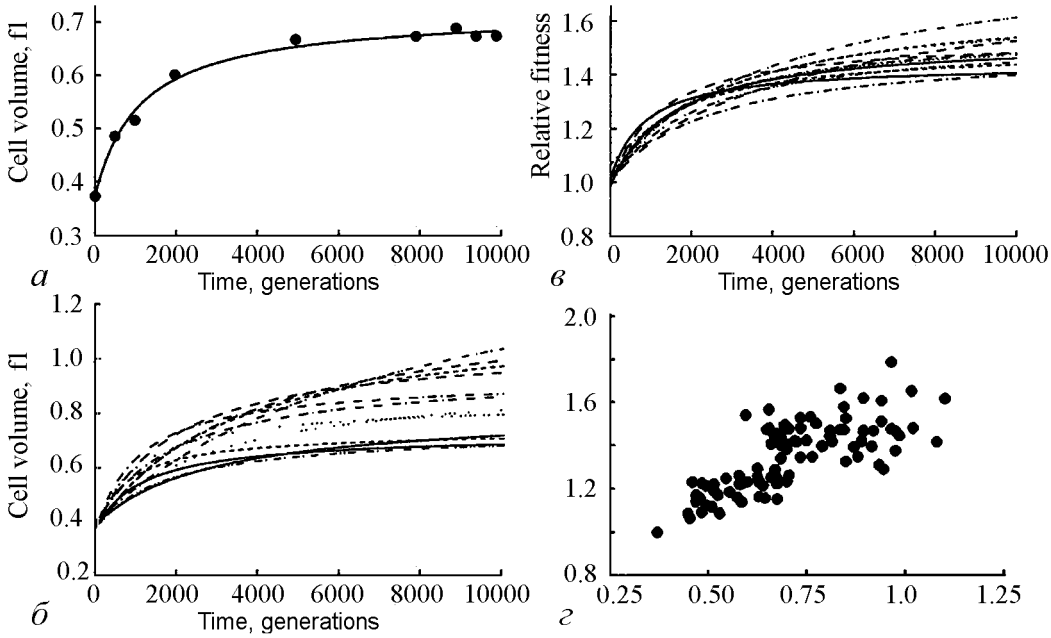


Рис.17. Зависимость размера (*а, б*) и относительной приспособляемости (*в*) клеток *E.coli* от времени эволюции в единичной (*а*) и 12 линиях (*б, в*); соотношение между приспособляемостью и объемом клеток (*г*) [13]

пример, параллелизм, реализуемый, однако, при движении культур по разным эволюционным траекториям. Отмечено также значение для адаптивной эволюции случайных событий, таких как мутации и дрейф генов.

Одним из открытий в этом долгосрочном эксперименте, описанном в работе [14], стало обретение одной из линий в эволюционных циклах, превышающих примерно 33 тысячи поколений, *способности усваивать цитрат* (рис. 18). Что было в принципе исключено для предкового штамма. Было показано, что это связано с согласованной работой двух мутантных генов. При том что мутации в каждом из них по отдельности не приводят к появлению способности усваивать цитрат кишечной палочкой.

В 2009 году группой Ленски в *Nature* были опубликованы результаты *полногеномного секвенирования ДНК* ряда эволюционирующих штаммов кишечной палочки [15] (рис. 19). Они продемонстрировали сложную взаимосвязь между геномной эволюцией и адаптационными изменениями культур, отраженную в основных выводах этой работы:

- хотя адаптация резко замедлялась, геномная эволюция была почти постоянной на протяжении 20000 поколений;
- почти все из этих мутаций были полезными;
- впоследствии (до 40000 поколений) популяция аккумулировала сотни дополнительных мутаций с преобладанием нейтральных черт;
- полезные замещения были на удивление постоянными во времени, в то время как нейтральные – высоко вариабельными.

Это дало основания авторам заключить, что сопряжение между геномной и адаптивной эволюцией является сложным и может быть парадоксальным даже при неизменном внешнем окружении. Иными словами, даже для такого относительно несложного объекта, находящегося в неизменных стандартных условиях, в ходе данного эксперимента проявились как адаптивные, так и неадаптивные механизмы эволюционных процессов.

Надо заметить, что еще более коротким жизненным циклом обладают вирусы, что делает возможными еще более наглядные эксперименты в ходе их эволюционных изменений в реальном масштабе времени. И не только для регистрации, но и для практического использования эффектов естественного отбора. Например, в разработке подхода к борьбе со СПИДом, осуществленной американскими исследователями. В этих экспериментах они добились естественного эволюционного вытеснения в организме пациента клонов ВИЧ, устойчивых к действию лекарств, их нерезистентными конкурентами с последующим эффективным уничтожением вируса. Однако по сравнению с микроорганизмами вирусы не так интересны с общебиологической точки зрения, поскольку, паразитируя в организме хозяина, они не обладают собственными системами клеточного метаболизма.

Prof. R. Dawkins
Оксфордский университет
Англия

В завершение данной части обзора я хотел бы присоединиться к оценке результатов и значения рассмотренного выше долгосрочного эволюционного микробиологического эксперимента, данной Ричардом Докинзом (R. Dawkins). В одной из своих книг [16], по-

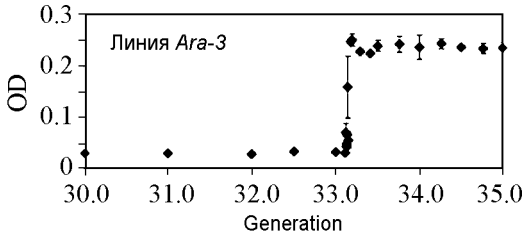


Рис. 18. Увеличение концентрации бактерий в ходе эволюции с приобретением уникальной способности усваивать цитрат при согласованной работе 2-х мутантных генов [14]

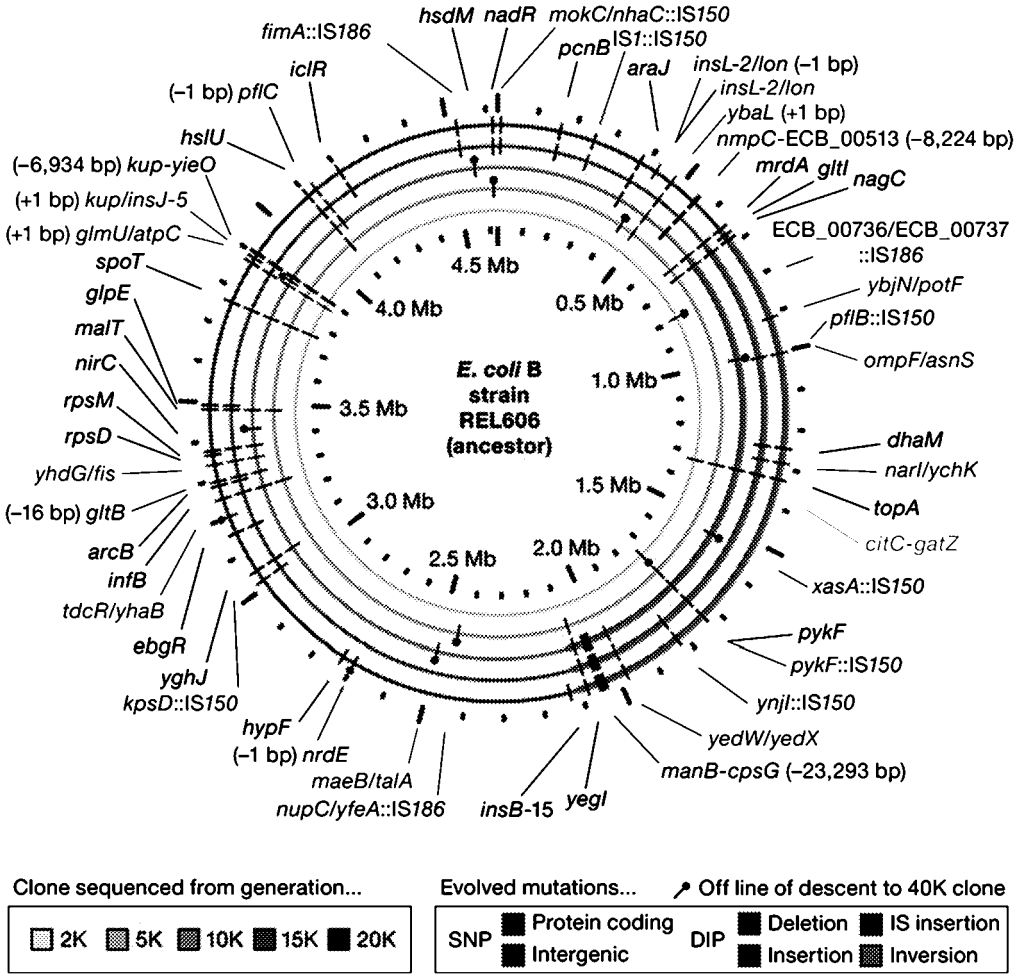


Рис. 19 Мутации, найденные при секвенировании геномов, отобранных между 2000 и 20000 поколений в эволюционном эксперименте с *E.coli* [15]

священных анализу современного состояния эволюционного учения с позиций дарвинизма, он отмечает, что работы группы Ленски выявляют процессы эволюции, происходящие путем естественного отбора, *многократно ускоренные* в масштабе микрокосма в лабораторных условиях. Ими продемонстрированы случайные мутации, за которыми следует неслучайный отбор; независимые пути адаптации к одним и тем же внешним условиям у разных популяций; эволюционные изменения за счет добавления успешных мутаций к существующим; зависимость эффектов некоторых генов от присутствия других генов. И все произошедшее зафиксировано за время, составляющее ничтожную долю срока, который обычно требуется для полномасштабных эволюционных изменений в живой природе.

4. Современные представления о механизме эволюционных процессов

Начало современного этапа в становлении эволюционного учения связано с бурным развитием генетики в первой половине 20-го столетия. Это направление получило название синтетической теории эволюции. Его ассоциируют, в первую очередь, с трудами Сергея Сергеевича Четверикова. В 1926 году им опубликована работа [17] с весьма характерным названием. В публикациях профессора Четверикова была сформулирована концепция адаптивных и неадаптивных процессов эволюции и подчеркнута важность *генетико-стохастических явлений*, впоследствии названных дрейфом генов (genetic drift). Ныне принято, что наряду с естественным отбором генетический дрейф является одной из основных движущих сил эволюции.

Проф. С.С. Четвериков
Горьковский
госуниверситет

Короткий список наиболее часто упоминаемых эволюционных теорий можно представить, например, следующим образом:

- *синтетическая теория эволюции* (Четвериков, 1926; Шмальгаузен, 1939; Хаксли 1942, и др.), синтез генетики и дарвинизма, постулирует органическую эволюцию путем естественного отбора признаков, детерминированных генетически;
- *нейтральная теория молекулярной эволюции* (Кимура, 1968) утверждает, что подавляющее число мутаций на молекулярном уровне носит нейтральный по отношению к естественному отбору характер;
- *теория прерывистого равновесия* (пунктуализма) (Гулд и Элдридж, 1972) констатирует, что эволюция существ, размножающихся половым путём, происходит скачками, перемежающимися с длительными периодами, в которых не происходит существенных изменений;
- ... ?

Многоточие и вопросительный знак отражают то обстоятельство, что биологическая наука в последние десятилетия переживает период чрезвычайно бурного развития. И в ней можно найти набор экспериментальных данных, как хорошо

А.В. Марков, д.б.н., Палеонтологический институт РАН

укладывающихся, так и выходящих за рамки любой известной теории эволюции. В связи с чем трудно не согласиться с высказыванием известного российского эволюциониста, ведущего научного сотрудника Палеонтологического института РАН Александра Владимировича Маркова: «Современная биология – это даже не лоскутное одеяло, скорее, это стремительно растущий ворох лоскутков, в котором будущее "одеяло" только начинает угадываться» [18].

С точки зрения S-теоремы Климонтовича, для реализации естественного отбора важно сохранение информации об оптимальном выборе эволюционного пути и его предыстории. По мнению упомянутого выше Р. Докинза – одного из известных и активнейших западных эволюционистов, такая природная база данных включает 4 составляющих, названных им «суперструктурой аппарата выживания» [16]:

- *репозиторий ДНК*, содержащий техники выживания, выработанные предками и записанные в генофондах популяций и видов;
- *иммунная система*, содержащая данные об окружающей среде в отношении заболеваний и ранений, которые перенесла особь;
- *нервная система*, хранящая данные о гибели и успехе прошлых поколений и собственном опыте индивидов;
- *культура*, аккумулирующая коллективные воспоминания, *не генетически* наследуемые от прошлых поколений.

Я позволю себе добавить, что культуру можно, вероятно, трактовать в широком смысле слова – от клинописи и наскальной живописи до Интернета. Последние два пункта этого списка привносят в эволюцию некое «разумное начало». Только не в смысле *креационизма* (см. ниже), а как результат интеллектуальной деятельности рода *Homo*.

Говоря о современных представлениях об эволюционных процессах, нельзя не упомянуть хотя бы кратко, о подходах, *альтернативных* классическому дарвинизму и неодарвинизму.

Prof. M. Behe
Лехайский университет, Бетлехем, США

Среди западных ученых большой активностью в этом плане отличается известный биохимик профессор Майкл Бихи (M. Behe). Разработанная им концепция «несократимой сложности» является одной из идейных основ современного *креационизма*. То есть учения о сотворении и развитии мира в соответствии с неким данным свыше «разумным замыслом». Одна из его книг [19] называется достаточно выразительно: «Черный ящик Дарвина. Биохимический вызов эволюции». Совсем недавно Майклом Бихи опубликована работа [20], в которой он дает свое толкование результатов описанного выше долгосрочного эволюционного эксперимента с кишечной палочкой.

Среди российских ученых, придерживающихся, в отличие от Бихи, материалистических взглядов, но отстаивающих собственные представления об эволюции, я бы отметил академиков Георгия Александровича Заварзина и Эрика Михайловича Галимова.

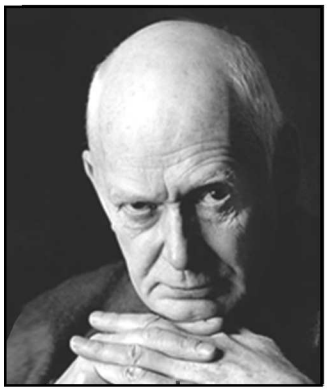
У академика Заварзина достаточно показательными являются уже сами названия работ, посвященных проблемам эволюционного развития жизни [21,22]. В статье [22] Георгий Александрович утверждает, что, поскольку в мире микробов, существующем на Земле около 4 млрд лет, не удается найти общего предшественника, теория Дарвина в нем не работает. По его мнению, чтобы существовать в мире микробов, нужно соответствовать своей среде обитания, а в эволюции биосферы главную роль играет не происхождение, а функциональное взаимодействие.

Точка зрения академика Галимова достаточно полно отражена в опубликованной им книге [23]. В ней утверждается, в частности, что дарвинизм не дает исчерпывающего знания проблем эволюции, и обращается внимание на возможное существенное значение для эволюции комбинаторного видообразования и *горизонтального переноса генов*. Здесь мы постепенно начинаем приближаться к центральной теме нашего обзора.

Целая коллекция различных взглядов на эволюционное развитие биоты и их обобщений содержится в двух книгах [24,25] ведущего научного сотрудника Института истории естествознания и техники РАН Юрия Викторовича Чайковского. В них, в частности, перечисляются основные, так сказать, «зарегистрированные на сегодняшний день» крупные направления развития эволюционной мысли:

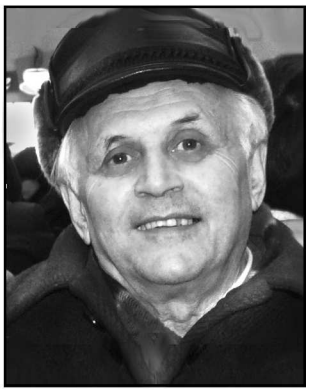
- *ламаркизм* (наследование приобретенных признаков, возможность передачи информации от фенотипа к генотипу);
- *жоффруизм* (изменение под прямым воздействием среды, в особенности, изменение ранних зародышевых стадий);
- *дарвинизм* (естественный отбор случайных отклонений);
- *номогенез* (развитие на основе закономерностей, а не случайностей).

Ю.В. Чайковский считается учеником и последователем известного ученого, геолога и палеоботаника Сергея Викторовича Мейена. Здесь мы упоминаем



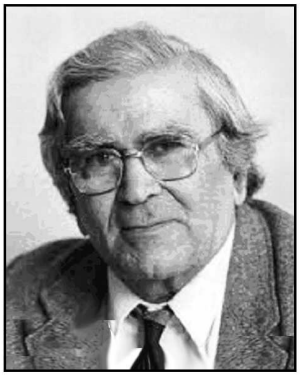
Акад. Г.А. Заварзин
Институт микробиологии РАН

Акад. Э.М. Галимов
Институт геохимии и аналитической химии РАН



Ю.В. Чайковский, к.т.н.,
ИИЕТ РАН

С.В. Мейен, д.г.-м.н.,
Геологический институт РАН,
лауреат Госпремии СССР 1989



Акад. А.Л. Тахтаджян
Ботанический институт РАН,
Герой соц. труда СССР 1990

С.В. Мейена как знаменитого эволюциониста, одного из разработчиков концепции *номогенеза* (чье развитие связывают также с работами Л.С. Берга – 1922, 1977 г.г.). Заметим, что в работах С.В. Мейена (см., например, [26]) предпринимались попытки сочетания принципов номогенеза с дарвинизмом. Ему же принадлежит и замечательное высказывание, весьма уместное на фоне нестихающих (порою весьма эмоциональных) споров приверженцев различных взглядов на эволюцию жизни: «В спорах рождается только склока, а истина рождается в работе».

Возвращаясь в лоно современного дарвинизма, отдадим должное еще одному выдающемуся армянско-российскому ботанику и эволюционисту академику Армену Леоновичу Тахтаджяну. Академик Тахтаджян является автором всемирно признанной филогенетической системы классификации высших растений и новой системы ботанико-географического районирования планеты. Им опубликована серия работ по теории эволюции (см., например, подборку [27]), получившая широкую известность. Стоит особо отметить блистательное эссе [28], написанное им в качестве комментария к изданиям на русском языке дарвиновского «Происхождения видов...».

5. О роли горизонтального переноса генов

Горизонтальный (межвидовой) перенос генетического материала между бактериями был впервые описан в 1959 году в работе японских авторов [29]. В этой работе была продемонстрирована передача устойчивости к антибиотикам *между бактериями разных видов*.

Считается, что впервые *эволюционное значение* горизонтального переноса генов было отмечено в работах профессора Калифорнийского университета Майкла Сиванена (M. Syvanen). О чем свидетельствует, в частности, название и время опубликования его статьи [30]. В ней автор утверждает, что «модель межвидового переноса генов могла бы помочь объяснить многие наблюдения, запутавшие эволюционистов, такие как быстрые скачки в эволюции и широко распространенное проявление параллелизма в палеонтологической летописи». Впоследствии этот подход был развит в работах многих других специалистов.

Среди российских ученых наибольшую активность в описании и анализе эволюционных аспектов горизонтального переноса генов проявляют академик Сергей Васильевич Шестаков [31] и уже упомянутый нами сотрудник Палеонтологического института РАН А.В. Марков [18].

Принципиальная схема горизонтального обмена генетическим материалом у прокариот, представленная на рис. 20, включает хорошо известные механизмы трансформации, конъюгации и фаговой трансдукции.

Большое значение для исследований молекулярных и клеточных механизмов горизонтального переноса генов имеет также феномен агробактериальной трансформации растений [32,33]. В нем реализован возникший в природе перенос генетического материала *от прокариот к эукариотам*, активно используемый в последнем десятилетии в генной инженерии растений. Его общая схема, показанная на рис. 21, отражает этапы прикрепления клеток, защиту Т-ДНК белками VirE2, ее перенос посредством Т-пилей и т.д.

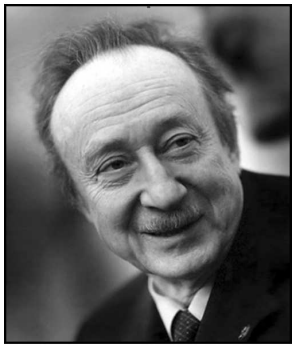
Из результатов последних лет по механизмам межклеточных коммуникаций у бактерий, обеспечивающих им обмен разнообразными метаболитами, можно отметить работу [34]. В ней выявлены структуры типа *нанотрубок*, связывающие клетки как внутри вида, так и на уровне межвидовых взаимодействий (рис. 22).

Высшим уровнем межвидовых генетических и метаболических обменов следует, вероятно, признать эволюционную историю разнообразных *симбиозов*. В них зачастую реализуется захват целых геномов с их последующим возможным перераспределением между партнерами с соответствующими изменениями их физиолого-биохимических функций.

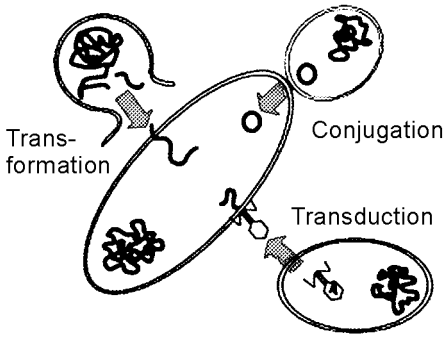
Одной из наиболее надежно обоснованных на сегодняшний день можно признать концепцию *симбиогенетического* происхождения клеточных органелл эукариотов, иллюстрацией которой служит схема на рис. 23, заимствованная из работы [35]. Случай «*a*» демонстрирует поглощение альфа-протеобактерий примитивной эукариотической клеткой из первоначально чисто трофических побуждений. Случай «*b*» показывает их превращение в симбионтов. Случай «*c*» иллюстрирует утрату симбионтом части генома с ее переносом в ядро клетки и превращением симбионта в митохондрию. Одновременно в этой части схемы показано поглощение эукариотом цианобактерий. Наконец, случай «*d*» отражает превращение цианобактерий в хлоропласты.

Prof. M. Syvanen
Калифорнийский университет, США

Среди многочисленных экспериментальных свидетельств в пользу теории симбиогенеза отметим публикацию российских авторов [36]. Средствами биоинформационного анализа они оценили распределение белковых доменов в надцарствах бактерий, архей и эукариот. Диаграмма на рис. 24 демонстрирует полученные ими результаты с наглядным указанием количества уникальных и обобществленных белковых доменов. Авторами охарактеризованы также типы важнейших биохимических функций, наследуемых при симбиотическом горизонтальном перераспределении генетического материала между партнерами из различных надцарств.



Акад. С.В. Шестаков
зав. каф. генетики МГУ, лауреат Госпремии СССР 1988



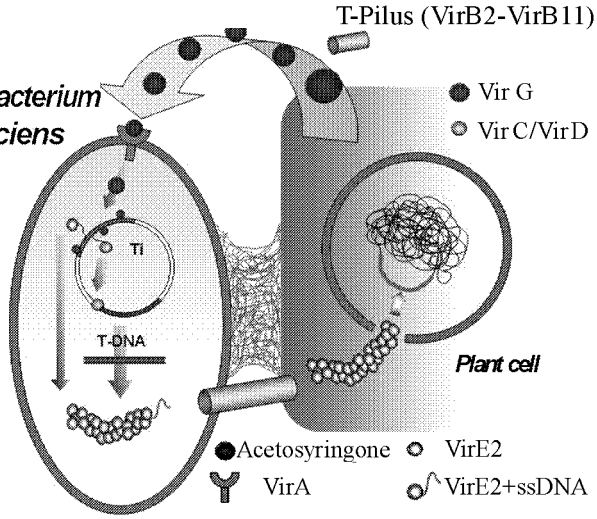


Рис. 20. Общая схема горизонтального обмена генами у бактерий

Рис. 21. Общая схема агробактериальной трансформации растений (http://www.rasmusfrandsen.dk/atmt.htm)

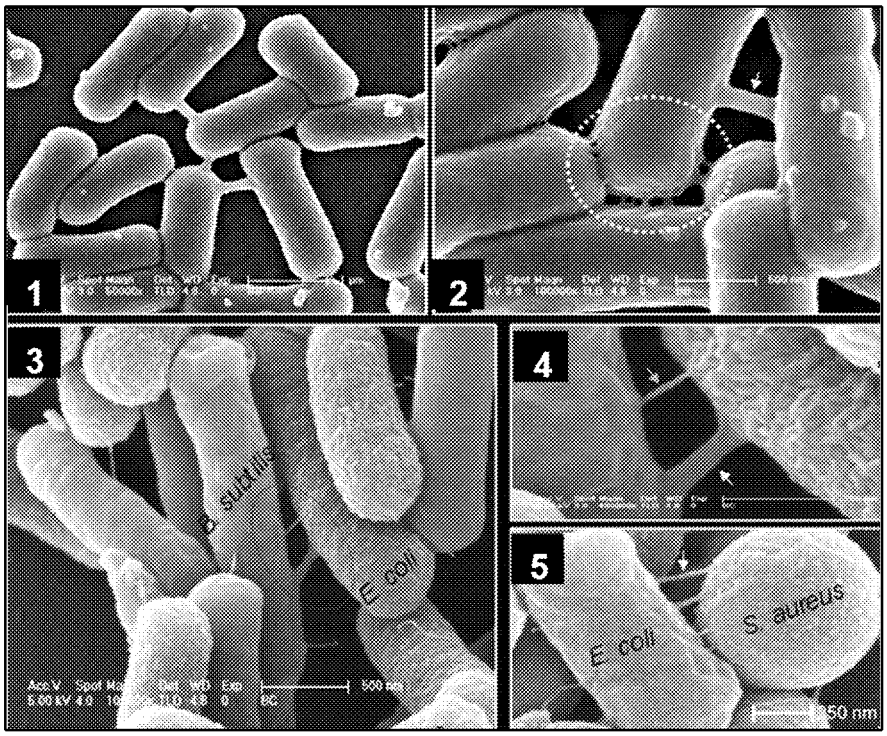


Рис. 22 . Клетки *Bacillus subtilis,* соединенные нанотрубками (1, 2), и межвидовые соединения посредством нанотрубок (3-5) [34]

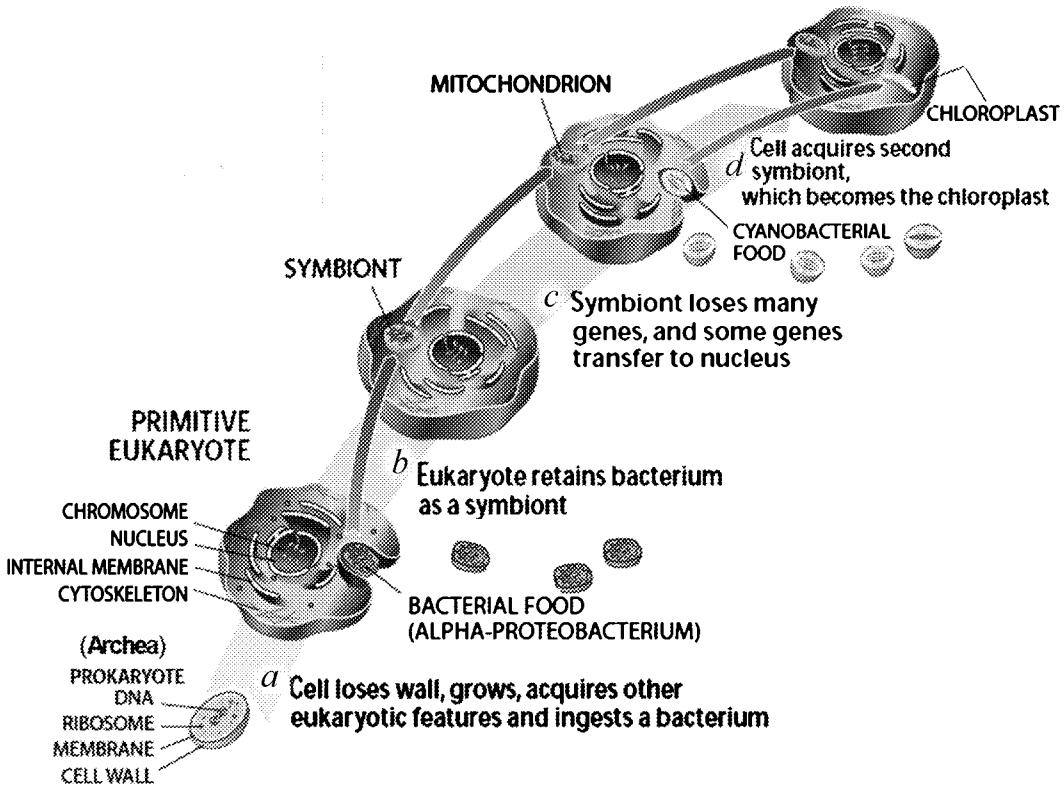


Рис. 23 Общая схема концепции симбиогенетического происхождения клеточных органелл эукариотов [35]

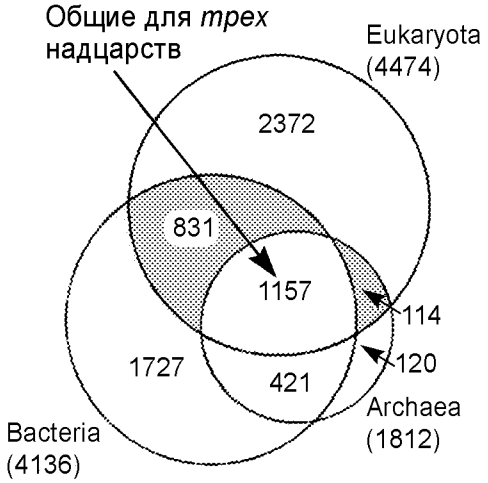


Рис. 24. Распределение в надцарствах общих и уникальных белковых доменов [36]

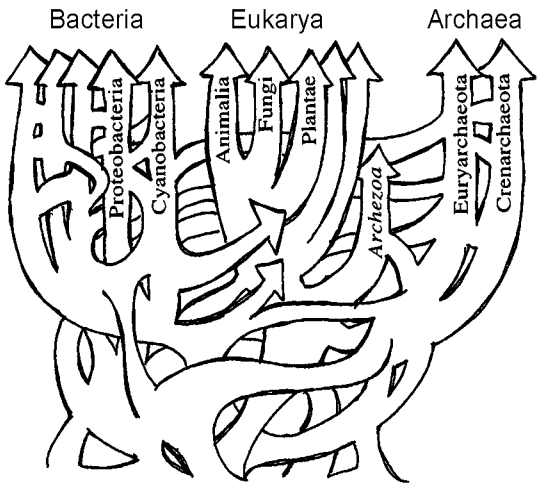
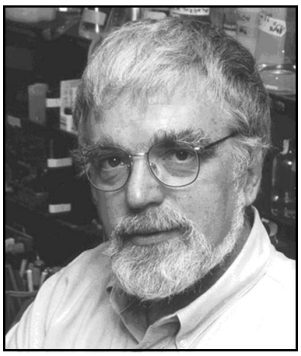


Рис. 25. Ретикулярное дерево или сеть, которая могла бы более адекватно представить историю жизни [37]



Prof. W.F. Doolittle
Почетный профессор,
Университет Далхаузи,
Галифакс, Канада

Схема Дулитла (W.F. Doolittle) 2000 года была в 2005 году дополнена Марковым и Куликовым соображениями о том, что предком ядерно-цитоплазматического компонента эукариот могла стать симбиотическая архея (см. в нижней части рис. 23). Из-за существенного возрастания концентрации свободного кислорода на определенном этапе земной эволюции у таких архей мог резко активизироваться процесс инкорпорации чужеродного генетического материала из внешней среды.

Теперь можно вернуться к универсальному древу жизни, приведенному на рис. 4, и оценить его изменения с учетом симбиогенетического происхождения клеточных органелл у эукариотов (см. рис. 3). По-видимому, первые схемы такого типа, отражающие возможные пересечения ветвей филогенетического дерева, обусловленные горизонтальным переносом генов, были опубликованы тем же Фордом Дулитлом в работе [37]. На одной из них (рис. 25) вместо укорененного по Вёзе древа жизни типа рис. 4 автором отражено наличие общего предполагаемого *предкового сообщества* бактерий и архей, выступающего в роли некоего «плавильного котла» эволюции. На этих ранних этапах весьма существенную (но отнюдь не эрозивную в эволюционном смысле) роль играл интенсивный горизонтальный обмен генов, придающий филогенетическому древу вид сильно переплетенной сети.

С ростом числа секвенированных геномов организмов и развитием математических методов биоинформационного анализа стал возможным переход от умозрительных схем (вроде приведенных на рис. 3, 25) к более точным расчетам. На рис. 26 представлены такие данные, опубликованные в работе [38]. Здесь показана трехмерная реконструкция эволюции прокариот с учетом горизонтального переноса, полученная по *экспериментальным* результатам для примерно *полумиллиона* генов из около *двухсот* секвенированных прокариотических геномов.

По мере продвижения эволюции в сторону эукариот и многоклеточных организмов влияние горизонтального переноса ослабевало с одновременным возрастанием роли естественного отбора и генетико-стохастических процессов [28]. При этом горизонтальный перенос становится относительно более редким событием, и филогенетическая сеть трансформируется в стандартное ветвящееся древо жизни по Вёзе (см. рис. 4). Довольно обширную информацию о горизонтальном переносе генов в эволюции видов внутри *эукариотических* царств можно найти в книге [18].

Отмечая фундаментальную роль симбиозов в эволюции жизни на Земле, в данном обзоре по необходимости я ограничиваюсь лишь перечислением ученых, можно сказать, отцов-основателей, чей вклад в развитие симбиологии наиболее часто отмечается в литературе: А. де Бари, А.С. Фаминцин, К.С. Мережковский, Б.М. Козо-Полянский. Среди них видное место занимают представители российской научной школы. Здесь же представлены ученые, олицетворяющие современное состояние этого направления. Среди них два директора институтов РАН и РАСХН – О.В. Бухарин и И.А. Тихонович, бывший заведующий кафедрой физиологии МГУ М.В. Гусев и одна из наиболее активных представительниц зарубежной научной школы профессор Линн Маргулис.

Несколько замечаний следует сделать о молекулярно-генетических механизмах эволюционных процессов. Существует два в корне различных пути, по которым новые гены могут появиться в геноме [39]. Это а) – *дупликация* некоторых или всех имеющихся в геноме генов и б) – их приобретение от других видов (*горизонтальный перенос*). Давление естественного отбора на систему дуплицированных генов может отразиться либо на обоих, либо на одном из них. В первом случае велика вероятность сохранения обоих генов. Тогда как при избирательном давлении естественного отбора на один из дуплицированных генов он может либо деградировать, либо приобрести новую функцию. Примерами организмов, претерпевших полную дупликацию геномов, является красиво цветущее растение резуховидка Таля (Арабидопсис) и пекарские дрожжи (рис. 27).

Как уже было сказано выше, горизонтальный перенос генов у эукариот наблюдается значительно реже. Исключением являются растения, способные образовывать новые полиплоиды путем слияния гамет родственных видов. В качестве примера на рис. 28 отмечен результат межвидового скрещивания культурной тучной пшеницы *Triticum turgidum* с дикорастущей травой эгилопсом оттопыренным. В результате

А.де Бари
«Явление симбиоза» 1879

А.С.Фаминцин
«О роли симбиоза в эволюции организмов» 1907

К.С.Мережковский
«Теория двух плазм, как основа симбиогенесиса» 1909

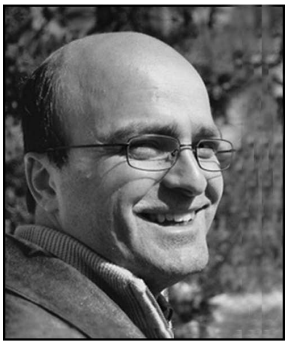
Б.М. Козо-Полянский
«Новый принцип биологии. Очерк теории симбиогенеза», 1924

О.В. Бухарин
ИКВС УрО РАН, ассоциативные симбиозы в организме человека

И.А. Тихонович
ВНИИСХМ РАСХН, бобовоизобиальные симбиозы

М.В. Гусев
биофак МГУ, экспериментальная симбиология, журнал Symbiosis

L. Margulis
Массачусетский унив., США, «Роль симбиоза в эволюции клетки»,



E.P.C. Rocha, Ph.D.,
Институт Пастера, Франция

T. Treangen, Ph.D.,
Унив. Мэриленда, США

был получен сорт мягкой летней пшеницы *T. Aestivum*, отличающейся улучшенными хлебопекарными свойствами.

Из результатов исследований последних лет по теме молекулярных механизмов эволюции обращает на себя внимание работа [40]. В ней франко-американский авторский дуэт – E.P.C. Rocha, T. Treangen – решал задачу оценки вклада дупликации и горизонтального переноса генов в экспансию белковых семейств в ходе эволюции прокариот.

Ими были исследованы 110 образцов геномов в широком диапазоне размеров из представительного набора семейств и родов бактерий. Методами сравнения последовательностей и кластеризации на 110 образцах геномов были идентифицированы около 60 тысяч белковых семейств, включающих приблизительно 400 тысяч белков. Оценки относительного вклада горизонтального переноса в эволюционное распространение белковых семейств прокариот (рис. 29) показали, что для всех исследованных образцов он находится на уровне примерно 90–100%. Эти и другие приведенные в статье наблюдения дали авторам основания для выводов о том, что большинство экспансий белковых семейств обусловлено переносом; перенос и дупликация генов играют разные роли в формировании эволюции биологических систем; перенос делает возможным приобретение новых функций, тогда как дупликация приводит к более высокой дозе гена. В своем заключении авторы констатируют, что при изучении эволюции биологических систем следует однозначно учитывать *преобладающую роль* горизонтального переноса генов в диверсификации белковых семейств.

В завершающей части данной статьи я хотел бы остановиться на некоторых результатах, представляющих особый интерес с точки зрения научной тематики ИБФРМ РАН.

Согласно его Уставу, главной целью деятельности Института является осуществление фундаментальных и прикладных исследований в области растительно-микробных, иных *симбиотических систем* и биотехнологических разработок на их основе. Важнейшим инструментом этой работы является коллекция непатогенных микроорганизмов ИБФРМ РАН, созданная в 1981 г. и преобразованная ныне в *Коллекцию ризосферных микроорганизмов*, зарегистрированную во Всемирном электронном каталоге (WDCM) под номером 1021 (см. на http://ibppm.ru/kollekciya_mikrobnyh_kultur.html).

Коллекция включает около *300 культур бактерий*, относящихся к родам: *Acidovorax, Aeromonas, Agrobacterium, Alcaligenes, Aquaspirillum, Arthrobacter, Azospirillum, Bradirhizobium, Brevundimonas, Camomonas, Ensifer, Enterobacter, Erwinia, Herbaspirillum, Kocuria, Micrococcus, Moraxella, Mycobacterium, Nocardioides, Paenibacillus, Pectobacterium, Pimelobacter, Pseudomonas, Rhizobium, Rhodococcus, Sinorhizobium, Xanthomonas*.

Центральное место в ней занимают бактерии рода *Azospirillum* (рис. 30) – 132 штамма, большая часть которых выделена из-под диких и культурных злаков

Рис. 26

Трехмерная реконструкция эволюции с учетом горизонтального переноса среди 181 прокариотического генома [38]

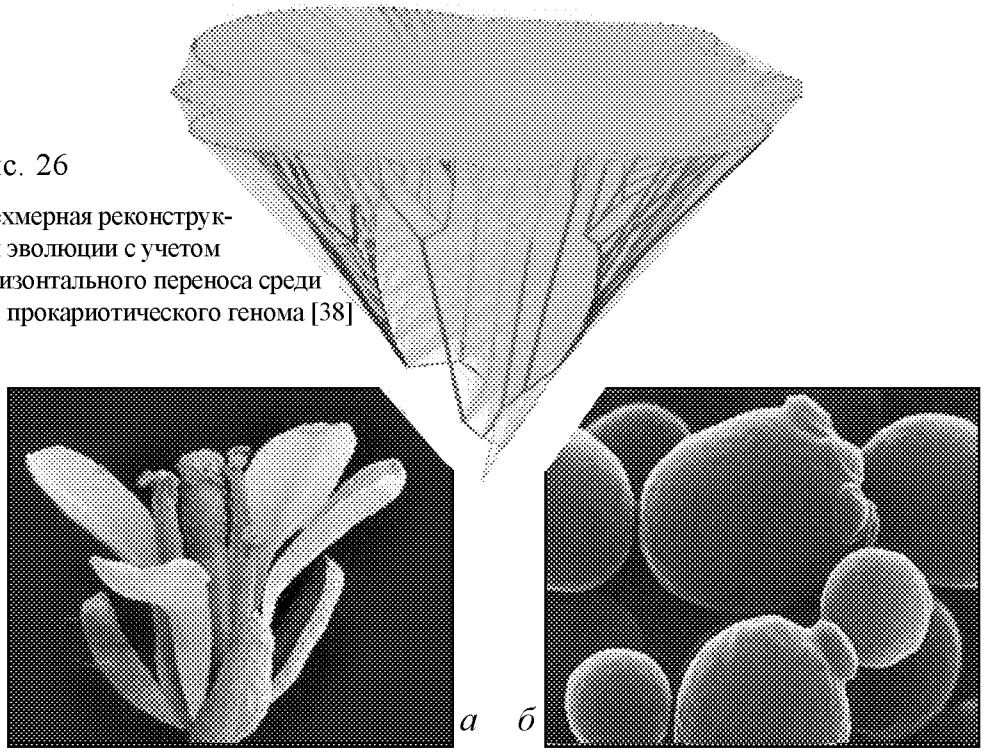


Рис. 27. Имеются доказательства возможной дупликации полных геномов *Arabidopsis thaliana* (*а*) и *Saccharomyces cerevisiae* (*б*)

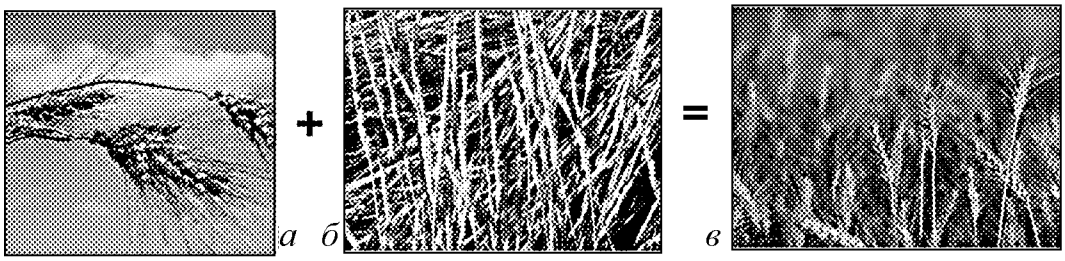


Рис. 28. Мягкая летняя пшеница *Triticum aestivum* (*в*) как результат межвидового скрещивания *T. turgidum* (*а*) и *Aegilops squarrosa* (*б*)

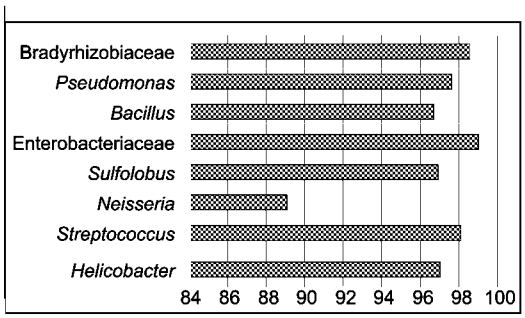


Рис.29. Относительный вклад (%) горизонтального переноса генов в экспансию белковых семейств [40]

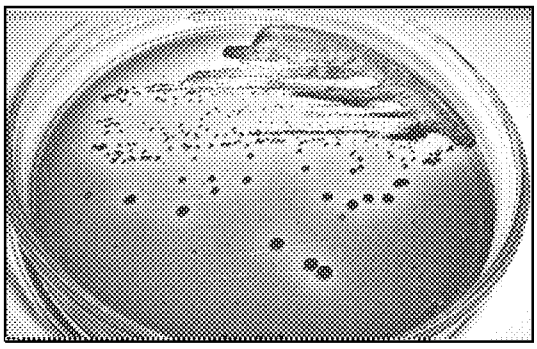


Рис. 30. Азоспириллы, выращенные на плотной питательной среде

Саратовской области. Это самая большая коллекция азоспирилл в России. Будучи ассоциативными азотфиксаторами, стимулирующими рост и развитие растений, эти бактерии служат одним из основных модельных объектов в исследованиях феномена растительно-микробной ассоциативности.

Нами разработана базовая концепция исследований механизмов взаимоотношений растений и ассоциативной микрофлоры с учетом традиций и последних достижений в области растительно-микробной симбиологии [41]. В ней предусмотрено познание симбиоза как *надорганизменной системы* с разнообразными взаимодействиями, направленными на *адаптацию* партнеров к среде обитания. Важная роль отводится анализу генетических процессов, происходящих при эктосимбиозе, спонтанному и индуцированному горизонтальному переносу генов. А также перспективам изучения коэволюции как совокупности согласованных макро- и микроэволюционных процессов в эктосимбиотических системах.

В связи с чем большой интерес для нас представляют опубликованные недавно результаты полногеномного секвенирования ДНК ряда штаммов азоспирилл и анализа их *эволюционной истории* [42,43]. На рис. 31 приведен фрагмент статьи [42] японских авторов, отражающий ее основной результат. Обращает на себя внимание наличие большого числа единичных репликонов у штамма *Azospirillum sp.* B510. В работе [44] такое строение генома азоспирилл трактуется как вероятная основа высокой пластичности их метаболизма и адаптационного потенциала.

Следующая публикация [43] является результатом работы авторского коллектива 26 специалистов из Франции, США, Австралии и Мексики. Заметим, что координатором этой большой работы является бывший студент Саратовского госуниверситета и затем сотрудник ИБФРМ РАН, ныне профессор университета штата Теннеси и сотрудник Окриджской национальной лаборатории США Игорь Борисович Жулин. К исследованному ранее штамму *A. sp.* B510 [42] добавлены результаты полногеномного секвенирования ДНК еще двух – *A. lipoferum* 4B и *A. brasiense* Sp245. Бактерии рода *Azospirillum* ассоциированы с *корнями наземных растений*. Однако, по результатам филогенетического анализа с использованием рибосомальной 16S РНК (рис. 32), в работе [43] показано, что в действительности все их близкие родственники являются *водными организмами*.

Проф. И.Б. Жулин

Университет штата Теннеси, Окриджская национальная лаборатория, США

В основных выводах статьи [43] утверждается, что в соответствии с полученными данными азоспириллы перешли из водной в наземную среду обитания значительно позже (около 400 миллионов лет тому назад), чем при предполагаемом основном разделении водных и наземных бактерий (около 3 миллиардов лет). Это событие практически совпадает по времени с выходом на сушу сосудистых растений.

Большинство конститутивных генов *Azospirillum* имеют ортологов у их близких водных родственников. Однако, почти *половина* генома азоспирилл была приобретена путем *горизонтального переноса* от отдаленно родственных *наземных бактерий*. Наибольшая часть горизонтально перенесенных генов кодирует функции, которые являются решающими для *адаптации* в ризосфере и *взаимодействия* с растениями-хозяевами.

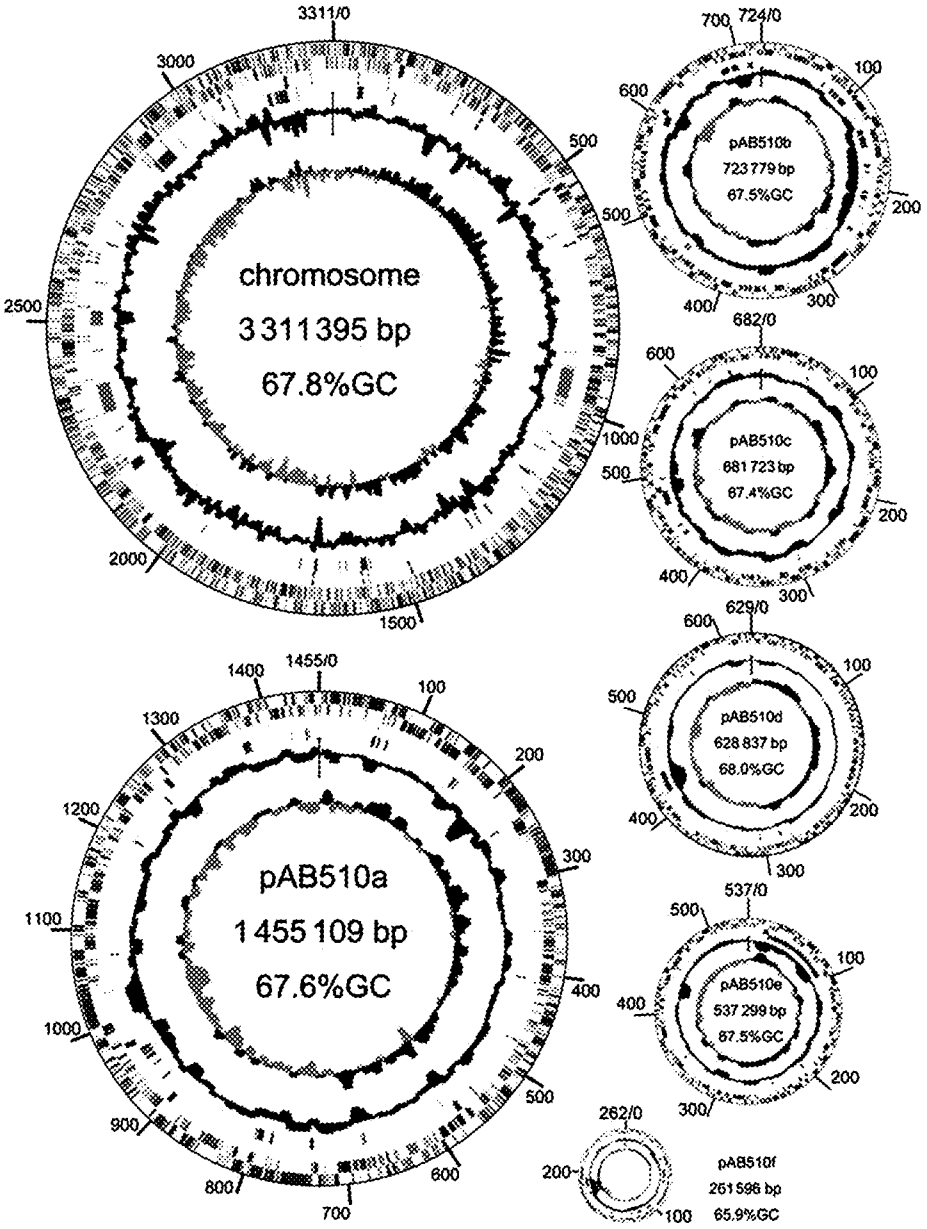


Рис. 31

Схематическое представление репликонов в геноме диазотрофного эндофита, выделенного из стебля культурного риса *Orya sativa cv. Nipponbare* [42]

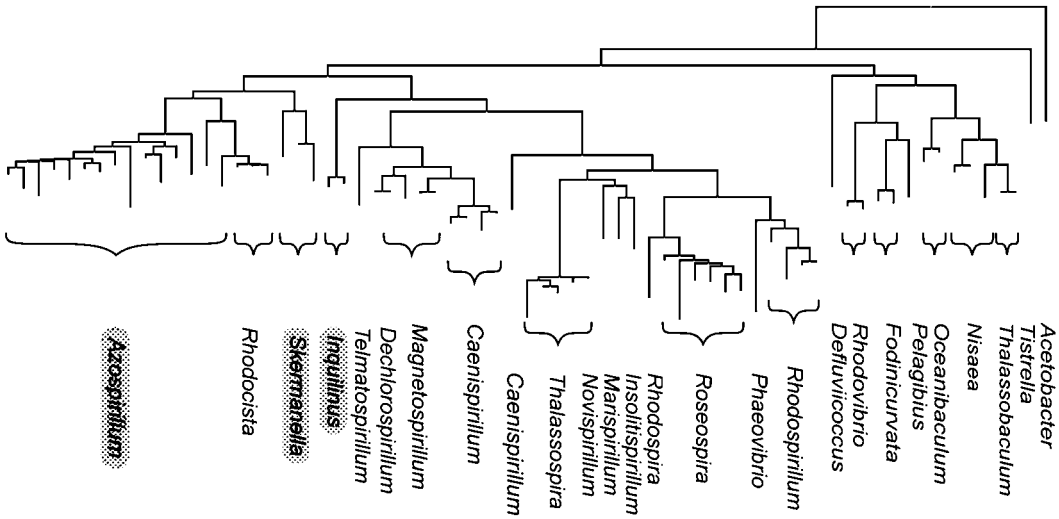
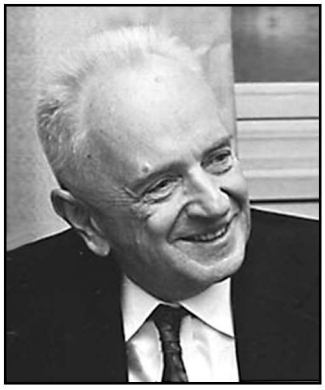


Рис. 32

Среда обитания рода *Azospirillum*
и его ближайшие аквабактериальные родственники [43]



Проф. Ф.Г. Добжанский
Калифорнийский университет
в Дэвисе, США

Несколько слов о современных изданиях по обсуждаемой теме. В дополнение к цитированной выше книге А.В. Маркова [18] (ставшего лауреатом премии в области научно-популярной литературы «Просветитель» 2011 г.) отметим выход в свет еще двух его книг [45,46]. В течение многих лет Александр Владимирович ведет также в Интернете специальный сайт, посвященный проблемам эволюционной биологии (http://evolbiol.ru).

В 2011–2012 годах опубликованы переводы на русский язык двух книг известнейшего специалиста в области эволюционной биологии профессора Оксфордского университета Ричарда Докинза [16,47]. Профессор Докинз считается одним из самых последовательных и азартных сторонников учения Дарвина.

Что касается альтернативных дарвинизму подходов, то они достаточно обстоятельно изложены в упоминавшихся выше книгах Ю.В. Чайковского [24,25].

Завершая данный обзор, я хотел бы процитировать высказывание еще одного выдающегося ученого, нашего бывшего соотечественника профессора *Феодосия Григорьевича Добжанского* : «Ничто в биологии не имеет смысла кроме как в свете эволюции». В 2010 году вышел в свет перевод на русский язык 3-го издания его фундаментальной работы [48]. Эта книга считается одним из самых значительных трудов по синтетической теории эволюции. Ее первое издание было опубликовано Добжанским в Америке в 1937 г. И для тех, кто помнит печальную историю становления и развития генетики в нашей стране (а кто не помнит – пусть поинтересуется), год и место издания этой книги должны иметь глубоко символическое (и предостерегающее!) значение.

Библиографический список

1. *Дарвин Ч.* Происхождение видов путем естественного отбора или сохранение благоприятных рас в борьбе за жизнь. 2-е изд., доп. СПб.: Наука, 2001.
2. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем // Сорос. обр. журн. 1996, № 8. С. 109.
3. *Woese C.R.* Interpreting the universal phylogenetic tree // PNAS. 2000. Vol. 97, № 15. P. 8392.
4. URL: http://www.zo.utexas.edu/faculty/antisense/downloadfilestol.html.
5. *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. Изд. 3. Синергетика: от прошлого к будущему. М.: URSS. 2010.
6. *Розанов А.Ю.* Когда появилась жизнь на Земле? // Вестник РАН. 2010. Т. 80, № 5–6. С. 533.
7. *Hoover R.B.* Fossils of cyanobacteria in CI1 carbonaceous meteorites: implications to life on comets, Europa and Enceladus // J. Cosmol. 2011. Vol. 13. P. 3811.
8. *Sharov A.A.* Genetic gradualism and the extraterrestrial origin of life // J. Cosmol. 2010. Vol. 5. P. 833.
9. *Joseph R., Wickramasinghe N.C.* Genetics indicates extra-terrestrial origins for life: the first gene. Did life begin following the big bang? // J. Cosmol. 2011. Vol. 16. 29. P. 6832.
10. *Спирин А.С.* Когда, где и в каких условиях мог возникнуть и эволюционировать мир РНК? // Палеонтол. журн. 2007, № 5. С. 11–19.
11. *Снытников В.Н.* Абиогенный синтез пребиотического вещества для биосферы Земли как стадия самоорганизации на астрофизической и палеонтологической шкале времени // Палеонтол. журн. 2007, № 5. С. 3.
12. URL: http://myxo.css.msu.edu/index.html.
13. *Lenski R.E., Travisano M.* Dynamics of adaptation and diversification: a 10000-generation experiment with bacterial populations // PNAS. 1994. Vol. 91, № 15. P. 6808.
14. *Blount Z.D., Borland C.Z., Lenski R.E.* Historical contingency and the evolution of a key innovation in an experimental population of *Escherichia coli* // PNAS. 2008. Vol. 105, № 23. P. 7899.
15. *Barrick J.E., Yu D.S., Yoon S.H., Jeong H., Oh T.K., Schneider D., Lenski R.E., Kim J.F.* Genome evolution and adaptation in a long-term experiment with Escherichia coli // Nature. 2009. Vol. 461. P. 1243.
16. *Докинз Р.* Самое грандиозное шоу на Земле: доказательства эволюции. М.: Астрель: CORPUS. 2012.
17. *Четвериков С.С.* О некоторых моментах эволюционного процесса с точки зрения современной генетики // Журн. эксперим. биол. 1926. Т. 2. Вып. 1. С. 3; Вып. 4. С. 237.
18. *Марков А.* Рождение сложности. Эволюционная биология сегодня: неожиданные открытия и новые вопросы. М.: Астрель: CORPUS, 2010.

19. *Behe M.J.* Darwin's black box. The biochemical challenge to Evolution. N.Y.: Simon & Shuster, 1998.
20. *Behe M.J.* Experimental evolution, loss-of-function mutations and the «first rule of adaptive evolution» // Quart. Rev. Biol. 2010. Vol. 85. № 4. P. 419.
21. *Заварзин Г.А.* Недарвиновская область эволюции // Вестник РАН. 2000. Т. 70, № 5. С. 403.
22. *Заварзин Г.А.* Составляет ли эволюция смысл биологии? // Вестник РАН. 2006. Т. 76, № 6. С. 522.
23. *Галимов Э.М.* Феномен жизни: между равновесием и нелинейностью. Происхождение и принципы эволюции. М.: Едиториал УРСС, 2006.
24. *Чайковский Ю.В.* Наука о развитии жизни. Опыт теории эволюции. М.: Товарищество научных изданий КМК, 2006.
25. *Чайковский Ю.В.* Активный связный мир. Опыт теории эволюции жизни. М.: Товарищество научных изданий КМК. 2008.
26. *Мейен С.В.* Проблема направленности эволюции. Итоги науки и техники. Зоология позвоночных. Том 7. М.: ВИНИТИ, 1975. С. 66.
27. *Тахтаджян А.Л.* Грани эволюции. Статьи по теории эволюции, 1943–2006 гг. СПб.: Наука, 2007.
28. *Тахтаджян А.Л.* Дарвин и современная теория эволюции. Чарлз Дарвин. Происхождение видов путем естественного отбора. 2-е изд., доп. СПб.: Наука, 2001. С. 517.
29. *Ochiai K., Yamanaka T., Kimura K., Sawada O.* Inheritance of drug resistance (and its transfer) between *Shigella* strains and between *Shigella* and *E. coli* strains (in Japanese) // Hihon Iji Shimpor. 1959. Vol. 1861. P. 34.
30. *Syvanen M.* Cross-species gene transfer; implications for a new theory of evolution // J. Theor. Biol. 1985. Vol. 112. P. 333.
31. *Шестаков С.В.* О ранних этапах биологической эволюции с позиций геномики // Палеонтол. журн. 2003, № 6. С. 50-57.
32. *Chilton M.-D., Drummond M.H., Merlo D.J., Sciaky D., Montoya A.L., Gordon M.P., Nester E.W.* Stable incorporation of plasmid DNA into higher plant cells: the molecular basis of crown gall tumorigenesis // Cell. 1977. Vol. 11. P. 263.
33. *Чумаков М.И., Моисеева Е.М.* Технологии агробактериальной трансформации растений *in planta* // Биотехнология. 2012, № 1. С. 8.
34. *Dubey G., Ben-Yehuda S.* Intercellular nanotubes mediate bacterial communication // Cell. 2011. Vol. 144, № 4. P. 590.
35. *Doolittle W.F.* Uprooting the tree of life // Scientific American. 2000, № 2. P. 90.
36. *Марков А.В., Куликов А.М.* Происхождение эвкариот: выводы из анализа белковых гомологий в трех надцарствах живой природы // Палеонтол. журн. 2005, № 4. С. 3.
37. *Doolittle W.F.* Phylogenetic classification and the universal tree // Science. 1999. Vol. 284, № 5423. P. 2124.
38. *Dagan T., Artzy-Randrup Y., Martin W.* Modular networks and cumulative impact of lateral transfer in prokaryote genome evolution // PNAS. 2008. Vol. 105, № 29. P. 10039.

39. *Браун Т.А.* Геномы. / Пер. с англ. М.- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.
40. *Treangen T.J., Rocha E.P.C.* Horizontal transfer, not duplication, drives the expansion of protein families in prokaryotes // PLoS Genetics. 2011. Vol. 7, № 1. e1001284. P. 1.
41. *Тихонович И.А., Проворов Н.А.* Симбиозы растений и микроорганизмов: молекулярная генетика агросистем будущего. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2009.
42. *Kaneko T., Minamisawa K., Isawa T., Nakatsukasa H., Mitsui H., Kawaharada Y., Nakamura Y., Watanabe A., Kawashima K., Ono A., Shimizu Y., Takahashi C., Minami C., Fujishiro T., Kohara M., Katoh M., Nakazaki N., Nakayama S., Yamada M., Tabata S., Sato S.* Complete genomic structure of the cultivated rice endophyte Azospirillum sp. B510 // DNA Res. 2010. Vol. 17, № 1 P. 37.
43. *Wisniewski-Dye F., Borziak K., Khalsa-Moyers G., Alexandre G., Sukharnikov L.O., Wuichet K., Hurst G.B., McDonald W.H., Robertson J.S., Barbe V., Calteau A., Rouy Z., Mangenot S., Prigent-Combaret C., Normand P., Boyer M., Siguier P., Dessaux Y., Elmerich C., Condemine G., Krishnen G., Kennedy I., Paterson A.H., Gonzalez V., Mavingui P., Zhulin I.B.* *Azospirillum* genomes reveal transition of bacteria from aquatic to terrestrial environments // PLoS Genetics. 2011. Vol. 7, № 12. e1002430. P. 1.
44. *Katsy* E.I. Plasmid plasticity in plant-associated bacteria of the genus *Azospirillum* // In: Bacteria in agrobiology: plant growth responses / Ed. D.K. Maheshwari. Berlin: Springer, 2011. P. 139.
45. *Марков А.* Эволюция человека. В 2 кн. Кн. I. Обезьяны, кости и гены. М.: Астрель: CORPUS, 2012.
46. *Марков А.* Эволюция человека. В 2 кн. Кн. II. Обезьяны, нейроны и душа. М.: Астрель: CORPUS, 2012.
47. *Докинз Р.* Расширенный фенотип: длинная рука гена. М.: Астрель: CORPUS, 2011.
48. *Добжанский Ф.* Генетика и происхождение видов. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010.

Институт биохимии и физиологии растений и микроорганизмов РАН

Поступила в редакцию 22.02.2013

CURRENT VIEWS OF EVOLUTION: ON THE ROLE OF HORIZONTAL GENE TRANSFER

S. Yu. Shchyogolev

This article is an extended summary of a lecture given to undergraduate and postgraduate students of Saratov State University's Faculty of Nonlinear Processes at the School-cum-Conference «Nonlinear Days for the Young in Saratov – 2012». The article presents a brief review of the literature reflecting the foundations of the modern theory of biological evolution. Among the vast diversity of papers reporting various approaches to the problem (including a number of seminal studies on the self-organization of open systems) and analyzing experimental (sometimes quite contradictory) data, preference is

given to studies by Russian and foreign authors that are believed by the lecturer to be of the most interest to microbiologists. Special emphasis is placed on the role of interspecies (horizontal) exchange of genetic information; the significance of such exchange for the evolution, emergence, and functioning of a wide range of endo- and ectosymbiotic plant-microbe systems; and genetic engineering.

Keywords: Biological evolution, horizontal gene transfer, open systems, panspermia, prokaryotes, self-organization, symbiogenesis, phylogeny.

Послесловие

В заключительном абзаце данной статьи имеются в виду драматические события в истории биологической науки, связанные с гонениями на выдающихся российских ученых-генетиков (Н.К. Кольцова, Н.И. Вавилова, Н.В. Тимофеева-Ресовского, А.А. Баева и др.). В те незапамятные времена вмешательство властей в научную деятельность ограничивалось запретами отдельных научных направлений: генетики, а впоследствии кибернетики и квантовой механики. Что самым пагубным образом сказывалось на развитии фундаментальной науки в России, чей уровень с большими трудами и жертвами восстанавливался усилиями поколений российских ученых.

В июле 2013 года власти решили пойти дальше и предприняли попытку законодательного «реформирования» РАН, насчитывающей почти 300-летнюю историю, означающего на деле ее разгром с переподчинением институтов РАН чиновничьим структурам и отчуждением собственности, находящейся в ее оперативном управлении, постоянном (бессрочном) пользовании и т.д. Учитывая исторический опыт, нетрудно представить себе последствия этого очередного «регулирования» деятельности ученых, осуществленного законодателями в беспрецедентно короткие сроки (3 дня на два чтения закона в Госдуме!) без какого-либо обсуждения среди самих ученых и в экспертном сообществе.

2.08.2013 *Щеголев С. Ю.*

Щеголев Сергей Юрьевич – родился в Саратове (1946), окончил Саратовский госуниверситет (СГУ, 1968). После окончания СГУ работал в НИИ Химии СГУ. С 1981 года работает в ИБФРМ РАН в должности заведующего лабораторией, с 2008 года – директором института. С 1990 года работает по совместительству профессором кафедры органической и биоорганической химии СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИВС РАН (Санкт-Петербург, 1983) и доктора химических наук в СГУ (2000) в области физической химии полимерных дисперсных систем. В настоящее время научные интересы сосредоточены на иммунохимических и физиолого-биохимических исследованиях широкого спектра биополимеров и клеток. Автор монографий «Характеристические функции светорассеяния дисперсных систем» (в соавторстве с В.И. Клениным и В.И. Лаврушиным), «Золотые наночастицы: синтез, свойства, биомедицинское применение» (в соавторстве с Л.А. Дыкманом, В.А. Богатыревым и Н.Г. Хлебцовым), «Gold nanoparticles as an antigen carrier and an adjuvant» (в соавторстве с Л.А. Дыкманом, С.А. Староверовым и В.А. Богатыревым). Опубликовал 147 научных статей по указанным выше направлениям. Член Научного совета РАН по микробиологии.

410049 Саратов, пр-т Энтузиастов, д. 13
Институт биохимии и физиологии растений и микроорганизмов РАН
E-mail: su@ibppm.sgu.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 4, 2013 УДК 537.86, 530.182

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СИНТЕТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ГЕННОЙ РЕГУЛЯЦИИ

М.В. Иванченко, О.И. Канаков, Р.А. Котельников, И.Б. Крылов

Синтетические регуляторные элементы, встроенные в клетку, могут функционировать в известной степени независимо от основной, природной системы. Экспериментальные и теоретические исследования малых синтетических сетей позволяют лучше понять динамические механизмы генной регуляции в целом. Цель данной статьи – дать представление о современных математических подходах и методах в этой области, в первую очередь, в рамках нелинейной динамики.

Ключевые слова: Нелинейная динамика, математическое моделирование, генная регуляция.

Введение

Жизнедеятельность клетки регулируется динамическими процессами взаимной активации и деактивации генов, составляющих геном клетки [1]. Такие ансамбли взаимодействующих генов называют генными сетями или цепями [2]. Подход синтетической биологии заключается в построении малых искусственных генных сетей, которые могут быть изучены достаточно детально как экспериментально, так и теоретически [3]. Синтетические генные сети обычно состоят из нескольких взаимодействующих генов, которые встраиваются в живую клетку и практически не взаимодействуют с собственными генами клетки. Хотя искусственные генные сети, доступные для реализации на текущем уровне развития синтетической биологии, существенно уступают в сложности реальным генным сетям живых клеток, они служат хорошей экспериментальной основой для проверки математических моделей, методов и подходов к описанию регуляторных сетей, в том числе, естественных. Искусственные генные сети имеют и собственные привлекательные перспективы практического применения в здравоохранении [4, 5], биоэнергетике [6], экологии [7] и в других областях.

К настоящему времени нелинейная динамика является основным математическим аппаратом исследования динамики сетей генной регуляции. Ее результаты

блестяще подтверждаются биологическими экспериментами. Так, на основе синтетических генных сетей реализованы бистабильные элементы – переключатели [8], автоколебательные элементы – осцилляторы [9, 10] и счетчики событий [11]. В данной статье рассмотрены методы математического моделирования динамики синтетической генной регуляции [12], приведены примеры исследования базовых моделей и динамических режимов, а также дан краткий обзор основных современных результатов и актуальных направлений исследований.

1. Математические модели транскрипционной регуляции

В основе математических моделей динамики транскрипционной регуляции лежат кинетические уравнения биохимических процессов, которые обеспечивают производство белков в клетке. Непосредственным регулятором экспресии гена является промоутер, область ДНК, предшествующая кодирующей ген последовательности. При конструировании синтетической генной сети в ее составе предусматриваются транскрипционные факторы – белки, которые могут связываться с используемыми промоутерами и модулировать таким образом активность гена. Различают регулируемые и постоянно активные промоутеры. Регулируемые промоутеры содержат элементы последовательности ДНК, называемые сайтами оператора, связываясь с которыми транскрипционные активаторы усиливают, а транскрипционные репрессоры ослабляют связывание РНК-полимеразы с этим участком ДНК и, как следствие, экспрессию гена в целом (рис. 1).

Рассмотрим метод построения математической модели на примере простейшего промоутера, содержащего единственный сайт оператора [12]. Многие белки, использующиеся в синтетической биологии, приобретают свойства транскрипционных регуляторов только в состоянии олигомеров (комплексов из нескольких молекул белка, обычно двух или четырех). Для иллюстрации в нашем примере используем случай димера. Предположим также, что число молекул ДНК и транскрипционного

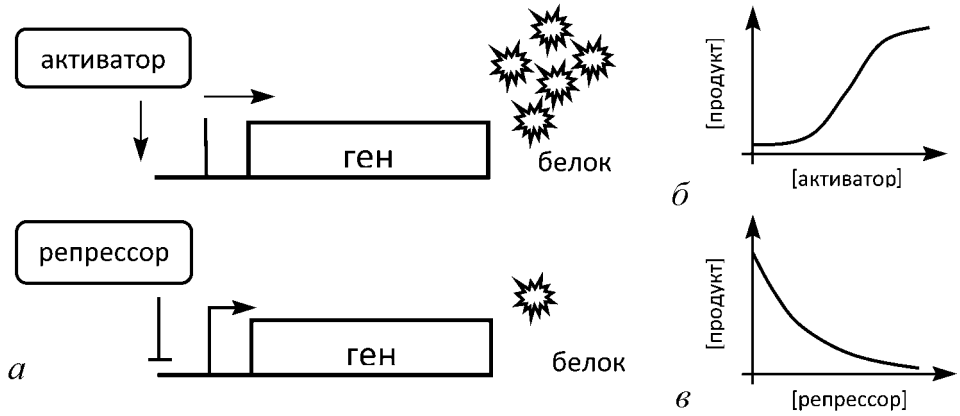


Рис. 1. Два основных типа транскрипционной регуляции – активация и репрессирование генов (*а*); типичный вид зависимости скорости генерации белка-продукта от концентрации молекул транскрипционного активатора (*б*) и репрессора (*в*)

фактора в клетке постоянно. Тогда можно записать следующие химические реакции:

$$
\begin{aligned}
&P + P \underset{k_{-d}}{\overset{k_d}{\rightleftharpoons}} P_2, \\
&O_u + P_2 \underset{k_{-b}}{\overset{k_b}{\rightleftharpoons}} O_b,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где P и P_2 обозначают одиночные молекулы и димеры белка; O_b и O_u – связанные с димером белка и свободные операторы, соответственно; k_d, k_{-d}, k_b, k_{-b} – кинетические коэффициенты прямых и обратных реакций. Для соответствующих концентраций в равновесном состоянии получаем

$$
\begin{aligned}
&k_d P^2 = k_{-d} P_2, \\
&k_b O_u P_2 = k_{-b} O_b, \\
&O_u + O_b = N = \text{const},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где последнее уравнение вытекает из предположения о постоянстве числа молекул ДНК в клетке и, следовательно, постоянства полного числа операторов.

Решая эти уравнения, получаем выражения для числа связанных и свободных операторов в виде так называемых функций Хилла [13]

$$
\begin{aligned}
&O_b = N \frac{(P/K)^2}{1 + (P/K)^2}, \\
&O_u = N \frac{1}{1 + (P/K)^2}, \\
&K = \sqrt{\frac{k_{-b} k_{-d}}{k_b k_d}}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь параметр K носит название константы Хилла и может быть интерпретирован как концентрация транскрипционного фактора, при которой половина операторов связана. Степень при концентрации мономера белка (в данном случае 2) называется коэффициентом Хилла или кооперативностью и соответствует степени олигомеризации транскрипционного фактора (заметим, что в случае сложного взаимодействия с промоутером наилучшее совпадение с экспериментально измеренным откликом может дать дробная степень).

Итак, динамика концентрации продукта экспрессии гена, белка X, может быть записана следующим образом:

$$
\dot{x} = \alpha_b N \frac{(P/K)^2}{1 + (P/K)^2} + \alpha_u N \frac{1}{1 + (P/K)^2} - r_{deg}(x),
\tag{4}
$$

где α_b, α_u – скорости производства белка геном со связанным и свободным операторами, соответственно; $r_{deg}(x)$ – функция, описывающая зависимость скорости деградации белка X от его концентрации в клетке. Для гена, регулируемого транскрипционным активатором, коэффициенты соотносятся как $\alpha_b \gg \alpha_u$, а для регулируемого транскрипционным репрессором – $\alpha_b \ll \alpha_u$.

Биохимические процессы в клетке представляют собой набор дискретных молекулярных событий. В отдельной клетке число копий синтетического гена обычно

не превосходит нескольких десятков, поэтому эффекты дискретности могут наблюдаться в эксперименте [14]. В связи с этим результаты анализа нелинейных дифференциальных уравнений зачастую проверяются в численном моделировании соответствующих марковских случайных процессов [15], в данном случае – согласно уравнениям (1).

В простейшем случае эффект деградации белка может достигаться за счет уменьшения его концентрации в процессе роста и деления клетки. Тогда имеет место так называемая экспоненциальная деградация

$$r_{deg} = \gamma x, \tag{5}$$

где γ – некоторый кинетический коэффициент. Во многих случаях, однако, процесс деградации желательно ускорить и (или) сделать контролируемым. Для этого ген модифицируется специальной меткой, которая делает синтетический белок-продукт видимой целью для молекулярных механизмов клеточной деградации. Скорость деградации при этом становится зависимой от числа участвующих в процессе молекул-ферментов (точнее – ограниченной этим числом), и формализм Хилла дает

$$r_{deg} = \gamma \frac{x}{K_m + x}, \tag{6}$$

где K_m – некоторая константа. Заметим, что хотя в некотором диапазоне зависимость (6) аппроксимируется линейной (5), необходимо помнить, что нелинейное ограничение может качественно изменить динамику исследуемой системы.

Важно иметь в виду, что процесс производства белка состоит из нескольких промежуточных этапов: прикрепление РНК-полимеразы к ДНК и создание матричной РНК (транскрипция), транспорт мРНК из ядра (у эукариотов), создание рибосомой белковой аминокислотной последовательности по мРНК (трансляция), олигомеризация белка к конечной функциональной форме (обычно димер или тетрамер). Моментальное изменение скорости наработки белка при изменении концентрации транскрипционного фактора, заложенное в уравнении (4), является не более чем аппроксимацией. Как мы увидим в следующем разделе, реальная динамика может оказаться существенно отличной.

Существует два основных подхода к построению более реалистичных моделей. Первый состоит в более детальном описании процесса. Например, можно выделить этапы транскрипции и трансляции (считая, что результатом последней является функциональный белок). Тогда получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \alpha_b N \frac{(P/K)^2}{1 + (P/K)^2} + \alpha_u N \frac{1}{1 + (P/K)^2} - r_m(m), \\ \dot{x} &= r_{tl} m - r_x(x), \end{aligned} \tag{7}$$

где m – количество молекул мРНК; $r_m(m)$, $r_x(x)$ – функции деградации мРНК и конечного белка; r_{tl} – скорость трансляции. Модель может быть детализирована и далее, например, учетом кинетики олигомеризации белка-продукта. Основная проблема этого подхода сотоит в том, что количественные значения параметров промежуточных реакций в подавляющем большинстве случаев неизвестны.

Другим распространенным подходом является феноменологическое описание каскада биохимических реакций как системы с задержкой

$$\dot{x} = \alpha_b N \frac{(P(t-\tau)/K)^2}{1+(P(t-\tau)/K)^2} + \alpha_u N \frac{1}{1+(P(t-\tau)/K)^2} - r_{deg}(x), \tag{8}$$

где τ – некоторый хорошо определенный параметр, как было показано в [16].

2. Автоколебания

Рассмотрим простейший пример регуляторной генной динамики – модель авторепрессора. Биологически он может быть реализован в виде гена с промоутером, ингибируемым белком – продуктом экспрессии гена (рис. 2, *а*). С точки зрения нелинейной динамики, это система с отрицательной обратной связью, которая при определенных условиях может демонстрировать неустойчивость стационарного режима и возникновение автоколебаний через бифуркацию Андронова–Хопфа. Действительно, в недавнем эксперименте подобный синтетический генный осциллятор был сконструирован, как и более сложный вариант, дополнительно содержащий транскрипционный активатор [10]. В природных генных сетях подобные принципы организации автоколебаний обнаруживаются, например, в циркадных осцилляторах, управляющих суточной активностью клеток [17].

Легко видеть, что для любого значения коэффициента Хилла n одномерная модель

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{1+x^n} - x, \tag{9}$$

где часть параметров исключена за счет масштабирования переменной и времени, имеет единственное устойчивое состояние равновесия (рис. 2, *б*), являющееся корнем полинома

$$x_0^{n+1} + x_0 - \alpha = 0. \tag{10}$$

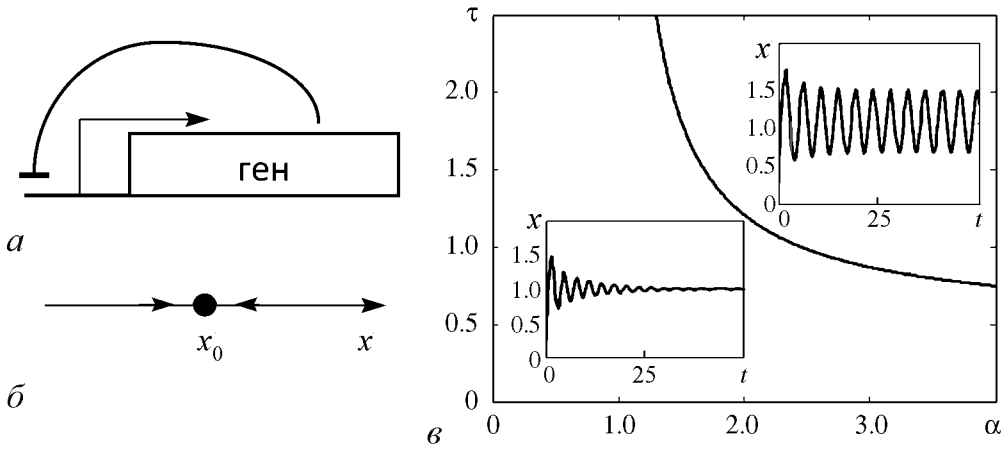


Рис. 2. *а* – принципиальная схема авторепрессора; *б* – глобально асимптотически устойчивое состояние равновесие в одномерной модели без задержки (9); *в* – разбиение пространства параметров $\{\alpha, \tau\}$ модели с задержкой (11) на области стационарной и автоколебательной динамики и типичные реализации

Интересно отметить, что учет динамики мРНК наподобие (7) не дает автоколебаний. Состояние равновесия в двумерном фазовом пространстве – либо устойчивый узел, либо фокус. Однако добавление третьего компонента (который может быть интерпретирован как промежуточная, неактивная форма белка, возможно требующая активации неким ферментом или разворачивания) позволяет получить автоколебательный режим, например, в модели осциллятора Гудвина [18].

Более биологически ясная математическая модель системы с задержкой

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{1 + x^n(t - \tau)} - x \tag{11}$$

также демонстрирует автоколебания. В самом деле, линеаризуя систему (11) вблизи состояния равновесия (10)

$$x(t) = x_0 + \xi(t), \quad |\xi(t)/x_0| \ll 1, \tag{12}$$

после несложных преобразований получаем

$$\dot{\xi}(t) \approx n\left(\frac{x_0}{\alpha} - 1\right)\xi(t - \tau) - \xi(t). \tag{13}$$

Предполагая $\xi(t) \sim e^{\lambda t}$, приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda = n\left(\frac{x_0}{\alpha} - 1\right)e^{-\tau\lambda} - 1. \tag{14}$$

В точке бифуркации Андронова–Хопфа характеристические показатели являются чисто мнимыми $\lambda = \pm i\omega$. Разделяя действительную и мнимую части (14), получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 &= n^2\left(1 - x_0/\alpha\right)^2 - 1, \\ \cos\omega\tau &= -\frac{1}{n(1 - x_0/\alpha)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Принимая во внимание, что $x_0 \leq \alpha$ (10), получаем необходимое условие для возникновения автоколебаний $n \geq 2$. Заметим, что авторепрессор $LacI$, использовавшийся в эксперименте [10], становится транскрипционным фактором в состоянии тетрамера, то есть его кооперативность равна 4. Система (15) определяет соотношение между мнимой частью характеристического показателя в точке бифуркации (которая может служить оценкой частоты автоколебаний недалеко от бифуркационной границы) и временем задержки

$$\cos\omega\tau = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}. \tag{16}$$

В частности, для $\omega > 1$ получаем $\omega\tau \sim \pi/2$ и период $T = 2\pi/\omega \sim 4\tau$. Этот результат показывает, что период возникающих колебаний не обязательно близок по величине к времени задержки и может существенно превосходить его.

Бифуркационная кривая может быть получена численным решением уравнений (10) и (15). Пример такой кривой для $n = 4$ и характерные динамические режимы представлены на рис. 2, *в*. Более глубокий анализ динамики системы авторепрессора заинтересованный читатель может найти в работе [19].

3. Бистабильный элемент

Другим крайне важным типом регуляторной динамики является возможность выбора системой одного из нескольких устойчивых состояний в зависимости от начальных условий, бистабильность или мультистабильность. Такое поведение может лежать в основе изменчивости поведения клеток в зависимости от внешней среды, внешних воздействий, от предыстории. Самым известным подобным контуром среди природных является, пожалуй, генный переключатель λ-бактериофага между пассивным и активным состояниями [20].

Синтетический аналог в виде взаимно репрессирующих генов (рис. 3, *а*) был впервые экспериментально реализован в двух вариантах и исследован в работе [8]. В обоих контурах одним из репрессоров был выбран $lacI$, вторым – либо температурно-чувствительный λ репрессор, либо $tetR$. Переключение между состояниями с доминирующей экспрессией одного или другого репрессора было реализовано с помощью «импульсов» концентраций химических веществ, понижающих активность избранных репрессоров, либо «импульсов» температуры.

Простейшая математическая модель динамики взаимных репрессоров имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{K_1}{1+x_2^{n_2}} - x_1, \\ \text{ъ}\dot{x}_2 &= \frac{K_2}{1+x_1^{n_1}} - x_2, \end{aligned} \tag{17}$$

где $x_{1,2}$ – безразмерные концентрации молекул белков-репрессоров, $n_{1,2}$ – их кооперативность, $K_{1,2} > 0$ – скорости производства белков в отсутсвие репрессирующего действия оппонента.

Рассмотрим частный случай $K_1 = K_2 = K$, $n_1 = n_2 = n$. В силу симметрии системы уравнений (17), состояния равновесия либо лежат на биссектрисе $x_1 = x_2$, либо образуют симметричные пары (x_1, x_2), (x_2, x_1). Решения первого типа являются корнями полинома

$$x^{n+1} + x - K = 0. \tag{18}$$

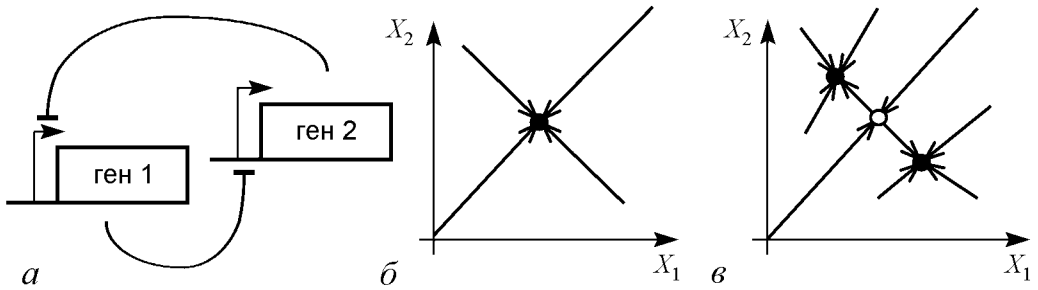


Рис. 3. *а* – принципиальная схема бистабильного элемента, построенного на базе двух взаимных репрессоров; качественный вид фазового портрета системы (17) в режимах моностабильности (*б*) и бистабильности (*в*)

Легко видеть, что (18) всегда имеет ровно один действительный положительный корень. Линеаризация (17) в окрестности этого состояния равновесия дает характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - \frac{n^2}{K^2} x^{2(n+1)} = 0 \tag{19}$$

с корнями

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \frac{n}{K} x^{n+1}. \tag{20}$$

Используя (18) и (20), получаем, что симметричное состояние равновесия устойчиво при

$$K < K^* = \frac{n}{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \tag{21}$$

и становится седловым при $K > K^*$. Отметим, что потеря устойчивости возможна, только если кооперативность репрессоров больше 1.

Для $n = 2$ ($K^* = 2$) несложно найти все состояния равновесия системы (17), воспользовавшись тем, что симметричное решение удовлетворяет уравнению (18). После понижения степени полинома, уравнение для асимметричных состояний равновесия будет иметь вид

$$x^2 - Kx + 1 = 0, \tag{22}$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4}}{2}, \text{ при } K \geq K^* = 2. \tag{23}$$

Таким образом, при $K = 2$ имеет место бифуркация трехкратного состояния равновесия, и при $K > 2$ система действительно демонстрирует бистабильность (рис. 3, *б, в*). В одном из устойчивых состояний доминирует один из репрессоров ($X_1 > X_2$), в другом – другой ($X_1 < X_2$). Выбор состояния зависит от расположения начальных условий на фазовой плоскости относительно сепаратрис седла, или от положения изображающей точки в результате внешнего воздействия на систему. Результаты исследовния более общего случая $K_1 \neq K_2$ и $n_1 \neq n_2$ можно найти в работе [8].

Интересное развитие работы в области динамических механизмов принятия клеточных решений получили в недавней статье [21]. В ней авторы исследовали влияние скорости принятия клеточных решений на исход процесса. В рассмотренной ими модели бифуркационные параметры (аналоги $K_{1,2}$ в модели (17)) изменялись во времени так, что регуляторная система переходила от моностабильного состояния к бистабильному. Оказалось, что в условиях асимметрии между репрессорами прохождение бифуркационной точки с медленной скоростью приводило к режиму доминирования более сильного репрессора, в то время как быстрое прохождение обеспечивало практически равную вероятность доминирования сильного или слабого.

Эти эффекты, по мнению авторов, могут играть существенную роль в процессах принятия генно-регулируемых клеточных решений в нестационарных условиях, таких как дифференциация, развитие клеток и онкогенез [22–24].

4. Последовательная активность

Последовательная, упорядоченная активация генов является еще одним базовым типом генной регуляции. Первая экспериментальная реализация такой синтетической генной динамики – так называемый «репресселятор» – была выполнена в работе [9]. В конструкции контура авторы воплотили принцип игры «камень, ножницы, бумага»: каждый из трех репрессоров ($LacI$, $TetR$, cI λ-фага) ингибировал экспрессию «следующего», как показано на рис. 4, *а*. В результате в надлежащих условиях наблюдалось возникновение автоколебаний с попеременной экспрессией генов.

Для теоретического анализа авторы использовали следующую математическую модель, детализирующую динамику каждой мРНК m_i и белка-продукта x_i:

$$\begin{aligned} \dot{m}_i &= \frac{\alpha}{1+x_j^n} - m_i, \\ \dot{x} &= -\beta(x_i - m_i), \\ i &= \{lacI, tetR, cI\}, \\ j &= \{cI, lacI, tetR\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Координаты состояний равновесия данной системы уравнений определяются из

$$\begin{aligned} m_i &= x_i = x, \\ x^{n+1} &+ x - \alpha = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

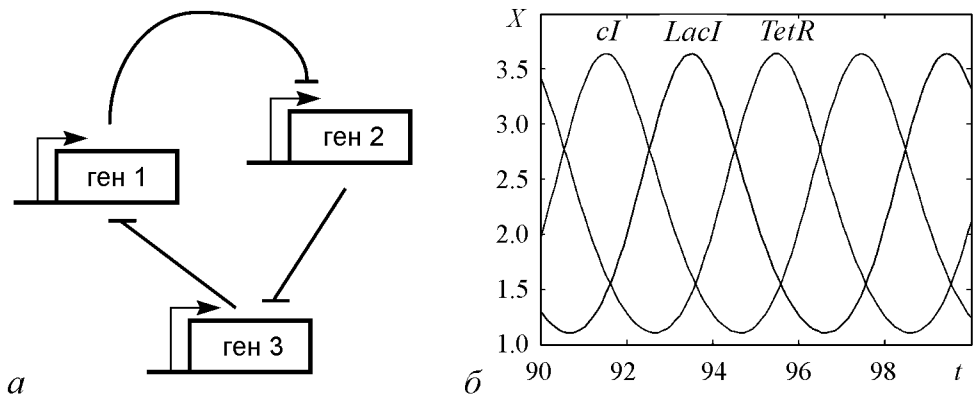


Рис. 4. *а* – принципиальная схема контура на базе трех репрессоров; *б* – пример последовательной автоколебательной динамики: показана динамика концетраций белков в клетке при $n=4$, $\alpha=10$, $\beta=5$, над максимумами указаны названия конкретных белков-репрессоров, использовавшихся в работе [9]

Несложно показать, что положительное решение (25) всегда существует и единственно. Линеаризуя систему (24) вблизи состояния равновесия, получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} &(1+\lambda)^3(\beta+\lambda)^3+\beta^3 d^3=0,\\ &d=\frac{\alpha n x^{n-1}}{(1+x^n)^2}, \end{aligned} \tag{26}$$

корни которого удовлетворяют

$$\begin{aligned} &(1+\lambda)(\beta+\lambda)+\beta d=0,\\ &(1+\lambda)(\beta+\lambda)+\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\beta d=0. \end{aligned} \tag{27}$$

Корни первого из уравнений всегда отрицательны. Корни второго могут удовлетворять критерию бифуркации Андронова–Хопфа $\mathrm{Re}\,\lambda=0$, $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$. Область автоколебаний в пространстве параметров задается неравенством

$$\frac{(\beta+1)^2}{\beta}<\frac{3d^2}{4-2d}. \tag{28}$$

В частности для репрессоров-димеров $n=2$ при $\alpha=10$ имеем координаты состояния равновесия $x_i=m_i=2$, параметр $d=1.6$ и автоколебания при $\beta<(19+4\sqrt{21})/5$. Пример последовательной автоколебательной генерации белков-репрессоров для $\beta=5$ представлен на рис. 4, *б*.

Пионерские результаты [9] стимулировали большой объем исследований [25, 26]. В частности, для систем дифференциальных уравнений с n репрессорами было показано существование не только периодических решений, но и мультистабильности состояний равновесия, а также гетероклинических циклов [27, 28].

5. Коллективная динамика

До сих пор мы рассматривали способы организации динамики генной регуляции внутри одной клетки. Естественным дальнейшим шагом является инженерия межклеточного взаимодействия. Наиболее употребительный способ основан на природном механизме «кворум-сенсинга» (quorum sensing), который используется некоторыми бактериями и микроорганизмами [29]. Механизм основан на синтезе небольших молекул, которые могут легко диффундировать через мембрану клетки и служить лигандами, активирующими транскрипционные факторы (обычно применяются молекулы семейства N-ацил-гомосеринлактонов, англоязычная аббревиатура AHL). С помощью межклеточной коммуникации реализованы такие динамические эффекты, как синхронизация колебаний [30], взаимная синхронизация в больших ансабмлях [31], синхронизация внешним периодическим сигналом [32], взаимная синхронизация клеточных колоний [33], режим взаимодействия «хищник-жертва» [34],

формирование пространственных структур с помощью градиента AHL [35], выделение контуров для обработки изображений [36], а также продемонстрирована возможность выполнения логических операций с помощью клеток [37, 38]. Здесь мы рассмотрим одну из задач этого класса.

В благоприятных условиях клетки в колонии делятся, и их плотность возрастает, достигая со временем некоторого предельного значения. Сдерживание роста может быть обусловлено рядом факторов, среди которых – ограниченное количество питательных веществ, физического пространства, скопление токсичных продуктов метаболизма. В этих условиях могут активироваться сигнальные регуляторные пути, тормозящие деление клеток. В поле синтетической биологии возникает задача об управлении численностью клеток в популяции с помощью искусственных регуляторных сетей. Помимо фундаментальной стороны вопроса присутствует и практическая. Например, может быть желательным не допустить «перенаселенности» колонии, когда полезная функциональность клеток может оказаться подавленной или ограничить рост одного из штаммов клеток в пользу другого.

Одна из возможных схем была реализована в работе [39]. Синтетический контур в каждой клетке содержит фермент $LuxI$, производящий молекулы AHL, которые в комплексе с белком $LuxR$ являются транскрипционным активатором для другого фермента, активирующего процесс апоптоза – гибели клетки (рис. 5, *а*). Концентрация молекул AHL в клетках и межклеточном пространстве пропорциональна плотности клеток, а весь контур работает как система отрицательной обратной связи.

В наиболее простом виде динамику генной регуляции можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{N} &= N(k-N) - dEN, \\ \dot{A} &= N - A, \\ \dot{R} &= A - R, \\ \dot{E} &= R - E, \end{aligned} \tag{29}$$

где N, A, R, E – безразмерные концентрации клеток, AHL, комплекса $AHL - LuxR$ и фермента апоптоза, соответственно; k – максимальная безразмерная концентрация

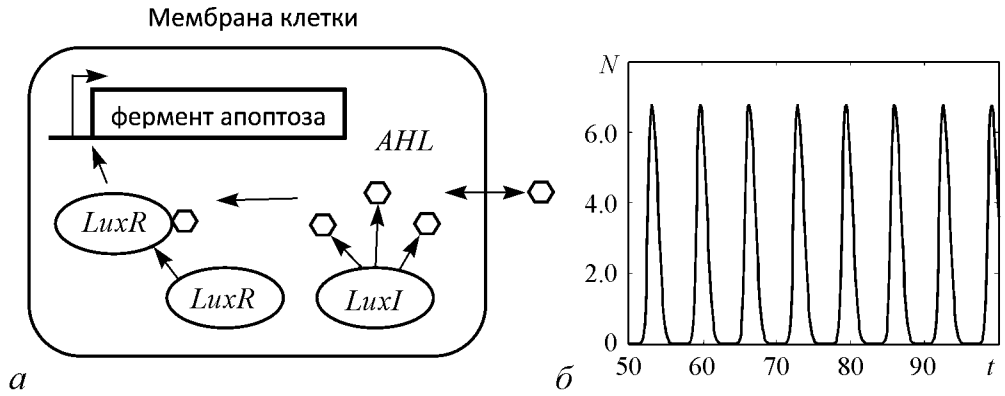


Рис. 5. *а* – принципиальная схема синтетического контура, способного регулировать плотность клеток в популяции; *б* – пример динамики плотности клеток в автоколебательном режиме $k = 10$, $d = 5$ (29)

клеток в отсутствие синтетической регуляции; d – коэффициент активации апоптоза ферментом.

Система (29) всегда имеет единственное нетривиальное состояние равновесия

$$N^* = A^* = R^* = E^* = \frac{k}{1+d}. \tag{30}$$

Его устойчивость определяется корнями λ характеристического уравнения

$$(N^* + \lambda)(1+\lambda)^3 + dN^* = 0. \tag{31}$$

Несложно показать, что состояние равновесия может терять устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа, которой на плоскости параметров (k, d) отвечает линия

$$\begin{aligned} k^* &= \frac{(3N+1)(3N^2+9N+8)}{(N+3)^3}, \\ N^* &= \frac{k^*}{1+d^*}. \end{aligned} \tag{32}$$

При $d > d^*(k)$ система демонстрирует периодические колебания плотности клеток (рис. 5, *б*). В эксперименте колебания численности клеток также получить удалось [39].

Заключение

Исследование механизмов генной регуляции является сегодня одной из наиболее актуальных задач нелинейной динамики. Особую привлекательность этой проблематике придают постоянно возрастающие возможности синтетической биологии, которые позволяют конструировать в хорошей степени изолированные и небольшие регуляторные системы, допускающие контролируемые эксперименты. В данном обзоре на простейших примерах показано как методы нелинейной динамики могут быть использованы для анализа и предсказательной инженерии синтетических регуляторных генных сетей. Естественно, в работах высокого уровня используются не только простейшие математические модели – низкоразмерные системы дифференциальных уравнений, но и многомерные системы, и стохастические модели, весьма детализировано описывающие молекулярные процессы в клетке и позволяющие достичь не только качественного, но и количественного согласования с экспериментом. Исследование таких моделей, как правило, сугубо численное и следует за качественным анализом низкоразмерных моделей.

Помимо экспериментально реализованных систем существует много интересных теоретических предсказаний, которые только ожидают своего эксперимента. Среди них отдельно отметим мультистабильность и кластеризацию в условиях антагонистического взаимодействия между клетками [40], коллективные механизмы дифференциации клеток в условиях мультистабильности и кластерообразования [41], зависимость режима синхронизации (синфазной или противофазной) от характеристик транскрипции и кинетики мРНК [42], влияние скорости изменения параметров

и интенсивности шума на результат конкуренции синтетических подсетей [21, 43]. Несомненно, в ближайшем будущем нас ждут экспериментальные подтверждения, по крайней мере, некоторых из них, а также новые увлекательные открытия.

Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП «Кадры», соглашение № 14.B37.21.1234, и гранта РФФИ 13-02-00918-а.

Библиографический список

1. *Jacob F., Monod J.* Genetic regulatory mechanisms in synthesis of proteins // J. Mol. Biol. 1961. Vol. 3. P. 318.
2. *Hasty J., McMillen D., Collins J.J.* Engineered gene circuits // Nature. 2002. Vol. 420. P. 224.
3. *Nandagopal N., Elowitz M.B.* Synthetic Biology: Integrated Gene Circuits // Science. 2011. Vol. 333. P. 1244.
4. *Lu T.K., Khalil A.S., Collins J.J.* Next-generation synthetic gene networks // Nat. Biotechnol. 2009. Vol. 27. P. 1139.
5. *Ro D.K. et al.* Production of the antimalarial drug precursor artemisinic acid in engineered yeast // Nature. 2006. Vol. 440. P. 940.
6. *Lee S.K. et al.* Metabolic engineering of microorganisms for biofuels production: From bugs to synthetic biology to fuels // Curr. Opin. Biotechnol. 2008. Vol. 19. P. 556.
7. *Sayler G.S., Simpson M.L., Cox C.D.* Emerging foundations: Nano-engineering and bio-microelectronics for environmental biotechnology // Curr. Opin. Microbiol. 2004. Vol. 7. P. 267.
8. *Gardner T.S., Cantor C.R., Collins J.J.* Construction of a genetic toggle switch in Escherichia coli // Nature. 2000. Vol. 403. P. 339.
9. *Elowitz M.B., Leibler S.* A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature. 2000. Vol. 403. P. 335.
10. *Stricker J. et al.* A fast, robust and tunable synthetic gene oscillator // Nature. 2008. Vol. 456. P. 516.
11. *Friedland A.E. et al.* Synthetic gene networks that count // Science. 2009. Vol. 324. P. 1199.
12. *O'Brien E.L., van Itallie E., Bennett M.R.* Modeling synthetic gene oscillators // Math. Biosciences. 2012. Vol. 236. P. 1.
13. *Hill A.V.* The possible effects of the aggregation of the molecules of haemoglobin on its dissociation curves // J. Physiol. 1910. Vol. 40. No. vi-vii.
14. *Elowitz M.B. et al.* Stochastic gene expression in a single cell // Science. 2002. Vol. 297. P. 1183.
15. *Gillespie D.T.* Stochastic smulation of chemical kinetics // Annual Review of Physical Chemistry. 2007. Vol. 58. P. 35.
16. *Bel G., Munsky M., Nemenman I.* The simplicity of completion time distributions for common complex biochemical processes // Phys. Biol. 2010. Vol. 7. P. 016003.

17. *Ishiura M. et al.* Expression of a gene cluster kaiABC as a circadian feedback process in cyanobacteria // Science. 1998. Vol. 281. P. 1519.
18. *Goodwin B.C.* Oscillatory behavior in enzymatic control processes // Adv. Enzyme Regul. 1965. Vol. 3. P. 425.
19. *Mather W. et al.* Delay-induced degrade-and-fire oscillations in small genetic circuits // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102, P. 068105.
20. *Johnson A.D. et al.* Lambda Repressor and cro-components of an efficient molecular switch // Nature. 1981. Vol. 294. P. 217.
21. *Nene N., Garcia-Ojalvo J., and Zaikin A.* Speed-dependent cellular decision making in nonequilibrium genetic circuits // PLoS ONE. 2012. Vol. 7. P. e40085.
22. *Huang S. et al.* Bifurcation dynamics in lineage-commitment in bipotent progenitor cells // Dev. Biol. 2007. Vol. 305. P. 695.
23. *Cohen M. et al.* Dynamic filopodia transmit intermittent delta-notch signaling to drive pattern refinement during lateral inhibition // Dev. Cell. 2010. Vol. 19. P. 78.
24. *Widschwendter M. et al.* Epigenetic stem cell signature in cancer // Nat. Genet. 2007. Vol. 39. P. 157.
25. *Bennett M.R. et al.* Transient dynamics of genetic regulatory networks // Biophys. J. 2007. Vol. 92. P. 3501.
26. *Buse O., Perez R., Kuznetsov A.* Dynamical properties of the repressilator model // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. P. 066206.
27. *Muller S. et al.* A generalized model of the repressilator // J. Math. Biol. 2006. Vol. 53. P. 905.
28. *Strelkowa N., Barahona M.* Transient dynamics around unstable periodic orbits in the generalized repressilator model // Chaos. 2011. Vol. 21. P. 023104.
29. *Miller M.B., Bassler B.L.* Quorum sensing in bacteria // Annu. Rev. Microbiol. 2001. Vol. 55. P. 165.
30. *McMillen et al.* Synchronizing genetic relaxation oscillators by intercell signaling // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2002. Vol. 99. P. 679.
31. *Danino T. et al.* A synchronized quorum of genetic clocks // Nature. 2010. Vol. 463. P. 326.
32. *Mondragon-Palomino O. et al.* Entrainment of a population of synthetic genetic oscillators // Science. 2011. Vol. 333. P. 1315.
33. *Prindle A. et al.* Sensing array of radically coupled genetic biopixels // Nature. 2012. Vol. 481. P. 39.
34. *Balagadde F.K. et al.* A synthetic Escherichia coli predator-prey ecosystem // Mol. Syst. Biol. 2008. Vol. 4. P. 187.
35. *Basu S. et al.* A synthetic multicellular system for programmed pattern formation // Nature. 2005. Vol. 434. P. 1130.
36. *Tabor J.J. et al.* A synthetic genetic edge detection program // Cell. 2009. Vol. 137. P. 1272.
37. *Tamsir A., Tabor J.J., Voigt C.A.* Robust multicellular computing using genetically encoded NOR gates and chemical 'wires' // Nature. 2011. Vol. 469. P. 212.

38. *Regot S. et al.* Distributed biological computation with multicellular engineered networks // Nature. 2011. Vol. 469. P. 207.
39. *Balagadde F.K. et al.* Long-term monitoring of bacteria undergoing programmed population control in a microchemostat // Science. 2005. Vol. 309. P. 137.
40. *Ullner E., Zaikin A. et al.* Multistability and clustering in a population of synthetic genetic oscillators via phase-repulsive cell-to-cell communication // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99. P. 148103.
41. *Koseska A. et al.* Cooperative differentiation through clustering in multicellular populations // J. of Theor. Biol. 2010. Vol. 263. P. 189.
42. *Potapov I., Volkov E., Kuznetsov A.* Dynamics of coupled repressilators: The role of mRNA kinetics and transcription cooperativity // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83. P. 031901.
43. *Nene N., Zaikin A.* Interplay between path and speed in decision making by high-dimensional stochastic gene regulatory networks // PLoS ONE. 2012. Vol. 7. P. e40085.

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского *Поступила в редакцию 15.05.2013*

NONLINEAR DYNAMICS OF SYNTHETIC GENE REGULATORY CIRCUITS

M. V. Ivanchenko, O. I. Kanakov, R. A. Kotelnikov, I. B. Krylov

Built in a cell synthetic gene regulatory elements may function rather independently on the original natural system. Experimental and theoretical studies of small synthetic networks allow for a better understanding of fundamental dynamical mechanisms of gene regulation. This paper gives an introduction to the modern mathematical approaches and methods in this field, primarily in the framework of nonlinear dynamics.

Keywords: Nonlinear dynamics, mathematical modeling, gene regulation.

Иванченко Михаил Васильевич – родился в 1981 году. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2004), там же защитил кандидатскую и докторскую диссертации (2007, 2011). В настоящее время является заведующим кафедрой биоинформатики ННГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, математическая биология. Имеет около 40 печатных работ по данной тематике. Был удостоен медали Российской академии наук в конкурсе 2004 года на лучшие научные работы по направлению «Общая физика и астрономия».

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail:ivanchenko.mv@gmail.com

Канаков Олег Игоревич – родился в Нижнем Новгороде (1981). Окончил Нижегородский государственный университет (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности "Радиофизика"в области теории нелинейных колебаний и волн (ННГУ, 2007). Работает в ННГУ в должности доцента кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов - взаимодействие волн в нелинейных решеточных системах, динамика синтетических генных систем, динамика биологических сред. Соавтор 14 журнальных статей и 4 учебно-методических пособий.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail: okanakov@rf.unn.ru

Котельников Роман Андреевич – родился в Нижнем Новгороде (1991). Окончил бакалавриат факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета по специальности прикладная математика и информатика. В настоящий момент учится в магистратуре ННГУ на кафедре математического обеспечения ЭВМ. Научные интересы - нелинейная динамика в системной биологии, биоинформатика, обработка изображений.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail:roman.kotelnikov@gmail.com

Крылов Илья Борисович – родился в Нижнем Новгороде (1991). Окончил с отличием бакалавриат факультета ВМК ННГУ. В настоящее время является магистрантом второго года обучения и ассистентом кафедры биоинформатики факультета ВМК ННГУ. С 2011 года активно занимается научной деятельностью в области математического моделирования, компьютерного обучения, биоинформатики и суперкомпьютерных технологий. Имеет две статьи в журналах из списка ВАК.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail:krylov.ib@gmail.com

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 4, 2013 УДК 141.155+536.75+929 Курдюмов

С. П. КУРДЮМОВ И ЕГО ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Е. С. Куркина, Е. Н. Князева

В статье рассказывается о Сергее Павловиче Курдюмове (1928–2004) и его выдающемся вкладе в развитие современной междисциплинарной теории и методологии исследования сложных саморазвивающихся систем – синергетики. Раскрывается содержание предложенной им математической модели эволюционной динамики сложных систем. В основе модели лежит нелинейное уравнение теплопроводности с источником. При определенных условиях оно описывает динамику развития структур разной сложности в режиме с обострением. Рассматриваются методики расчета двумерных структур, описываемых автомодельными решениями, и дается их классификация. Автомодельная задача представляет собой краевую задачу на собственные значения и собственные функции для нелинейного уравнения эллиптического типа на плоскости. Из анализа динамики модели следует сформулированный С.П. Курдюмовым принцип коэволюции, или принцип объединения простых структур в сложную, и вытекают три важнейших представления: о связи пространства и времени, о сложности и ее природе, о циклах эволюции и переключении режимов как необходимого механизма поддержания «жизни» сложных структур. Показываются подходы для возможных применений этой модели для понимания динамики сложных социальных, демографических и геополитических систем.

Ключевые слова: Коэволюция, междисциплинарность, нелинейность, неустойчивость, режимы с обострением, пространство и время, самоорганизация, синергетика, сложные системы, темпомиры, тепловые структуры.

Жить – значит мыслить, причем мыслить междисциплинарно

В этом, 2013 году исполнилось бы 85 лет Сергею Павловичу Курдюмову (1928–2004) – выдающемуся ученому с мировым именем, который по праву считается основателем синергетики в России. Эта именно та область научных исследований, которая называется сейчас в мире теорией сложности (Theory of Complexity) и которая бурно развивается, получая новые разветвления такие, например, как Network Science.

Сергей Павлович Курдюмов был ученым особого типа, ученым-романтиком, философствующим ученым-физиком. «Физика берегись метафизики!» – это не про

Курдюмова. Он всегда развивал, а в своих устных докладах горячо пропагандировал, если угодно, даже проповедовал, синергетику как идею, как мировоззрение, как новое видение мира. Это был ученый сократического типа, который больше говорил, чем писал, а если и писал, то с гораздо большей охотой личные дневники, а не научные труды, хотя и опубликованных книг и статей, если посмотреть ретроспективно, у него достаточно. В его устных рассуждениях и беседах, лекциях и докладах наука сливалась с философией, наука наполнялась философской мудростью, а философия укоренялась в науке, в живом исследовании, находящемся на передовом крае науки.

Лишь сегодня, оценивая его вклад в науку о сложном post factum, можно в полной мере осознать масштабы его научной школы и огромной когорты его последователей и почитателей. Под его руководством защитили диссертации 10 докторов и 19 кандидатов наук, а всех ученых, испытавших его интеллектуальное влияние, невозможно даже перечислить. Он был средоточием научной активности, наиболее весомым узлом научной сети ученых, аттрактором, который притягивал очень многих интересующихся синергетикой, «котлом», где бурлила мысль и рождались новые идеи. И из этого центра, как круги по воде, распространялись волны, выходя далеко за пределы естествознания: в философию, психологию, социологию, педагогику, геополитику, социальную теорию управления и теорию социального прогнозирования (исследования будущего).

Сергей Павлович родился и вырос в Москве, в 1953 году закончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова и затем всю жизнь проработал в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. В одно из самых тяжелых для российской науки десятилетий, в 1990-х годах он был директором этого Института. Его молодость пришлась на золотой век советской науки, когда советским ученым, физикам и математикам, в кратчайшие сроки надо было решать важнейшие стратегические проблемы. Это были задачи, связанные с созданием ракетно-ядерного щита СССР и с осуществлением управляемого термоядерного синтеза. С.П. Курдюмов всецело включился в работу над этими проектами и трудился бок о бок с крупнейшими учеными М.В. Келдышем, А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским, которых он считал своими учителями.

Актуальные физические задачи, встававшие перед учеными, требовали создания сложных нелинейных математических моделей и разработки вычислительных алгоритмов их решения. Наступал век компьютерной физики и компьютерного моделирования нелинейных явлений. В это же время в мире стали складываться и параллельно развиваться новые области исследований нелинейных процессов в сложных системах: синергетика как учение о взаимодействии с ее парадигмальным примером – излучением лазера (теория, основанная немецким физиком Г. Хакеном в 1969 году), теория сложных адаптивных систем (развиваемая американским физиком М. Гелл-Манном с 1980-х годов), нелинейная динамика, теория динамического хаоса (theory of dynamic chaos), фрактальная геометрия, основы которой заложил Б. Мандельброт, теория самоорганизованной критичности (П. Бак, С. Кауффман и др.). Были и другие смежные области исследований сложных систем, которые у нас в России принято называть «синергетика», где последняя используется как зонтичный термин.

В 1970-х годах научные исследования Сергея Павловича были связаны с математическим моделированием процессов термоядерного горения в плазме. Тогда

было открыто, что в среде с нелинейным коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла процессы горения развиваются *в режиме с обострением*, при котором температура асимптотически уходит в бесконечность в некоторой области пространства за конечное время – время обострения. Режимы с обострением вызвали интерес ученых своими на первый взгляд парадоксальными свойствами. В нелинейной среде при определенных условиях, несмотря на наличие теплопроводности, наблюдается необычное явление – возникают области интенсивного горения в режиме с обострением, имеющие характерный размер – *фундаментальную длину*, в которых температура во много раз превышает температуру окружающей среды. Это феномен получил название явления *локализации тепла*, а области горения в режиме с обострением – *нестационарными тепловыми структурами*. Локализация тепла означает распад сплошной среды на отдельные структуры.

Исследования, проведенные в то время группой Курдюмова, показали возможность возникновения не только простых структур, имеющих один максимум, но и сложных структур, с немонотонным распределением плотности температуры внутри области локализации, объединяющих в себе несколько максимумов. Была поставлена и решена сложная математическая задача по поиску, построению и изучению спектра сначала одномерных, а потом и двумерных структур. В 2004 году была построена первая трехмерная сложная тепловая структура в виде гантели, подобно одной из электронных оболочек атома, существование которой предсказал Сергей Павлович почти за 30(!) лет до этого.

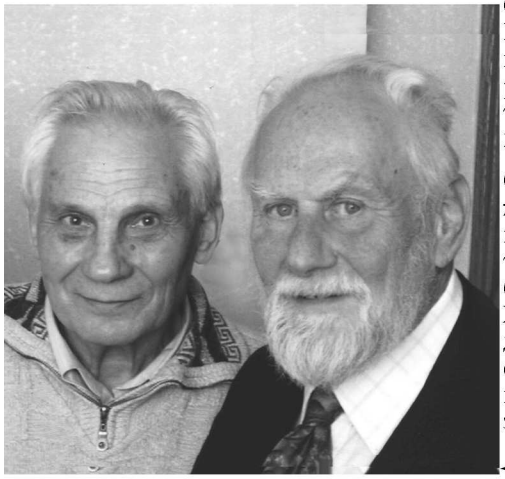
Обнаруженное явление локализации тепла открывало тогда новые подходы к решению проблемы управляемого термоядерного синтеза, и Сергей Павлович активно занимался этими задачами со своими учениками и коллегами, но на постановки задач и на результаты исследований он смотрел значительно шире. Ему было интересно: «Как, при каких условиях в однородной среде появляется организация – структуры (вихри, солитоны, диссипативные структуры), которые способны самоподдерживаться конечное время? Как они устроены и как эволюционируют во времени? Почему возникают только определенные типы структур, как устроен спектр этих структур? Как происходит «усложнение организации нелинейной диссипативной среды». И вообще: «существуют ли объективные законы эволюции, справедливые для сложных систем самой разной природы: физических, химических, биологических и даже для человеческого сообщества и самого человека, его тела, мозга и сознания?»

Глубокая интуиция ученого подсказывала Сергею Павловичу, что режимы с обострением описывают процессы эволюции в сложных системах самой различной природы и обладают огромной общностью. Они возникают в нелинейных открытых диссипативных системах с положительными обратными связями. Такими системами являются автокаталитические реакции в химии, взрывные режимы в физике, механизмы свободного рынка в экономике, информационные процессы в обществе, механизмы формирования социальных сетей в интернете, в том числе в глобальной системе человеческого общества. Все эти эволюционные процессы могут быть описаны одной моделью, в основе которой лежит нелинейное уравнение теплопроводности с источником. Нелинейный коэффициент теплопроводности (диффузии) описывает диссипативные процессы в системе, распространение энергии,

Круглый стол по синергетике. Москва, 1996

Во втором ряду стоят слева направо: пятый слева С.П.Капица, В.А. Белавин, Г.Г.Малинецкий, С.П.Курдюмов, ?, В.Г. Буданов, В.А. Копцик, Ю.Л.Климонтович, И.А.Акчурин.
В первом ряду сидят, слева направо: И.В. Мелик-Гайказян, ?, Е.Н.Князева.

Кафедра вычислительных методов на факультете ВМК МГУ. Сидит акад. А.А. Самарский, стоят слева направо: А.Б. Потапов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, Е.С. Куркина, Г.Г. Еленин, Н.В. Змитренко. В. Дородницын, Г.Г. Малинецкий и В.А. Галактионов.



С женой Валентиной Васильевной Муриной во время конференции по синергетике в Подмосковье 2003 г. →

С Г.Хакеном на Международном Симпозиуме "Синергетика в решении проблем человечества XXI века – Диалог двух школ" в Российской академии госслужбы при Президенте РФ. 16 июня 2004 г. ←

Курдюмов С.П. с учениками у себя дома за чаем. Справа налево: Князева Е.Н., Курдюмов С.П., Плохотников К.Э., Белавин В.В., Куретова Е.Д., Куркина Е.С.

Все представленные фотоматериалы взяты из архивов Е.Н.Князевой и Е.С.Куркиной

вещества или информации, а объемный источник описывает кумулятивные процессы, скорость прироста энергии, вещества или информации в системе. Аккумуляция и диссипация – две важнейшие динамические составляющие процессов в сложных системах, а их единство есть движущая сила эволюции. Нелинейная динамика сложных систем разного типа может быть рассмотрена единым образом, с точки зрения развития и взаимодействия структур разной сложности, развивающихся в режиме с обострением.

Исследованию синергетических свойств режимов с обострением и особенностей формирования нестационарных диссипативных структур, обобщению, осмыслению, новой интерпретации полученных результатов Сергей Павлович посвятил всю оставшуюся жизнь. Он занимался, по его собственному признанию, «поиском истины мира в режимах с обострением». И в мировую науку С.П. Курдюмов внес наибольший вклад именно как исследователь режимов с обострением и сложных структур, возникающих и эволюционирующих в режимах с обострением. Созданная им модель тепловых структур – одно из его важнейших достижений.

С.П. Курдюмов – признанный авторитет и в научном сообществе философов. Он внес существенный вклад в развитие философии синергетики, то есть синергетики как видения мира. С его ученицей Е.Н. Князевой, доктором философских наук, они фактически создали новое философское учение, новое направление в философии, основные положения которого отражены в фундаментальном труде «Основания синергетики» [1,2] и серии статей, опубликованных в журнале «Вопросы философии» [3–6].

Философские обобщения и мировоззренческие выводы С.П. Курдюмова основывались на результатах математического моделирования и вычислительного эксперимента. *Его исследования* были всегда по существу *междисциплинарными* даже тогда в 1970-х, когда математическое моделирование и вычислительный эксперимент только начали внедряться в различные естественные, социальные и гуманитарные науки, когда идеи синергетики только начали делать свои первые шаги. Курдюмов опережал свое время, работая в междисциплинарном ключе, на стыке математической физики и философии, естествознания и социальных наук, а также – насколько синергетика развивалась как синергетика человека – гуманитарных наук. Математика, математическое моделирование и вычислительный эксперимент были фундаментом, на котором проводились исследования. Физическое образование давало точные представления о природе и процессах в мире природы, развитая интеллектуальная интуиция его как ученого-физика позволяла ставить задачи в разных, порой совершенно неожиданных ракурсах, а философия, к которой он питал интерес со студенческих лет, давала широкий взгляд на исследования, позволяла обобщать полученные результаты и транслировать их в другие науки «для общего пользования». Синергетика тогда становилась методом исследования.

Курдюмов был мыслителем эры междисциплинарности – эры, которая сегодня развернулась во всей своей полноте. Сорок лет назад он заложил краеугольный камень в исследования сложных систем, стремительное развитие которых мы наблюдаем в наши дни.

Если подняться на междисциплинарный уровень и отвлечься от конкретной природы системы, можно установить общие законы эволюции нелинейного мира, строя модель развития пространственно-временных структур в сложной системе.

Для эволюции систем, развивающихся в режиме с обострением, характерны: а) наличие нескольких стадий; б) ускорение развития со временем, выражающееся в сокращении длительности стадий и наращивании общего темпа развития; в) усиление неустойчивости развития; г) изменение характерных размеров структур. Последняя стадия эволюции – это взрывное развитие (blow-up), заканчивающееся коллапсом или радикальным поворотом с рождением природных, социальных или культурных инноваций. На определенной стадии структуры могут формироваться, на других стадиях распадаться, существуют периоды устойчивого быстрого роста и периоды кризисов, дезинтеграции структур, которые с неизбежностью заканчиваются формированием новых структур.

Первая публикация с претензией на новое мировидение, опирающаяся на изучение процессов, развивающихся в режиме с обострением, была сделана Курдюмовым в 1979 году. Это был препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша, который назывался «Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации» [7]. В этой работе, подводя итог многолетних исследований и анализируя свойства решений нелинейного уравнения теплопроводности, описывающих формирование и развитие диссипативных структур в плазме, Курдюмов вводит несколько основополагающих понятий, которые разовьет в дальнейшем в своих работах с Князевой. Во-первых, это понятие *собственных функций нелинейной среды* – строго определенного, дискретного набора пространственно-временных структур, которые могут формироваться и развиваться в данной нелинейной среде. Во-вторых, это понятие *темпомира* структуры (термин, введенный им вместе с Князевой), связывающего возраст структуры со скоростью (темпом) ее развития [6]. В-третьих, это принцип объединения простых структур «разного возраста» в единую сложную структуру. В-четвертых, это идея немонотонного циклического развития, которую впоследствии он с В.А. Белавиным впервые применяет к глобальной демографической системе [8,9].

При этом в качестве ключевых выступали, по меньшей мере, три мировоззренческие идеи, а именно: идея о связи пространства и времени, идея о сложности и ее природе (стремление понять, что есть сложность и каков путь к сложному) и идея циклов и переключения режимов как необходимого механизма поддержания «жизни» сложных структур.

Модель тепловых структур

Базовой моделью для изучения свойств пространственно-временной эволюции системы, развивающейся в режиме с обострением (рис. 1, *а*), является квазилинейное уравнение теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $k(T) = \chi_0 T^\sigma$ и объемным источником тепла $Q(T) = q_0 T^\beta$, которые степенным образом зависят от температуры $T(\mathbf{r}, t)$,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi_0 T^\sigma \operatorname{grad} T) + q_0 T^\beta. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{r}$ – координата точки, а t – время, $E = c_V T$, $c_V, \chi_0, q_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > 1$ – заданные параметры. (Без ограничения общности можно считать, что $c_V = \chi_0 = q_0 = 1$.)

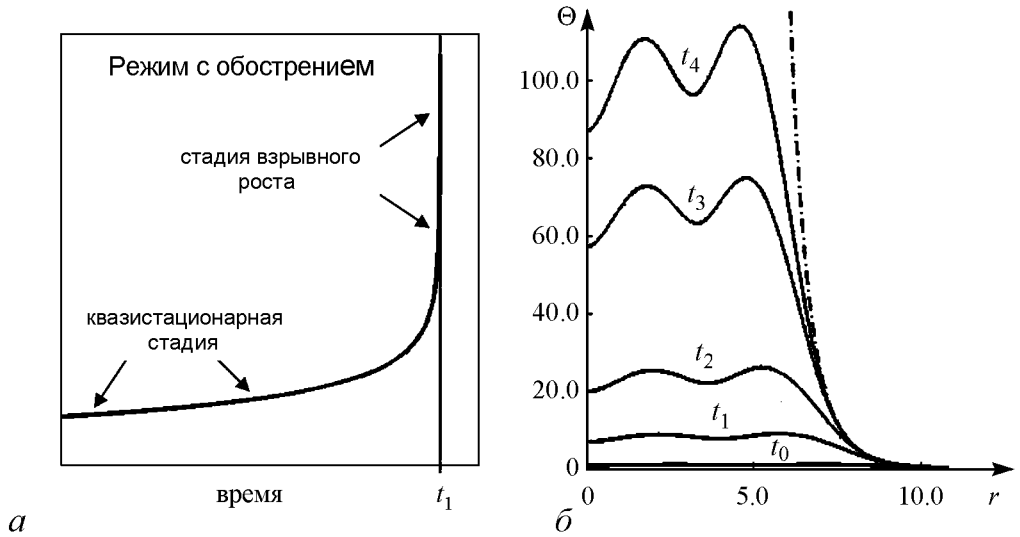


Рис. 1. *а* – динамика роста в режиме с обострением; *б* – эволюция четвертой радиально-симметричной собственной функции. Штрихпунктирная линия показывает предельное распределение температуры в момент обострения

Такие зависимости коэффициентов от температуры встречаются во многих реальных процессах. При соответствующем выборе значений параметров и разной физической интерпретации функции T (это может быть не только температура, но и плотность, концентрация и др.) это уравнение описывает термоядерное горение плазмы с электронной или радиационной теплопроводностью, некоторые автокаталитические химические реакции, социально-экономические процессы [8] и др.

Рассмотрим характерные черты динамики процессов, описываемых уравнением (1). Считается, что горение инициируется заданием начального распределения температуры в некоторой области пространства

$$T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}) \leq \mathrm{M} < \infty.$$

Начавшееся горение начинает распространяться в пространстве, и профиль распределения температуры изменяется со временем. Горение среды может развиваться по-разному в зависимости от значений параметров β и σ. Доказано, что при $\beta > 1$ процессы горения на развитой стадии идут в режиме с обострением. Явление локализации тепла имеет место при $\beta \geq \sigma + 1$. Сложные структуры возникают при $\beta > \sigma + 1$. Многие свойства решений уравнения (1) описаны в монографии [10] и сборнике наиболее значимых статей [11].

В середине 1970-х годов С.П. Курдюмов поставил перед своими учениками задачу построения и исследования спектра сложных структур. Сначала были изучены одномерные структуры [12–16], а потом построены и классифицированы двумерные структуры [17–25], в 2004 году были построены некоторые трехмерные структуры [21,22]. Рассмотрим двумерные структуры на плоскости. Они описываются автомодельными решениями уравнения (1) вида

$$T(r, \varphi, t) = g(t)\Theta(\xi, \varphi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \tag{2}$$

где (r, φ) – координаты точки плоскости в полярной системе координат; ξ – автомодельная переменная; $\Theta(\xi, \varphi)$ – автомодельное решение; $g(t)$ и $\psi(t)$ – функции

времени

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta - 1}, \quad n = \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)}. \quad (3)$$

Вид автомодельного уравнения для функции $\Theta(\xi, \varphi)$ найдем, подставив (2) в (1),

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi\,\Theta^\sigma\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\xi^2(\sigma+1)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Theta^{\sigma+1} = -\frac{m}{\tau}\Theta + \frac{n}{\tau}\xi\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} - \Theta^\beta, \quad (4)$$

где τ – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (2). Автомодельное уравнение (4) в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\,\xi_1}\left(\Theta^\sigma\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\,\xi_2}\left(\Theta^\sigma\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_2}\right) = -\frac{m}{\tau}\Theta + \frac{n}{\tau}\left(\xi_1\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_1} + \xi_2\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_2}\right) - \Theta^\beta. \quad (5)$$

Здесь $\Theta = \Theta(\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 = x/\psi(t)$, $\xi_2 = y/\psi(t)$. Ищутся ограниченные решения уравнения (4) или (5), удовлетворяющие условиям на фронте, который находится на бесконечности в случае $\beta > \sigma + 1$,

$$\Theta^\sigma \mathrm{grad}\,\Theta \underset{\xi\to\infty}{\to} 0, \quad \Theta \underset{\xi\to\infty}{\to} 0, \quad (6)$$

и условию равенства нулю потока в центре симметрии

$$\Theta|_{\xi=0} < \infty, \quad \Theta^\sigma \mathrm{grad}\,\Theta|_{\xi=0} = 0. \quad (7)$$

Автомодельная задача (4), (6), (7) является задачей на собственные значения (СЗ) τ и собственные функции (СФ) $\Theta(\xi, \varphi)$. Если собственные значения τ и собственные функции $\Theta(\xi, \varphi)$ автомодельной задачи найдены, то распределение температуры в каждый момент времени задается формулами (2), (3). Так как $\beta > 1$ ($m < 0$), при положительном СЗ $\tau > 0$ (этот случай и рассматривается) они существуют конечное время $t = \tau$ и развиваются в режиме с обострением: $g(t) \to \infty$ при $t \to \tau$. Физический смысл СЗ $\tau > 0$ – время обострения.

При $\beta > \sigma + 1$ ($n > 0$) эффективная ширина области горения сокращается (так как $r(t) = \xi\psi(t)$ уменьшается со временем), и температура при $t = \tau$ обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии ($r = 0$). Автомодельное решение описывает нестационарную диссипативную структуру, представляющую собой сходящуюся к центру волну горения, заканчивающуюся коллапсом в момент обострения. Это так называемый *LS-режим с обострением*. Причем, развитие процессов обладает свойством самоподобия, и решение в момент времени t_j получается преобразованием подобия того же решения, взятого в момент t_i (рис. 1, *б*).

Автомодельные решения в LS-режиме при $\xi \to \infty$ имеют степенную асимптотику

$$\Theta(\xi, \varphi) \underset{\xi\to\infty}{\to} C(\varphi)\xi^{-p}, \quad p = 2/(\beta - \sigma - 1) > 0, \quad (8)$$

где $C(\varphi)$ – является константой для радиально-симметричных структур и функцией угла для двумерных СФ. Асимптотика (8) описывает предельное распределение температуры (или плотности) при $t \to \tau$

$$u(r, \varphi, t) \underset{t\to\tau}{\to} C(\varphi)r^{-p}. \quad (9)$$

Чем ближе время к моменту обострения, тем ближе прижимается СФ к предельному асимптотическому распределению (9) (см. рис. 1, *б*).

Классы двумерных структур

Для построения двумерных СФ использовались различные итерационные алгоритмы. Сначала выбиралась область D на плоскости, в которой строилась структура. Считалось, что на границе области искомая функция близка к нулю и выполняется условие асимптотического приближения (8). Использовалась как декартова, так и полярная системы координат. Учитывалась предполагаемая симметрия решения, и строилась только часть функции в секторе с углом раствора $2\pi/m$, где m – порядок симметрии СФ. На внутренних границах сектора $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi/m$ записывались условия симметрии, на внешней границе – условие (8). При использовании декартовой системы координат обычно в качестве области D выбирался прямоугольник, расположенный в первом квадранте плоскости, и строились структуры с m кратным четырем. Характерный размер сетки составлял обычно $N = 100 \times 100$ или $N = 200 \times 200$ узлов. Полученная система нелинейных разностных уравнений решалась итерационным методом Ньютона. Для его реализации необходимо иметь хорошее начальное приближение к искомому решению, то есть иметь его достаточно точное представление заранее, именно в этом состоит наибольшая трудность. Было предложено несколько методов получения начальных приближений.

Метод сшивания. В работах [17,18] впервые были высказаны предположения о возможном виде двумерных структур и разработан метод нахождения приближений к ним, основанный на методе линеаризации и методе сшивания с асимптотикой.

Метод мультипликации. В декартовой системе координат хорошим приближением для многих СФ из класса $E_{i\times j}$ является произведение одномерных (плоских) СФ, построенных заранее методом пристрелки [21]

$$\Theta_{i,j}(\xi_1, \xi_2) \approx \Theta_i(\xi_1)\Theta_j(\xi_2). \tag{10}$$

Эти приближения оказались во многих случаях лучше аналогичных приближений, полученных методом сшивания, и весьма близки к двумерным структурам.

Метод растяжений, основанный на использовании сечений уже построенных СФ [23].

Метод продолжения по параметру, при котором построенная СФ является приближением для СФ, отвечающей некоторому следующему значению параметра, близкому к предыдущему. Метод продолжения по параметру дал новый толчок в исследовании спектра СФ, он позволил изучить бифуркации решений, найти новые структуры, построить дерево ветвлений и ответить на вопрос, сколько существует СФ при данном наборе параметров [21,23,24].

Эволюция СФ изучалась при изменении параметра β (значение σ было фиксированным) с помощью вычислительных алгоритмов продолжения решений по параметру. Было выявлено несколько различных сценариев эволюции двумерных СФ при изменении параметра. В частности, был найден интервал значений β, $(\sigma + 1) < \beta^{**} \leq \beta \leq \beta^{*}$, в котором существует каждая двумерная СФ.

Проведенные исследования позволили провести классификацию [23] структур на плоскости. Были найдены и изучены следующие типы СФ автомодельной задачи.

1. Простая, радиально-симметричная структура $\Theta_1(\xi)$, имеющая один максимум в начале координат и существующая при всех значениях параметров $\beta > \sigma+1$.

2. Радиально-симметричные одномерные СФ $\Theta_i(\xi)$, представляющие собой сходящиеся к центру кольцевые волны.

3. Структуры в виде плоских волн. Это одномерные СФ, удовлетворяющие автомодельному уравнению (5) и зависящие только от одной переменной ξ_1 или ξ_2.

Все остальные СФ представляют собой двумерные структуры. Они отличаются друг от друга:

- *порядком симметрии* m – СФ с порядком симметрии m при повороте на угол $\varphi = 2\pi/m$ переходит сама в себя; функции с порядком симметрии 2 и 4 являются особыми, для них можно построить отдельный класс приближений $E_{i\times j}$ в декартовой системе координат;
- *типом точки в центре симметрии* – СФ могут иметь: а) локальный максимум, б) локальный минимум, в) седловую точку, г) содержать нулевую область в окрестности начала координат;
- *сложностью архитектуры*, которая отражается в количестве и характере расположения локальных максимумов; существуют относительно простые двумерные структуры и более сложные двумерные СФ, в которых максимумы объединяются в группы; были так же найдены сложные структуры с дыркой, внутри которых содержится одна и более областей с нулевой температурой, то есть которые представляют собой многосвязные области горения.

4. Класс СФ $E_{i\times j}$**.** Структуры из этого класса могут быть построены с помощью линейных приближений (10). Максимумы и минимумы в них располагаются рядами. Архитектуру СФ из класса $E_{i\times j}$ можно охарактеризовать всего двумя числами i и j. Число j задает число рядов, в которых располагаются максимумы, а число i – число максимумов в ряду. На рис. 2 представлен вид двух СФ из этого класса, а также показаны их линии уровней.

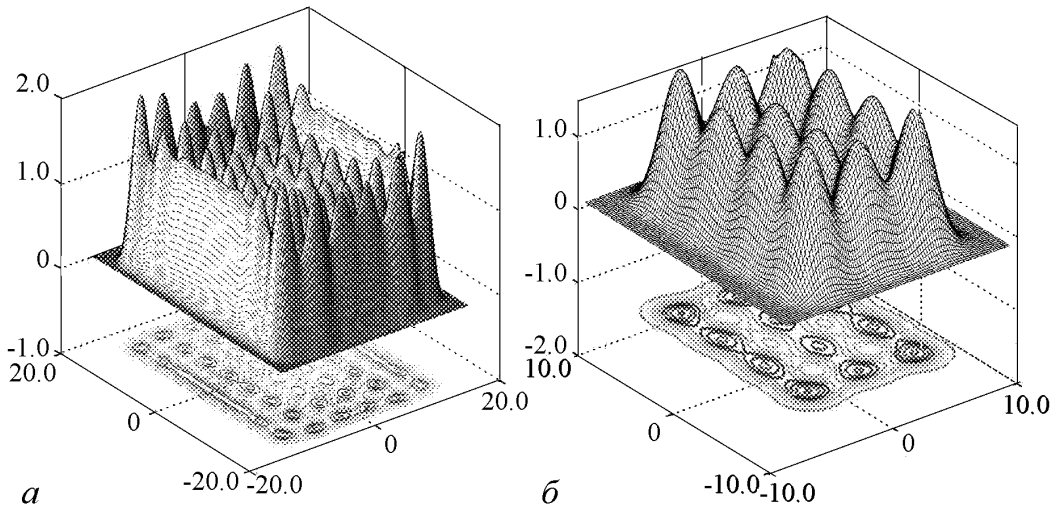


Рис. 2. Собственные функции из класса $E_{i\times j}$: *а* – СФ $\Theta_{6\times 8}(\xi_1, \xi_2)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3.05$; *б* – $\Theta_{3\times 4}(\xi_1, \xi_2)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3.15$

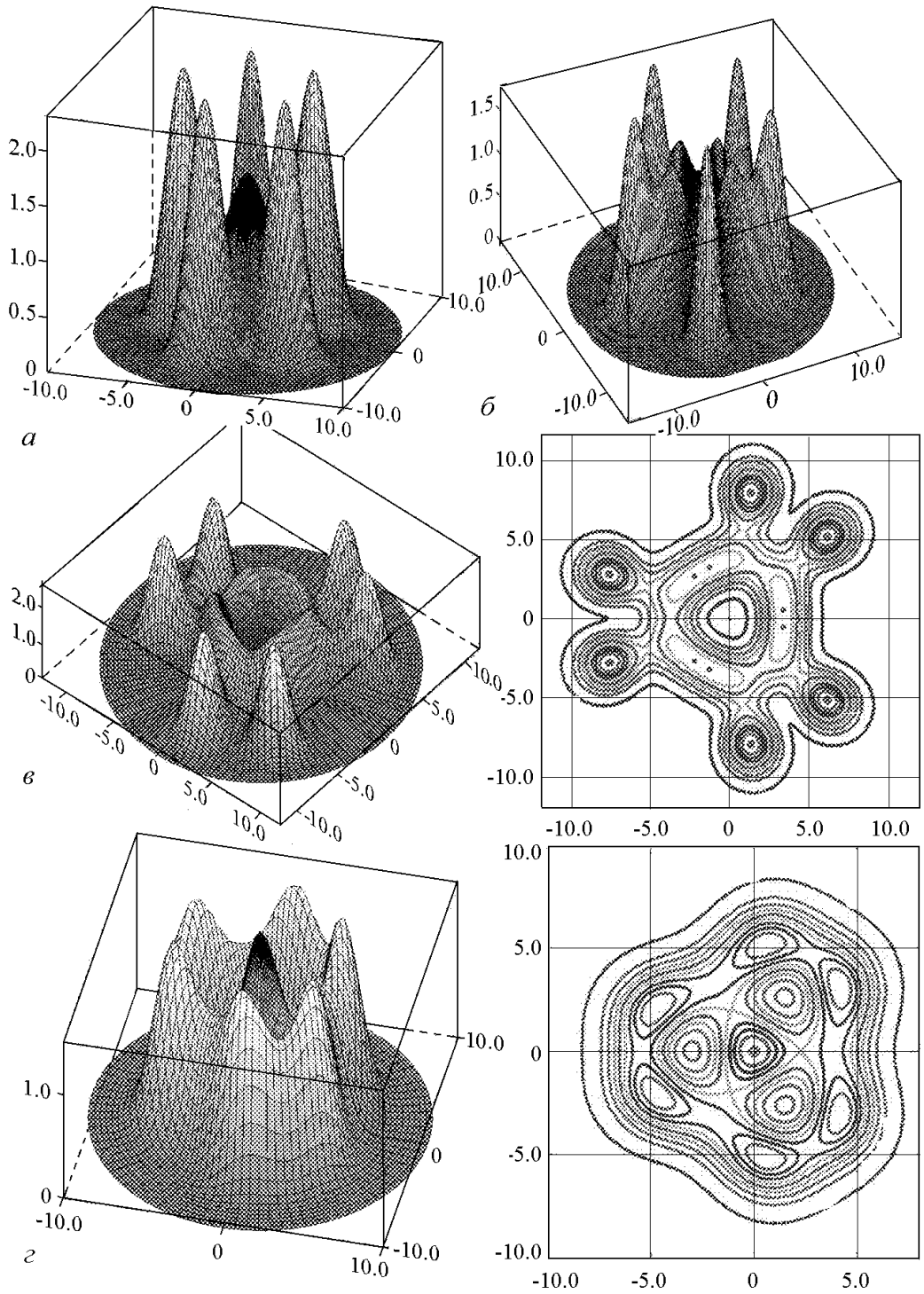


Рис. 3. Сложные многомодовые собственные функции из класса $E_j M_m$: *а* – $\Theta_{n3m5}(\xi, \varphi)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3.15$; *б* – $\Theta_{n4m5}(\xi, \varphi)$. Из класса $E_j M_m K_k ... L_l$: *в* – $\Theta_{n4m3\times2}(\xi, \varphi)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3.06$; *г* – $\Theta_{n3m3\times2}(\xi, \varphi)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3.15$

5. Класс СФ E_jM_m. Это относительно простые двумерные структуры, которые могут быть построены в полярной системе координат методом сшивания. Максимумы и минимумы СФ из класса E_jM_m располагаются на окружностях в вершинах правильных m-угольников. Архитектуру этих структур можно охарактеризовать всего двумя числами. Одно из них описывает число слоев j, в которых располагаются максимумы, другое – порядок симметрии m. Найдены структуры с порядком симметрии 2,3,...,11. СФ из класса E_jM_m могут иметь как локальный максимум, так и локальный минимум в центре симметрии. Исследование методом продолжения по параметру показало, что похожие структуры, одни из которых имеют максимум в центре симметрии, а другие – минимум, могут лежать на одной кривой зависимости от параметра и переходить друг в друга в точке седло-узловой бифуркации. Примером таких структур являются СФ $\Theta_{n3m5}(\xi,\varphi)$ и СФ $\Theta_{n4m5}(\xi,\varphi)$ (рис. 3, *а, б*); СФ со сдвоенными максимумами $\Theta_{n3/4m3\times2}(\xi,\varphi)$ (рис. 3, *в, г*), принадлежащие **Классу 6** (см. ниже).

6. Сложные многомодовые СФ. Классы СФ $E_jM_mK_k...L_l$. Существуют СФ со сложной архитектурой, которую нельзя охарактеризовать двумя числами и даже качественно нельзя описать приближениями E_jM_m и $E_{i\times j}$. К таким структурам относится описанная выше СФ со сдвоенными максимумами.

К некоторым из них удалось построить более сложные линейные приближения в полярной и декартовой системах координат методом сшивания, использующим несколько гармоник [19].

7. Двумерные структуры с дыркой, ответвляющиеся от радиально-симметричной СФ $\Theta_{2j}(\xi)$ (снятие вырождения по углу). Класс СФ $\Theta_{2j}M_m$. Это многосвязные структуры, имеющие в центре симметрии область с нулевой температурой, которые ответвляются от радиально-симметричных структур с дыркой. Они появляются в спектре при β, близких к $\sigma+1$ [24]. На рис. 4 показана структура с дыркой, объединяющая 8 одинаковых вершин.

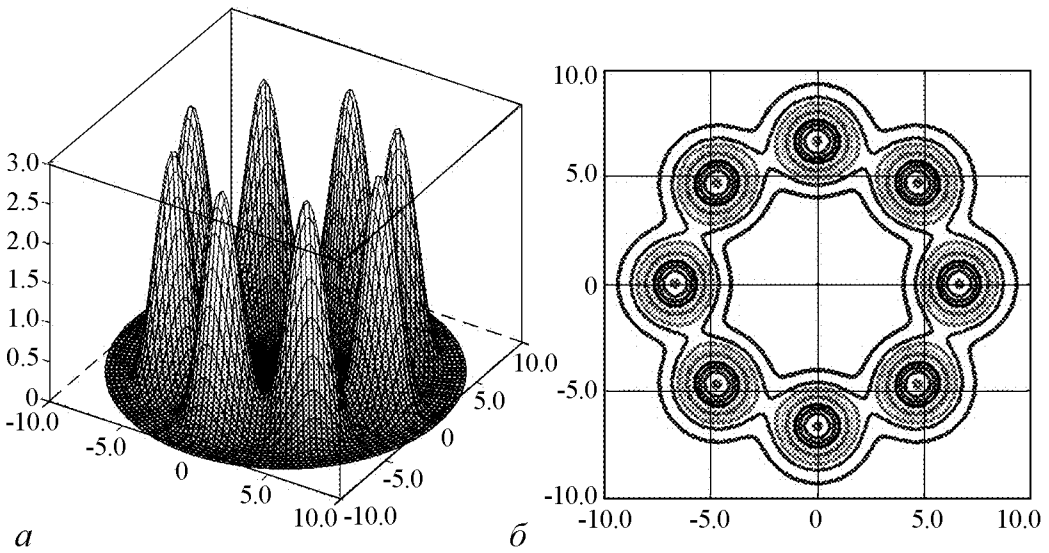


Рис. 4. Собственная функция $\Theta_{n2m8}(\xi,\varphi)$ (*а*) и ее линии уровня при $\sigma=2$, $\beta=3.04$ (*б*)

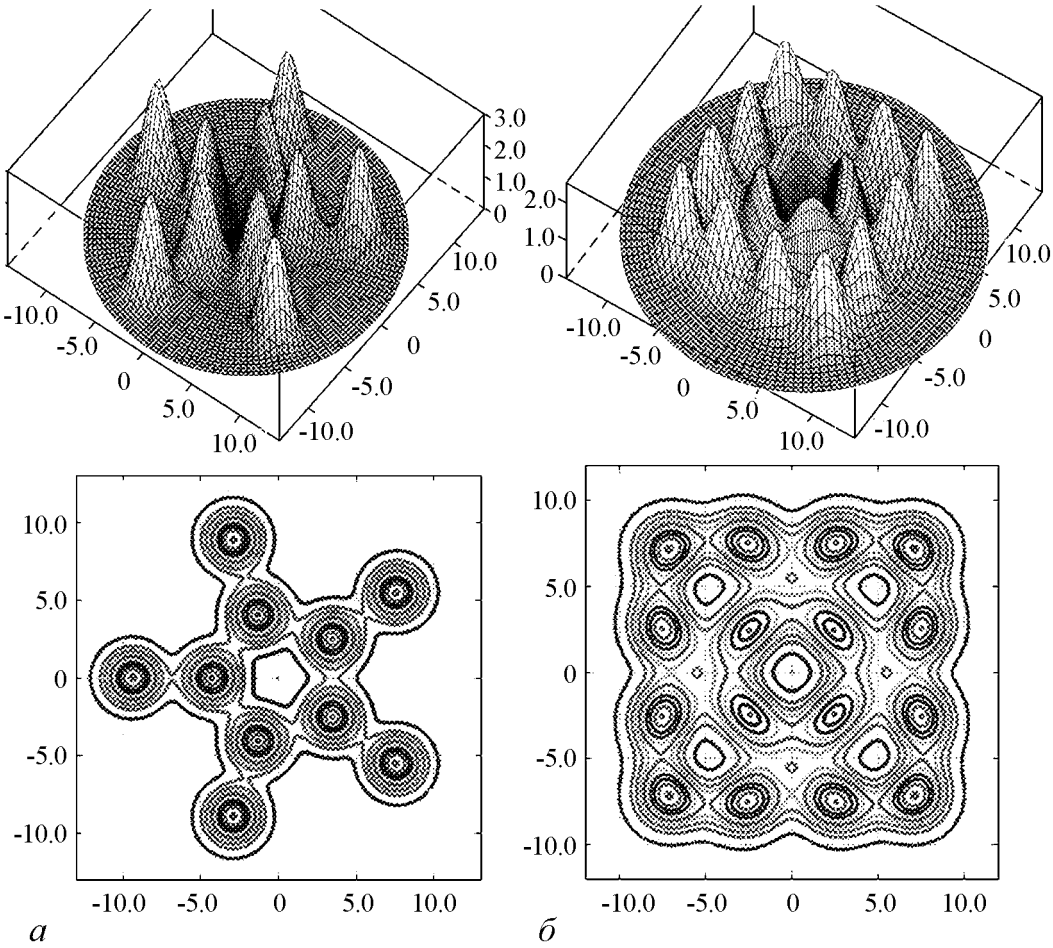


Рис. 5. Собственные функции многосвязных структур и их линии уровней: *а* – $\Theta_{n2/4m5}(\xi, \varphi)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3.01$; *б* – $\Theta_{n4m4}(\xi, \varphi)$, $\sigma = 2$, $\beta = 3.045$

8. Сложные многосвязные двумерные СФ. Они имеются в спектре только при β близких к $\sigma + 1$ и содержат внутри себя одну или более областей, в которых температура равна нулю (рис. 5).

9. Структуры с седловой точкой в начале координат. Найдено несколько структур с седловой точкой в центре с порядком симметрии 2 и 4. Они сохраняют свою структуру при всех значениях параметра из области своего существования и по ряду признаков не подходят ни к одному из перечисленных классов [23].

В заключение этого раздела отметим, что приведенная классификация не является законченной, дерево ветвлений на основе методов продолжения по параметру построено не полностью.

Динамика режимов с обострением. Устойчивость СФ

Рассмотренные выше автомодельные решения являются неустойчивыми по отношению к малым возмущениям. Малые возмущения решения приводят к малому изменению времени обострения t_f, которое в свою очередь приводит к сколь угодно

большому расхождению решений при приближении к моменту обострения. Однако автомодельные решения могут обладать *структурной устойчивостью* в смысле выхода на автомодельный режим [12]. Исследования показали, что простая структура с одним максимумом обладает структурной устойчивостью. Сравнительно недавно в [16,26] найдено еще одно структурно устойчивое автомодельное решение – вторая СФ с нулевой областью в центре симметрии (структура в виде сферического или цилиндрического слоя), которая появляется в спектрах радиально-симметричных структур при β близких к $\sigma + 1$.

Сложные СФ, имеющие два и более максимумов, не обладают структурной устойчивостью. Даже при резонансном возбуждении, то есть при использовании их в качестве начальных данных в задаче Коши, они теряют свою пространственную структуру при приближении к моменту обострения, при этом процесс горения вырождается в горение одной, двух или более простых структур, следующих автомодельному закону и имеющих свой момент обострения (рис. 6, *а*). Однако было отмечено, что в отличие от произвольных немонотонных профилей температуры, сложные СФ достаточно долго, почти все время обострения t_f, сохраняют свою пространственную структуру, следуя автомодельному закону. С.П. Курдюмовым было предложено назвать их метастабильно устойчивыми, или *метаустойчивыми* [7].

Устойчивость сложных СФ зависит от стадии процесса, развивающегося в режиме с обострением. Недавние исследования [25,26] показали, что на квазистационарной стадии (см. рис. 1, *а*) сложные структуры могут формироваться из некоторых немонотонных распределений (рис. 7, *а*) и восстанавливаться при внесении возмущений их профиля, то есть они демонстрируют элементы устойчивости. На стадии быстрого роста из-за сокращения пространственно-временных масштабов, все меньшие возмущения начинают оказывать влияние на структуру, и она начинает разваливаться. В целом можно утверждать, что чем сложнее структура, тем меньше время ее существования, тем быстрее она разваливается.

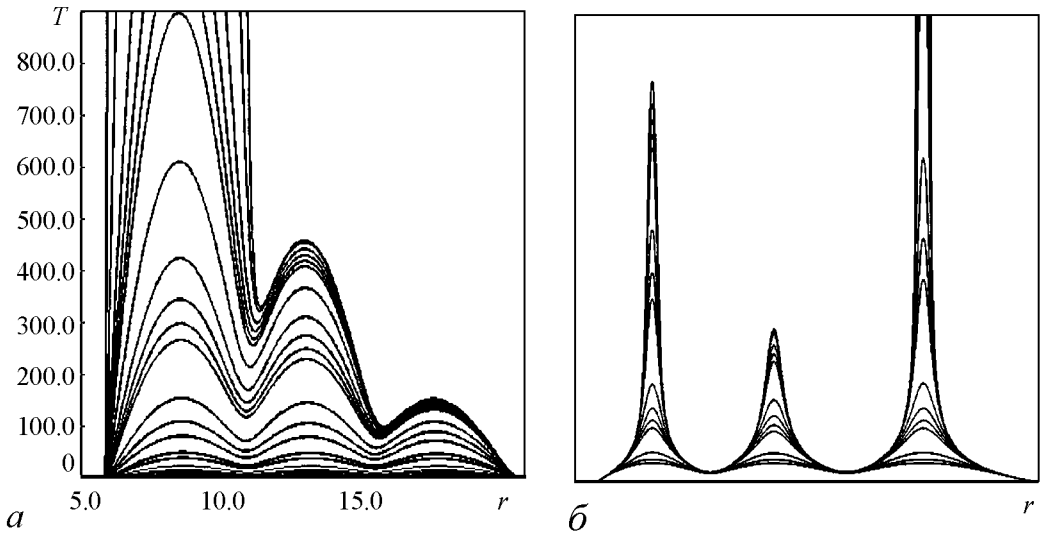
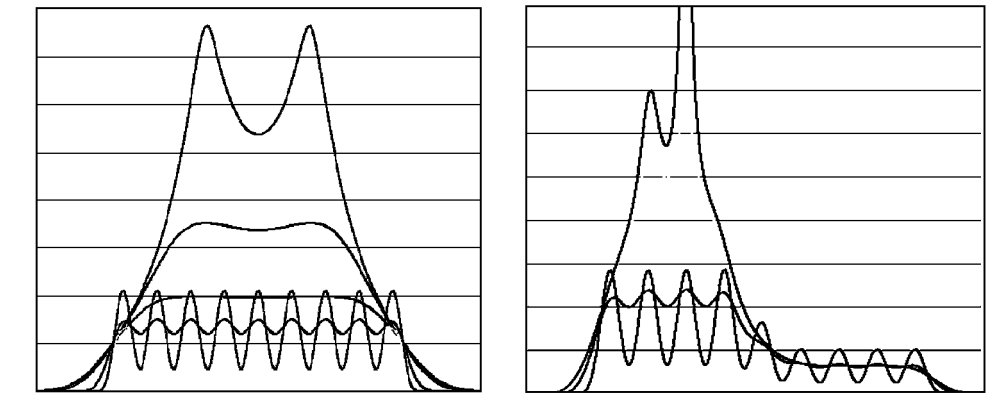


Рис. 6. *а* – эволюция радиально-симметричной собственной функции с тремя вершинами; *б* – структуры, живущие в разных темпомирах



а *б*

Рис. 7. Формирование структуры с двумя максимумами: *а* – правильное объединение; *б* – неправильное объединение, в сформировавшейся несимметричной структуре с двумя максимумами рост одного максимума начинает опережать рост другого

Темпомиры и принцип коэволюции

Остановимся подробнее на одной из главных характеристик развивающейся в режиме с обострением структуры – моменте обострения, на которую С.П. Курдюмов обратил внимание и сделал отсюда много далеко идущих эвристических выводов. Как уже было сказано, чем ближе к моменту обострения, тем быстрее происходит рост структуры. Это означает, что структуру с меньшим моментом обострения никогда не сможет догнать структура, у которой он больше, разрыв между ними увеличивается все быстрее и быстрее, и на стадии взрывного роста первой структуры, вторая – фактически застывает, не развивается по сравнению с первой. Говорят, что эти структуры живут в разных *темпомирах* (рис. 6, *б*). Время обострения простой структуры определяется ее высотой, чем она выше, тем быстрее развивается и тем меньше ей осталось жить. Казалось бы, что простые структуры, имеющие разную высоту, а значит и разные моменты обострения, не могут быть объединены в сложную структуру, имеющую единый для всех ее частей момент обострения. Однако это не так. Сложные СФ как раз представляют собой такие структуры – они *являются объединением простых структур с разными максимумами в единую структуру, имеющую определенную архитектуру, энергию связи и момент обострения*.

Другой важнейшей характеристикой структуры является ее область локализации, имеющая определенную форму и размер – фундаментальную длину. Если области локализации отдельных структур не пересекаются, то структуры развиваются независимо со своим моментом обострения, как показано на рис. 6, *б*. Если области локализации пересекаются, то структуры начинают взаимодействовать (то есть пространственный профиль всего распределения плотности начинает перестраиваться). В этом случае может произойти либо их объединение в более сложную структуру, либо одна структура может поглотить другую структуру, либо обе структуры могут разрушиться, а на их месте сформируется новая структура.

Рассмотрим, как происходит формирование структур на ранних стадиях эволюции из достаточно произвольных начальных распределений. Расчеты показали, что вначале за счет процессов диффузии идет глобальная перестройка профиля начального распределения, которая может сопровождаться его значительным растеканием (см. рис. 7). Затем растекание прекращается и начинается формирование и рост одной, двух и более простых или сложных структур. На рис. 7, *а* показано формирование структуры с 2-мя максимумами из начального синусоидального распределения плотности, имеющего много максимумов. Сформировавшаяся СФ развивалась по автомодельному закону почти до момента обострения. На рис. 7, *б* показан пример другого расчета, в котором образовалась несимметричная структура с двумя максимумами, которая жила недолго, потому что не соответствовала симметричной СФ. В итоге более высокий максимум оторвался от меньшего максимума и стал развиваться в более быстром темпе; он и определил динамику развития всей структуры.

Таким образом, для данной нелинейной среды с заданными параметрами существует строго определенный набор пространственных конфигураций, в которые можно объединять простые структуры, и этот набор определяется спектром СФ. Совокупность всех сложных СФ, развивающихся в одном темпе или «живущих» в одном темпомире, представляет собой *организацию* нелинейной среды. Иными словами, сложные СФ являются «правильным» объединением простых структур с разными максимумами, при котором все части структуры развиваются синхронно в одном темпомире. В этом состоит выдвинутый С.П. Курдюмовым *принцип коэволюции, принцип нелинейного синтеза или принцип объединения простых структур в сложные* [7].

Модель эволюционной динамики С.П. Курдюмова

В последнее время стало ясно, что режимы с обострением, описывающие развитие во взрывном режиме, являются промежуточными асимптотиками очень многих реальных процессов, и уравнение (1) обладает большой общностью. Доказано, что оно является асимптотикой многих уравнений с другими зависимостями $k(T)$ и $Q(T)$ [10].

В режиме с обострением происходила химическая эволюция во Вселенной, биологическая эволюция, глобальная эволюция общества, а также развитие многих крупных и мелких физико-химических, биологических, социальных, экономических и других систем. Для эволюции систем, развивающихся в режиме с обострением, характерен ускоренный рост общей мощности рассматриваемого процесса, который выражается в сокращении периодов, или циклов развития [27–30]; усиление процессов концентрации вещества или информации в некоторых центральных местах [31]; формирование, развитие структур разной сложности и их гибель на заключительных этапах циклов. Все это имеет место в LS-режиме с обострением и адекватно описывается уравнением (1). Многие общие законы пространственно-временной эволюции систем могут быть выведены из динамики режимов с обострением и описаны с точки зрения развития сложных структур. Именно динамика режимов с обострением была положена С.П. Курдюмовым в основания синергетики [1–3]. Поэтому уравнение (1) мы назвали *моделью эволюционной динамики С.П. Курдюмова*.

С.П. Курдюмову принадлежит идея применения этого уравнения и для моделирования эволюции человеческого сообщества. Он увидел глубокую аналогию между процессами горения нелинейной среды, ведущими к образованию и распаду сложных пространственно-временных структур, и историческими процессами, сопровождающимися образованием, ростом и распадом империй [8,9]. Новые результаты по моделированию глобальных исторических процессов получены в работах учеников и продолжателей дела Курдюмова [33–38]. В этих работах были исследованы основные тренды и исторические циклы развития, проанализированы особенности расселения людей и развития пространственных структур: городов, государств, империй, геополитических и экономических сообществ на каждом историческом этапе, сопоставленным с этапом развития в режиме с обострением, определены некоторые черты будущей цивилизации.

Важнейшими следствиями анализа эволюционной динамики в режиме с обострением являются следующие выводы:

- о метастабильной устойчивости структур социального мира;
- об усилении неустойчивости в моменты максимального развития, расцвета (приближении к моменту обострения);
- о периодическом распаде сложных структур и формировании новых структур, возникновении социальных и культурных инноваций;
- об усилении дифференциации, расслоения в социальных структурах и выпадения самых слабых звеньев из общей развивающейся структуры.

Понимание законов эволюции и коэволюции, а также синергетических принципов управления сложными системами позволяет оказывать влияние на выбор благоприятных путей развития в точках бифуркации или вблизи обострения, формирование предпочтительных сложных структур и поддержании их метастабильной устойчивости.

Поиск *конструктивных принципов коэволюции сложных структур* мира – главное дело жизни Сергея Павловича. Почему открываемые синергетикой *принципы коэволюции* Курдюмов называл *конструктивными*? Потому что они могут использоваться для эффективной управленческой деятельности в социуме, для стратегического видения будущего и планирования на долгосрочную историческую перспективу, для выработки разумной национальной и государственной политики в глобализирующемся мире. Потому что синергетические принципы коэволюции глубоко содержательны и ориентированы на отдаленное будущее, которое практически невозможно предсказывать традиционными методами. Потому что глубокое понимание синергетических принципов коэволюции, нелинейного синтеза частей в устойчиво эволюционирующее целое может и должно лечь в основу современного «искусства жить вместе», содействуя утверждению толерантности и сохранению разнообразия в глобализирующихся сообществах. Коэволюция, как учил Курдюмов, есть «искусство жить в одном темпомире», не свертывая, а поддерживая и развивая разнообразие на уровнях элементов и отдельных подсистем.

Исследование выполнено при поддержке РГНФ (проект № 11-23-01005/Bel «Инновационная сложность: методологические, когнитивные и социальные аспекты»).

Библиографический список

1. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики. Синергетическое мировидение. М.: КомКнига, 2005. 240 с. Изд.3, доп. М.: УРСС, 2010.
2. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики. Человек, конструирующий себя и свое будущее. М.: КомКнига, 2006. 232 с. Изд.4, доп. М.: УРСС, 2011.
3. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Синергетика как новое мировидение: Диалог с И.Пригожиным // Вопросы философии. 1992. № 12. С. 3.
4. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Интуиция как самодостраивание // Вопросы философии. 1994. № 2. С.110.
5. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Антропный принцип в синергетике // Вопросы философии. 1997. № 3. С. 62.
6. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Синергетика: Нелинейность времени и ландшафты коэволюции. М.: КомКнига, 2007. 272 с. Изд. 2, 2011.
7. *Курдюмов С.П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982.
8. *Белавин В.А., Капица С.П., Курдюмов С.П.* Математическая модель демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 6. С. 885.
9. *Белавин В.А., Курдюмов С.П.* Режимы с обострением в демографической системе. Сценарий усиления нелинейности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, № 2. С. 238.
10. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений М.: Наука, 1987. 480 с.
11. Режимы с обострением: Эволюция идеи / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Физматлит, 2006. 312 с.
12. *Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // ЖВМиМФ. 1983. Т. 23, № 2. С. 380.
13. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Самарский А.А.* Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде // ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 3.
14. *Димова С.Н., Касичев М.С., Курдюмов С.П.* Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1683.
15. *Куркина Е.С., Курдюмов С.П.* Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением //ДАН 2004. Т. 395, № 6. С. 1.
16. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С.* Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1619.
17. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А.* Архитектура многомерных тепловых структур // ДАН СССР. 1984. Т. 274, № 5. С. 1071.
18. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А.* Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды // ЖВМиМФ. 1986. Т. 26, № 8. С. 1189.

19. *Потапов А.Б.* Построение двумерных собственных функций нелинейной среды. Препринт № 8. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
20. *Димова С.Н., Касчиев М.С., Колева М.Г.* Анализ собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов // Матем. моделир. 1992. Т. 4, № 3. С. 74.
21. *Kurkina E.S.* Two-dimensional and three-dimensional thermal structures in a medium with nonlinear thermal conductivity // Computational Math. and Modeling. 2005. Vol. 16, № 3. P. 257; *Куркина Е.С.* Двумерные и трехмерные тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью // Прикладная математика и информатика. № 17. С. 84. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2004.
22. *Куркина Е.С., Курдюмов С.П.* Квантовые свойства нелинейной диссипативной среды // ДАН. 2004. Т. 399, № 6. С. 1.
23. *Kurkina E.S., Nikol'skii I.M.* Bifurcation analysis of the spectrum of two-dimensional thermal structures evolving with blow-up // Computational Math. and Modeling. 2006. Vol. 17, № 4. P. 320; *Куркина Е.С., Никольский И.М.* Бифуркационный анализ спектра двумерных тепловых структур, развивающихся в режиме с обострением // Прик. матем. и информат. № 22. С. 30. М.: Изд-во МГУ, 2005.
24. *Куркина Е.С.* Многосвязные структуры горения нелинейной среды// Препринт № 26. ИПМ РАН, 2006. 25 с.
25. *Куркина Е.С.* Спектр двумерных локализованных структур, развивающихся в режиме с обострением // Динамика сложных систем. 2007. Т. 1, № 1. С. 17.
26. *Kurkina E.S., Nikol'skii I.M.* Stability and localization of unbounded solutions of a nonlinear heat equation in a plane // Computational Math. and Modeling. 2009. Vol. 20, № 4. P. 348; *Куркина Е.С., Никольский И.М.* Устойчивость и локализация неограниченных решений нелинейного уравнения теплопроводности на плоскости // Прикладная математика и информатика. № 31. С. 40. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2009.
27. *Капица С.П.* Теория роста населения Земли. М.: Изд-во МФТИ, 1997. 82 с.
28. *Капица С.П.* Очерки теории роста человечества. Демографическая революция и информационное общество. М.: ЗАО ММВБ, 2008.
29. *Малков С.А., Коротаев А.В., Халтурина Д.А.* Математическая модель роста населения Земли, экономики, технологии и образования // Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение. Часть 1 / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Радиотехника, 2006. С. 360.
30. *Иванов О.П.* Сложность как категория эволюции // Сложные системы. 2011. № 4. С. 48.
31. *Родоман Б.Б.* Территориальные ареалы и сети. Смоленск: Ойкумена, 1999.
32. *Руденко А.П.* Самоорганизация и синергетика // Синергетика. Т. 3. С. 61. М.: Изд-во МГУ, 2000.
33. *Белавин В.А., Князева Е.Н., Куркина Е.С.* Математическое моделирование глобальной динамики мирового сообщества //Нелинейность в современном естествознании. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. С. 384.
34. *Kuretova E.D., Kurkina E.S.* Modeling general laws of spatial-temporal evolution growth and historical cycles // Computational Mathematics and Modeling. Springer, New York. 2010. Vol. 21, №2. P. 70; *Куретова Е.Д., Куркина Е.С.* Математическое моделирование общих законов пространственно-временного развития общества: Гиперболический тренд и исторические циклы // Прикладная математика и информатика. № 32. С. 67. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2009.

35. *Куркина Е.С., Князева Е.Н.* Эволюция пространственных структур мира: Математическое моделирование и мировоззренческие следствия // Эволюция: Дискуссионные аспекты глобальных эволюционных процессов. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. С. 274.
36. *Куркина Е.С.* Математическое моделирование глобальной эволюции мирового сообщества. Демографический взрыв и коллапс цивилизации // История и математика. Анализ и моделирование глобальной динамики. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. С. 230.
37. *Князева Е.Н., Куркина Е.С.* Природа сложности: Методологические следствия математического моделирования эволюции сложных структур // Синергетическая парадигма. Синергетика инновационной сложности. М.: Прогресс-Традиция, 2011. С.443.
38. *Kurkina E.S.* Modeling global spatial-temporal evolution of society: Hyperbolic growth and historical cycles // Extended Abstract in Conference Proceedings of ICNAAM-2011. American Institute of Physics. 2011. Vol. A. P. 1019.

МГУ им. М.В. Ломоносова
НИУ «Высшая школа экономики»

Поступила в редакцию 3.07.2013

SERGEY P. KURDYUMOV AND HIS EVOLUTIONARY MODEL OF DYNAMICS OF COMPLEX SYSTEMS

Elena S. Kurkina and Helena N. Knyazeva

Sergei P. Kurdyumov (1928–2004) and his distinguished contribution in the development of the modern interdisciplinary theory and methodology of study of complex self-organizing systems, i.e. synergetics, is under consideration in the article. The matter of a mathematical model of evolutionary dynamics of complex systems elaborated by him is demonstrated. The nonlinear equation of heat conductivity serves as a basis of the model. Under certain conditions, it describes dynamics of development of structures of different complexity in the blow-up regime. Methods of calculation of two-dimentional structures which are described by automodel solutions are considered; and their classification is given. The automodel problem is a boundary problem aiming to find eigen-values and eigen-functions for a nonlinear equation of elliptical type on a plane. Proceeding from the analysis of the model, a principle of coevolution was formulated by S.P. Kurdyumov. This is the principle of integration of simple structures into a complex one. Three notions of great significance follow from the principle, and namely: the notion of connection of space and time, the notion of complexity and its nature and the notion evolutionary cycles and switching over different regimes as a necessary mechanism of maintenance of «life» of complex structures. Approaches of possible application of this model for understanding of dynamics of complex social, demographic and geopolitical systems are viewed as well.

Keywords: Complex systems, blow-up regimes, coevolution, heat structures, instability, interdisciplinarity, nonlinearity, self-organization, space and time, synergetics, tempo-worlds.

Куркина Елена Сергеевна – родилась в Москве (1956). Окончила физический факультет МГУ (1979) и аспирантуру факультета ВМК МГУ (1982). Защитила кандидатскую диссертацию (1982) на тему «Нестационарные диссипативные структуры в средах с источником» и докторскую диссертацию (2005) на тему «Математическое моделирование пространственно-временных структур в системах типа реакция-диффузия». С 1982 года работает на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, руководитель группы и темы НИР, профессор РХТУ им. Д.И. Менделеева, член редколлегии журнала «Сложные системы». Область научных интересов: математическое моделирование, режимы с обострением, сложные системы, автоколебания, пространственные структуры и другие явления самоорганизации в нелинейных системах типа реакция-диффузия. Автор более 140 научных статей по математическому моделированию пространственно-временных структур, возникающих в различных физико-химических и социально-экономических системах. Автор монографии «Автоколебания, структуры и волны в химических системах. Методы математического моделирования» (М.: РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2012. 220 с.). В основу монографии положен разработанный курс лекций для студентов РХТУ. Награждена Почетной грамотой Министерства образования и науки «За большой личный вклад в развитие отечественной науки и многолетний добросовестный труд» (2011).

119992 Москва, Ленинские горы, ГСП-2
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: e.kurkina@rambler.ru; elena.kurkina@cs.msu.su

Князева Елена Николаевна – родилась в Московской области (1959). Окончила физический факультет Московского педагогического государственного университета (1982) и очную аспирантуру Института философии АН СССР (1985). Защитила кандидатскую диссертацию на тему «Принцип детерминизма в диалектической логике» (1986, Институт философии АН СССР) и докторскую диссертацию на тему «Эволюция научного знания: процессы самоорганизации» (1994, Институт философии РАН). С 1985 года работала в Институте философии РАН, в 2008–2013 годах – в должности заведующего сектором эволюционной эпистемологии. Как стипендиат Фонда Александра фон Гумбольдта работала в научных центрах Г. Хакена при Университете Штутгарта и К. Майнцера в Университете Аугсбурга и Техническом университете Мюнхена. Как приглашенный исследователь стажировалась в Центре по исследованию социологии, антропологии и истории Э. Морена в Париже. Член Немецкого общества по исследованию сложных систем и нелинейной динамики в Германии, Ассоциации сложного мышления во Франции, Международного научного совета Множественная вселенная – подлинный мир Эдгара Морена в Мексике. Член редакционной коллегии серии книг, выпускаемой Центром Л. фон Берталанфи «Единство через разнообразие» (Вена, Австрия). В настоящее время – доктор философских наук, профессор факультета философии Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Область научных интересов: эпистемология и философия науки. Автор более 400 работ, из них 8 монографий, в числе которых: «Законы самоорганизации и эволюции сложных систем» (1994, в соавт. с С.П. Курдюмовым), «Одиссея научного разума» (1995), «Основания синергетики» (2002, в соавт. с С.П. Курдюмовым), «Синергетика: нелинейность времени и ландшафты коэволюции» (2007, в соавт. с С.П. Курдюмовым), «Темпомиры: скорость восприятия и шкалы времени» (2008, в соавт. С А.Л. Алюшиным). Переводчик работ И. Пригожина, В. Эбелинга, К. Майнцера, Ж. Петито, Э. Морена, в том числе основного сочинения Э. Морена «Метод. Природа Природы» (2-е изд., М.: Канон+, 2013).

101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: helena_knyazeva@mail.ru