

## **ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ АНАЛОГ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЛОРЕНЦА В КОЛЬЦЕВОЙ ТЕРМОКОНВЕКТИВНОЙ ЯЧЕЙКЕ**

*Р.А. Браже, О.Н. Куделин*

Получена система нелинейных уравнений, приближенно описывающих явление термоэлектрогидродинамической конвекции в полупроводниковой кольцевой ячейке, сводимая к модели Лоренца. Исследованы зависимости параметров модели от материала и размеров кольца, напряженности приложенного электрического поля и градиента температуры.

### **1. Постановка задачи**

В работах [1, 2] авторами была построена теория термоэлектрогидродинамической конвекции (ТЭГДК) в субмикронных полупроводниковых слоях с учетом рассеяния носителей заряда на ионах кристаллической решетки. Такое явление является аналогом хорошо известной термоконвекции Бенара в слое вязкой жидкости. Далее в [3] были исследованы устойчивые и неустойчивые режимы ТЭГДК, а также появление детерминированного хаоса, аналогичного предсказанному Э. Лоренцом [4] для конвекции Бенара.

Одной из причин, затрудняющих экспериментальную проверку разработанных модельных представлений о ТЭГДК в плоских полупроводниковых слоях, является отсутствие простых и надежных способов визуализации конвективных токов свободных носителей заряда. В связи с этим представляется обнадеживающим обращение к модели ТЭГДК в кольцевом слое полупроводника (рис. 1). Такая конвекция, если она существует, аналогична термоконвекции в тороидальной ячейке, заполненной вязкой жидкостью [5, 6]. Остроумная техника экспериментального исследования этого явления предложена в [7]. В случае полупроводникового кольца о наличии ТЭГДК и направлении конвективного тока можно судить по возникающему в кольце магнитному полю, что должно облегчить экспериментальное исследование данного явления.

В связи с этим интересно было бы также рассмотреть задачу с системой вложенных друг в друга полупроводниковых колец, в том числе выполненных из различных материалов. Это позволило бы исследовать возможность хаотической синхронизации конвективных режимов в различных кольцах и иные кооперативные явления, возникающие вследствие взаимодействия магнитных полей конвективных токов. Для начала, однако, необходимо рассмотреть возможность существования обсуждаемой конвекции в отдельном кольце.

Система уравнений, описывающая движение свободных электронов в кольце, в гидродинамическом приближении получается из кинетического уравнения Больцмана и уравнений Максвелла в ходе процедуры усреднения скоростей электронов и пренебрежения рекомбинационными процессами в масштабах характерных времен наблюдения [8, 9]. В итоге получается 5 законов сохранения для первых 13 моментов функции распределения электронов по координатам и импульсам:

- закон сохранения концентрации частиц (скаляр), который сводится к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0; \quad (1)$$

- закон сохранения потока импульса (вектор, имеющий 3 компоненты), который сводится к модифицированному уравнению Навье – Стокса (здесь для угловой компоненты в цилиндрических координатах)

$$m^* n \left[ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right] - neE \sin \phi - \frac{m^* n v_\phi}{\tau_p}; \quad (2)$$

- закон сохранения плотности энергии (скаляр);
- закон сохранения плотности потока импульса (тензор второго ранга, 5 независимых компонент);
- закон сохранения плотности потока энергии (вектор, 3 независимых компоненты).

Последние три закона сохранения сводятся к уравнению теплопереноса

$$m^* n T \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + v_r \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial s}{\partial \phi} \right] = \kappa \Delta T + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \delta_{ik} \Delta \mathbf{v} \right)^2 + \zeta (\Delta \mathbf{v})^2 + \mathbf{jE} + \frac{m^* n v^2}{\tau_p}. \quad (3)$$

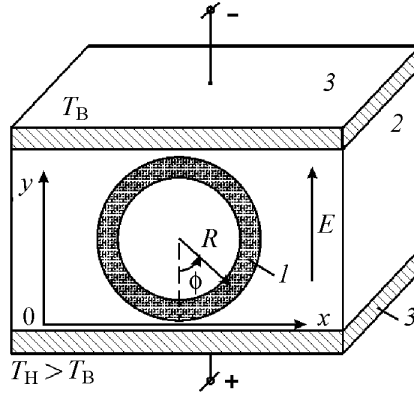


Рис. 1. Исследуемая модель: 1 – полупроводниковый слой ( $n$ -типа); 2 – диэлектрическая подложка; 3 – металлические электроды, между которыми создан градиент температуры

В выражениях (1)–(3) приняты следующие обозначения:  $n$  – концентрация свободных электронов,  $m^*$  – их эффективная масса (считается изотропной),  $v$  – гидродинамическая скорость электронов,  $p$  – давление электронной квазижидкости,  $\eta$  и  $\zeta$  – соответственно коэффициенты ее объемной и сдвиговой вязкости,  $E$  – напряженность электрического поля,  $\tau_p$  – время релаксации импульса (через него учитывается рассеяние электронов на фононах),  $T$  – абсолютная температура,  $s$  – удельная энтропия,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  $j$  – плотность тока,  $t$  – время.

В теории конвекции обычно используется приближение Буссинеска, состоящее в предположении о постоянстве силового поля (в нашем случае электрического) в среде. Это позволяет не учитывать влияние возмущений ее плотности (в нашем случае плотности заряда) на само поле и не использовать уравнение Пуассона, ограничиваясь анализом системы (1)–(3).

Отметим, что никаких особых требований к используемым полупроводниковым материалам, в частности, к ширине запрещенной зоны, проводимости и пр., пока не предъявляется. Имеются в виду невырожденные примесные полупроводники  $n$ - или  $p$ -типа (в теоретическом описании –  $n$ -тип). Изотропность эффективной массы электронов в плоскости кольца может быть достигнута в ходе такого напыления полупроводниковой пленки на подложку, при котором оптическая ось перпендикулярна поверхности. Что касается оптимизации остальных параметров, то на этом вопросе мы остановимся ниже, в ходе анализа модели.

## 2. Уравнения Лоренца

Умножая (1) на  $R^2$  и интегрируя по  $\phi$ , получаем

$$J \frac{d\omega}{dt} = -R^2 w \oint_{2\pi} m^* n \sin \phi d\phi - \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right) \omega, \quad (4)$$

где  $J = 2\pi m^* n R^3$  – момент инерции электронной квазижидкости, приходящийся на единицу площади сечения кольца;  $h = 2\pi R \eta$  – коэффициент трения, обусловленный вязкостью среды;  $w = eE/m^*$  – ускорение, обусловленное электрическим полем;  $\omega$  – угловая скорость вращения частиц среды.

В уравнении (2) пренебрежем диссипативным членом и предположим, что теплообмен между электронной квазижидкостью и диэлектрической подложкой пропорционален разности их температур. Учитывая, что  $ds = c_p dT/T$  ( $c_p$  – удельная теплоемкость), получаем

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] = \frac{\chi}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - K [T(\phi, y) - T_h(\phi)]. \quad (5)$$

Здесь  $T_h(\phi)$  – температура электронной квазижидкости при  $y = h(\phi)$  (рис. 1);  $\chi = \kappa/(m^* n_0 c_p)$  – коэффициент температуропроводности;  $K$  – коэффициент теплопередачи. Предположим также, что концентрация свободных электронов зависит от температуры по закону

$$n = n_0 [1 - \alpha (T - T_0)], \quad (6)$$

где  $\alpha = E_a/(2k_B T^2)$  – коэффициент теплового расширения, полученный из температурной зависимости концентрации электронов ( $E_a$  – энергия активации доноров,  $k_B$  – постоянная Больцмана);  $T_0$  – значение температуры, при которой концентрация электронов равна  $n_0$ .

Далее по аналогии с [10], где исследовалась классическая гидродинамическая модель в тороиде с жидкостью, разложим  $T_h(\phi)$  и  $T(\phi, t)$  в ряды Фурье по углу  $\phi$  с учетом четности функции  $T_h(\phi)$ :

$$\begin{cases} T_h(\phi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos n\phi, \\ T(\phi, t) = T_0 + a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos n\phi + b_n(t) \sin n\phi]. \end{cases} \quad (7)$$

В частности, при  $n = 1$  температура на «нижней» границе образца ( $\phi = 0^\circ$ )  $T_H = T_0 + a_0(t) + T_1$ , а температура на «верхней» границе ( $\phi = 180^\circ$ )  $T_B = T_0 + a_0(t) - T_1$ . Разность температур на образце  $\Delta T = T_H - T_B = 2T_1$ .

Подставляя (6), (7) в (4) и (5), получаем систему, состоящую, вообще говоря, из бесконечного числа уравнений. В частности, для  $n = 1$

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = \frac{\alpha m^* n_0 \omega R^2}{2} b_1 - \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right) \omega, \dot{a}_1 = -\omega b_1 - \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) a_1 + K T_1, \\ \dot{b}_1 = \omega a_1 - \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) b_1, \end{cases} \quad (8)$$

и для  $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\begin{cases} \dot{a}_0 = -K a_0, \dot{a}_n = -n\omega b_n - \left( K + n^2 \frac{\chi}{R^2} \right) a_n + K T_n, \\ \dot{b}_n = n\omega a_n - \left( K + n^2 \frac{\chi}{R^2} \right) b_n. \end{cases}$$

В полученной системе уравнений верхняя группа (8) не зависит от всех остальных. Когда амплитуды всех мод, кроме трех, равны нулю, эта группа преобразуется к уравнениям Лоренца для выбранной выше геометрии ячейки:

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = \sigma(Y - X), \\ \frac{dY}{d\tau} = rX - Y - ZX, \\ \frac{dZ}{d\tau} = XY - Z, \end{cases} \quad (9)$$

где параметры  $\sigma$  и  $r$  определяются из следующих выражений:

$$\sigma = \frac{h + \frac{J}{\tau_p}}{J \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right)}; \quad r = \frac{\alpha m^* n_0 \omega R^2}{2 \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right)} T_1. \quad (10)$$

Решение системы (9) имеет вид

$$X = \frac{\omega}{K + \frac{\chi}{R^2}}; \quad Y = \frac{\alpha m^* n_0 w R^2}{2K \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right)} b_1; \quad Z = r - \frac{\alpha m^* n_0 w R^2}{2K \left( h + \frac{J}{\tau_p} \right)} a_1; \quad (11)$$

$$\tau = \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) t.$$

В случае конвективной ячейки более общей, эллиптической формы в последнем уравнении системы (9) появляется новый параметр [11, 12]

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ.$$

Здесь  $b = 4/(1 + a^2)$ , где величина  $a$  определяет характерный масштаб мод, раньше других теряющих устойчивость. Для ячейки круговой формы  $a = \sqrt{3}$  и  $b = 1$ .

### 3. Анализ модели

Для оценки возможных значений параметров  $\sigma$ ,  $r$  полученного полупроводникового аналога модели Лоренца, основанного на квазигидродинамических уравнениях, воспользуемся принятыми в рамках такого подхода [2, 9] кинетическими представлениями относительно коэффициентов вязкости, температуропроводности и времени релаксации импульса. Иначе говоря, предполагается, что свободные электроны полупроводника сохраняют характеристики одноатомного электронного газа независимо от нашего усредненного описания их движения. Поскольку в газах коэффициенты кинематической вязкости  $\nu$  и температуропроводности  $\chi$  равны по величине коэффициенту диффузии  $D$ , то в соответствии с формулой Эйнштейна

$$\nu = \chi = D = \mu k_B T / e,$$

где  $\mu$  – подвижность электронов.

Таким образом, в нашей модели число Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\chi \sim 1$ . Введенный в (10) параметр  $\sigma$  в допущении  $K \leq \chi/R^2$  можно представить в виде

$$\sigma = \frac{hR^2}{\chi J} \left( 1 + \frac{J}{\tau_p h} \right) = \text{Pr} \left( 1 + \frac{J}{\tau_p h} \right).$$

Проведем теперь численные оценки величины этого параметра в полупроводниковом кольце, взяв в качестве примера материал с высокой подвижностью электронов – антимонид индия (InSb), легированный медью (Cu). Он обладает следующими интересующими нас характеристиками [13, 14]:  $m^* = 0.12 \cdot 10^{-31}$  кг;  $E_a = 0.056$  эВ;  $\mu = 7.8 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ;  $n_0 \sim 10^{17} \text{ м}^{-3}$ . Значение  $\sigma$  существенным образом зависит от отношения величин  $h$  и  $J/\tau_p$ . В соответствии с вышеизложенным,  $h = 2\pi R n_0 m^* D$ , а  $\tau_p = \mu m^*/e$ , так что

$$\frac{J}{\tau_p h} = \frac{e^2 R^2}{\mu^2 m^* k_B T}.$$

Задав в качестве минимально возможного из технологических соображений радиуса кольца  $R \sim 10^{-3}$  м, при  $T = 300$  К получаем для нашего примера значение  $J/(\tau_p h) \sim 10^8$ . Уменьшить эту величину подбором материала, размеров кольца и температуры на 8 порядков нереально, так что в нашей модели эффективное число Прандтля  $\sigma \gg 1$  всегда.

Заметим, что при термоэлектродинамической конвекции в плоском слое [1–3] толщина полупроводниковой пленки может быть доведена до сотых долей микрометра. Это позволяет реализовать в ней близкий к бесстолкновительному (баллистическому) режим движения свободных носителей заряда в конвективных ячейках, когда  $\tau_p \gg J/h$  и  $\sigma \approx \text{Pr} \sim 1$ .

С учетом сделанной оценки эффективное, нормированное к критическому значению число Рэлея

$$r = \frac{\alpha m^* n_0 w R^2 \tau_p T_1}{2 \left( K + \frac{\chi}{R^2} \right) J},$$

что для  $R \sim 10^{-3}$  м,  $T = 300$  К дает

$$r \sim 10^{-5} E \Delta T,$$

где, как указывалось в разделе 2,  $\Delta T = 2T_1$  – разность температур на образце ( $E$  и  $\Delta T$  измеряются в единицах СИ).

Как следует из полученного соотношения и рис. 2, при выбранном размере кольца и разумных разностях температур значение  $r \geq 1$ . Когда начинается конвективный ток в кольце, величина напряженности приложенного к образцу электрического поля должна быть весьма малой:  $E \sim 10^3 \div 10^4$  В/м. Увеличение напряженности поля и размеров кольца приводит к быстрому увеличению  $r$  (рис. 2, 3).

Устойчивость конвективного тока в круговом кольце ( $b = 1$ ) сохраняется до значений  $r < r^*$  [11, 12], где

$$r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 1)}{\sigma - b - 1} = \frac{\sigma(\sigma + 4)}{\sigma - 2}.$$

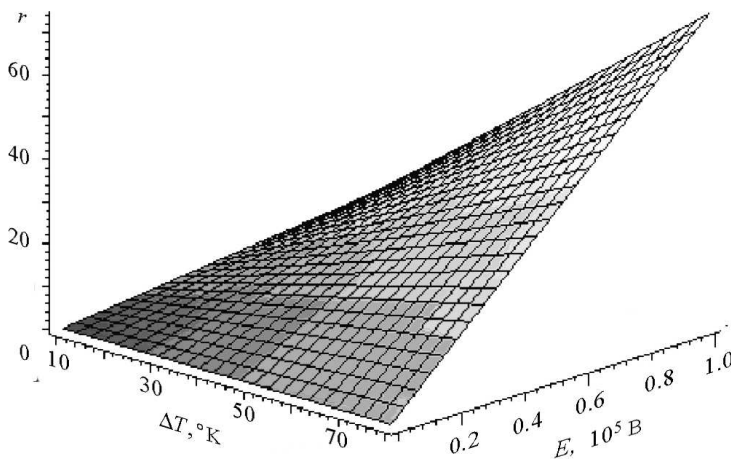


Рис. 2. Зависимость параметра  $r$  от напряженности приложенного электрического поля и разности температур на электродах при фиксированном радиусе кольца ( $R = 10^{-3}$  м)

Так как  $\sigma \gg 1$ , то  $r^* \approx \sigma \gg 1$ . Тогда

$$\frac{r}{r^*} \approx \frac{r}{\sigma} = \frac{\alpha m^* n_0 w R^2 \tau_p^2 T_1}{2J} = \frac{\alpha \mu^2 m^* E \Delta T}{8 \pi e R} \sim 10^{-12} E \Delta T$$

(при  $R \sim 10^{-3}$  м). Отсюда следует, что вплоть до предпробойных значений напряженности электрического поля в полупроводнике ( $E \leq 10^8$  В/м) и разностей температур  $\Delta T \leq 10^2$  К конвективный ток свободных электронов в кольце будет протекать в условиях, далеких от неустойчивого режима.

Естественно, как и в классическом примере (когда  $\sigma = \text{Pr} = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r^* \approx 24.74$  [12]), при некотором  $r_2 \leq r^*$  на фазовом портрете системы должен возникнуть странный аттрактор (в классическом примере  $r_2 \approx 24.06$  [12]). Так как численное решение уравнений Лоренца (9) на основе трехмодовой аппроксимации для  $r \gg 1$  неправомерно, то соответствующее условие для  $r_2$  в рамках данной модели не может быть найдено. Строить же более сложную теорию для отыскания  $r_2$  не имеет смысла, так как требуемый режим, как показали наши оценки, в экспериментальных условиях все равно недостижим.

Ситуация здесь такая же, как если бы мы в гидродинамической модели Лоренца залили в тороид не воду ( $\text{Pr} = 6.77$ ), а глицерин ( $\text{Pr} = 1.09 \cdot 10^4$ ). Большая вязкость глицерина при почти одинаковой с водой температуропроводности приводит к быстрому уменьшению амплитуды и частоты колебательных мод возмущений и, в конечном счете, увеличивает устойчивость конвективного потока.

Большие по сравнению с баллистической длиной размеры полупроводниковой кольцевой ячейки приводят к многократному увеличению эффективной вязкости электронного газа из-за столкновений электронов с кристаллической решеткой. В результате в кольце возникает устойчивый в широком диапазоне рабочих парамет-

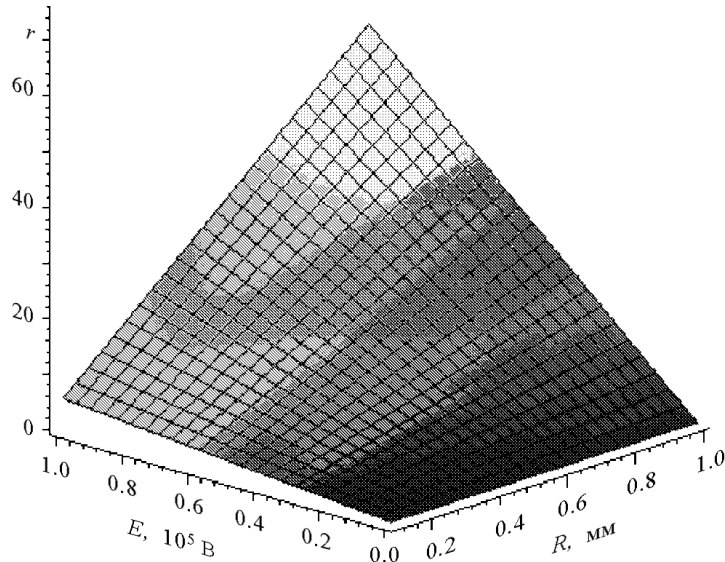


Рис. 3. Зависимость параметра  $r$  от напряженности приложенного электрического поля и радиуса полупроводникового кольца при фиксированной разности температур на электродах ( $\Delta T = 60$  К)

ров конвективный ток одного из двух возможных направлений. При выключении и повторном включении электрического поля направление тока может изменяться хаотически. Можно ожидать, что степень этой хаотичности будет зависеть от частоты переключений поля.

Съем информации о колебаниях тока в кольцевой полупроводниковой ячейке может быть осуществлен при помощи датчика магнитного поля. Практическая значимость данной работы, в случае экспериментального подтверждения модельных представлений, может быть связана с использованием таких колебаний в качестве несущего сигнала для передачи конфиденциальной информации в современных системах связи с использованием динамического хаоса [15–16].

*Работа поддержана ФЦП «Интеграция» (код проекта Б0107).*

### **Библиографический список**

1. Браже Р.А., Куделин О.Н. Условия наблюдения термоэлектродинамической конвекции в реальных полупроводниках // Электронная техника. Сб. науч. тр. Ульяновск, 2003. С. 3.
2. Браже Р.А., Куделин О.Н. Математическая модель термоэлектродинамической конвекции в полупроводниках с учетом столкновительных процессов // Мат. моделирование. 2005. Т. 17, № 2. С. 109.
3. Браже Р.А., Куделин О.Н. Аттрактор Лоренца в нелинейном режиме термоэлектродинамической конвекции в плоском слое полупроводника // Вестник УлГТУ. Сер. «Естественные науки». 2004. Вып. 2. С. 27.
4. Lorenz E.H. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20, № 2. P. 130.
5. Welander P. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 29. P. 17.
6. Моторова Э.А. Неймарк Ю.Н. Об устойчивости нелинейной распределенной модели естественной циркуляции // Автомеханика и телемеханика. 1974. № 3. С. 28.
7. Creveling H.F., De Paz J.F., Baladi J.Y., Schoenhals R.I. Stability characteristics of a single-phase free convective loop // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 67. Part 1. P. 65.
8. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Физическая кинетика. М.: Наука, 1972.
9. Anile A.M., Romano V., Russo G. External hydrodynamical model of carrier transport in semiconductor // SIAM J. of Appl. Math. 1997. April, 12.
10. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. 1997. С. 417-418.
11. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир. 1980.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001.
13. Емцев В.В. Примеси и точечные дефекты в полупроводниках. М.: Наука. 1986.
14. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. М.: Наука. 1989.



15. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 10. С. 4.
16. *Дмитриев А.С., Старков С.О.* Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 4.

*Ульяновский государственный  
технический университет*

*Поступила в редакцию 24.12.2004  
После доработки 22.03.2005*

## SEMICONDUCTOR ANALOGUE OF LORENZ TURBULENCE MODEL IN THE CIRCULAR THERMOCONVECTIVE CELL

*R.A. Brazhe, O.N. Kudelin*

A set of the nonlinear equations, approximately describing thermoelectrohydrodynamical convection in circular semiconductor cell, which comes to Lorenz model, is obtained. The dependences of the model parameters of materials and ring size, of affixed electric field and of temperature gradient are investigated.



*Браже Рудольф Александрович* – родился в 1948 году в селе Ковалево Омской области, окончил Саратовский государственный университет в 1971 году и там же аспирантуру по специальности «Радиофизика» в 1974 году. С 1974 работает в Ульяновском государственном техническом университете (с 1993 года – заведующий кафедрой физики). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1975) и доктора физико-математических наук в УлГТУ (2002) в области радиофизики и математического моделирования нелинейных волновых процессов. Автор более 200 научных трудов, в том числе 1 монографии и нескольких учебных пособий. Член корреспондент РАЕН.



*Куделин Олег Николаевич* – родился в 1979 году в городе Ульяновске, в 2001 году окончил Ульяновский государственный университет по специальности «Физика твердого тела». Работает на ФГУП НПО «Марс» инженером-программистом, аспирант кафедры физики УлГТУ, автор 12 научных работ.