



ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС: МОДЕЛЬ И ДЕМОНСТРАЦИЯ ЯВЛЕНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

И.В. Измайлов, А.В. Лячин, Б.Н. Пойзнер, Д.А. Шергин

Обосновано понятие пространственного детерминированного хаоса, предпринята попытка дать ему теоретико-множественное определение. Для математического описания осуществлен переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к дискретным отображениям без использования приближения мгновенного отклика. Развитые теоретические положения применены для получения модели динамики нелинейного фазового набега в нелинейном кольцевом интерферометре на языке дискретных отображений. На примере модели построены дискретные пространственные реализации, фазовые портреты, спектры Фурье, иллюстрирующие особенности пространственного детерминированного хаоса в нелинейном кольцевом интерферометре. Введено понятие эволюционирующих дискретных отображений.

Введение

В рамках изучения явлений нелинейной динамики можно выделить три ветви исследований: временных процессов, в том числе динамического хаоса (если говорить о кольцевых оптических системах, то это, например, [1-6]), пространственно-временных процессов (например, [1, 3, 7-11]) и чисто пространственных (то есть статичных) распределений динамических переменных системы [10], в том числе «пространственного» хаоса. Как известно, задачами, связанными с явлением динамического (временного) хаоса, традиционно занимается радиоэлектроника. Пространственно-временной хаос (турбулентность) проявляется в системах различной природы и рассматривается в рамках соответствующих специализированных отраслей науки.

Явление «пространственного» хаоса характерно для оптических, радиофизических (и, видимо, геофизических [12]) систем. Именно здесь типичными являются случаи, когда поперечный размер нелинейной среды больше длины волны или соизмерим с ней. Тогда аналогами всевозможных процессов, протекающих во времени

в колебательных системах (например, устройствах радиодиапазона), являются пространственные распределения величин каких-то значимых характеристик, скажем, показателя преломления среды, амплитуды, фазы волны. Предложенная аналогия становится более явной, если ввести понятие наблюдателя, который регистрирует эти величины в точках пространства, последовательно перебирая точки по некоторому алгоритму. Системы, в которых возможен пространственный детерминированный хаос (ПДХ), до сих пор мало изучены.

Цель данной работы: 1) показать, что моделью ПДХ может служить дискретное отображение (ДО), получаемое из обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в статическом режиме; 2) в качестве примера получить описание нелинейного кольцевого интерферометра (НКИ) на языке ДО (для случаев двухчастотного оптического поля в приближении больших его потерь и отсутствия дифракции) и продемонстрировать явление пространственного детерминированного хаоса в нелинейном кольцевом интерферометре.

1. Переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к дискретным отображениям

Временные процессы в m -мерной динамической системе описывают с помощью системы m эволюционных уравнений

$$\tau_n \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{q}(t)), \quad (1)$$

где τ_n – время релаксации, $\mathbf{q}(t) \equiv \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)\}$ – вектор динамических переменных. Будем описывать процессы в динамической системе с запаздыванием в многоконтурной обратной связи системой m эволюционных уравнений

$$\vec{\tau}_n \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{q}(t), Q(t, \vec{\tau})), \quad (2)$$

где $\vec{\tau}_n$ – диагональная $(m \times m)$ -матрица характерных времен релаксации; $\vec{\tau}$ – вектор длины s либо матрица размера $m \times s$ времен запаздывания. Тогда $Q(t, \vec{\tau}) \equiv \{q_i(t - \tau_j)\}$ либо $Q(t, \vec{\tau}) \equiv \{q_i(t - \tau_{ij})\}$ – упорядоченное множество из запаздывающих аргументов системы уравнений (2), которое удобно записывать в виде матрицы размера $m \times s$, $i \in [1; m]$, $j \in [1; s]$. Очевидно, что можно принять $Q(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{q}(t)$.

В статическом режиме и при разрешимости уравнения $\mathbf{N}(\mathbf{q}(t), Q(t, \vec{\tau})) = 0$ относительно $\mathbf{q}(t)$ модель (2) сводится к рекуррентному соотношению, от которого в приближении $\tau_i = \tau$, $\forall i \in [1; s]$ можно перейти к модели, описывающей состояние системы в моменты времени $t_n = t_0 + n\tau$:

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{F}(\mathbf{q}_{n-1}). \quad (3)$$

Выражение типа (3) является m -мерным ДО [5]. Но в силу статичности режима $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_{n-1}$ и, следовательно,

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{q}). \quad (4)$$

Можно ли трактовать выражение типа (4) – с позиции упоминавшегося выше наблюдателя – как ДО? Можно, но как ДО с *пространственной* эволюционной переменной, у которого размерность $j \leq m$, причем количество итераций ограничено

и не превышает $m - 1$. А область допустимых значений начальных условий ДО удовлетворяет требованию совместности системы уравнений относительно проекций вектора q , в качестве которой интерпретируется (4).

Поясним это на примере. Пусть все F_i являются функциями скалярного аргумента и для $\forall q$ и $\forall i$ верно $F_i(q) = F(q)$, величина q_1 явно зависит только от q_m , а q_i – от q_{i-1} , $i \neq 1$. Тогда из (4) получим

$$q_i = F(q_{i-1}), \quad i \in [2; m], \quad q_1 = F(q_m). \quad (5)$$

Здесь предполагается, что q_1 есть начальное состояние ДО (но не динамической системы (2)). Очевидно, если не вводить ограничения на число итераций, то всегда имеет место предельный цикл (так как $q_1 = F(q_m)$).

При малых значениях m затруднительно квалифицировать (5) как ДО. Если же m достаточно велико, то из-за требования статичности режима динамической системы (2) на первый план выходит произвольность q_1 . Однако в системах высокой размерности (большие m) в ряде случаев область допустимых значений начальных условий ДО практически квазинепрерывна [13], и эта произвольность q_1 несущественна. А если предположить незамкнутость системы уравнений (4), то ограничения на q_1 нет вовсе. Заметим, что возможно $m = \infty$.

С позиции наблюдателя последовательность величин q_i описывает состояние значимых физических характеристик (например, показателя преломления среды, проводимости, модуля упругости, механического напряжения или деформации, плотности вещества) в некоторой последовательности точек пространства. Значит, ДО (4) – динамическая система с дискретной целочисленной пространственной координатой, играющей ту же роль, что и n в выражении (3). Это ДО задает упоминавшееся выше пространственное распределение динамических переменных системы (которые в статическом режиме неизменны во времени). Оно может быть как периодическим, так и нерегулярным. В последнем случае оно называется нами «пространственный» детерминированный хаос.

Попытаемся сформулировать определение последнего, но предварительно напомним, что, согласно [14], *динамический (детерминированный) хаос* – нерегулярное, аperiodическое изменение состояния (движение) динамической системы, обладающее основными свойствами случайного процесса.

Тогда можно предложить – в качестве рабочей – следующую дефиницию: *пространственный (статический) детерминированный хаос* – статическое состояние динамической системы, такое что последовательность подмножеств P_i множества динамических переменных P , выделяемая наблюдателем по некоторому алгоритму, является нерегулярной, аperiodической, обладающей основными свойствами случайного процесса. Причем подмножества P_i равномощны, не совпадают ($P_i \neq P_j$ при $i \neq j$), покрывают множество динамических переменных P ($P = \cup_i P_i$), и пересечения $P_i \cap P_{i+1}$ равномощны.

Эта последовательность может иметь конечную длину (конечная последовательность). Указанный алгоритм (обуславливающий вид, мощность и конкретное «наполнение» подмножеств, порядок их следования) эвристически обусловлен природой динамической системы и структурой взаимной зависимости значений динамических переменных (например, вида (5)). Если алгоритм выбрать затруднительно,

то в зависимости от мощности P можно предложить два варианта алгоритма «по умолчанию».

1) Если множество динамических переменных не имеет мощности континуума, то можно считать, что подмножества состоят из одного элемента, а порядок их следования задается любым регулярным алгоритмом перебора динамических переменных.

2) Если же множество динамических переменных имеет мощность континуума, то подмножества тоже имеют мощность континуума. Тогда можно считать, что они представляют собой достаточно маленькие односвязные области равного объема (n -мерного), а порядок их следования задается любым регулярным алгоритмом перебора. Здесь динамическая переменная (например, вида $U(x, y)$) распределенной системы интерпретируется как множество динамических переменных мощности континуума.

Заметим, что переход от (2) к (3) возможен не только в случае статического режима динамической системы. Он осуществляется и в известном – благодаря работам К. Икеды – приближении мгновенного отклика нелинейной среды, справедливом при $|\vec{\tau}_n| \ll |\vec{\tau}|$. Но в отличие от случая статического режима перейти к выражению (4) нельзя.

Заметим также, что выражение (2) при больших m совмещает в себе свойства традиционных дифференциальных уравнений (с непрерывной эволюционной переменной) и ДО с дискретной пространственной координатой. Подобные математические конструкции правомерно называть *эволюционирующими дискретными отображениями* [10]. Выражение же (3) при больших (в пределе - бесконечных) m представляет собой гибрид традиционного ДО с дискретным временем и ДО с дискретной пространственной координатой, а количество эволюционных переменных в нем составляет 1 либо 2.

2. Модель динамики нелинейного фазового набегга поля в кольцевом интерферометре

Развитые выше положения удобно иллюстрировать на примере НКИ, который исследовался теоретически и экспериментально в работах [1-3, 6, 15].

На рис. 1, а представлена схема кольцевого интерферометра, в котором находится тонкий слой нелинейной среды (НС), показатель преломления которой зависит от амплитуды воздействующего на него электрического поля света (например, имеет место эффект Керра).

Основным отличием рассматриваемого НКИ от модели К. Икеды [1] является то, что в цепь обратной связи интерферометра введен линейный элемент G , обеспечивающий поточечное преобразование поля (сдвиг, наклон, поворот, растяжение, сжатие). Таким образом, траектория луча, начинающаяся в точке с координатами (x', y') после обхода резонатора попадет в точку $(x, y) = G(x', y')$.

Пусть на вход НКИ поступает сумма двух квазимонохроматических полей с амплитудами $a(\mathbf{r}, t)$, $b(\mathbf{r}, t)$ и с частотами $\omega \pm \Omega$, круговой поляризации различных

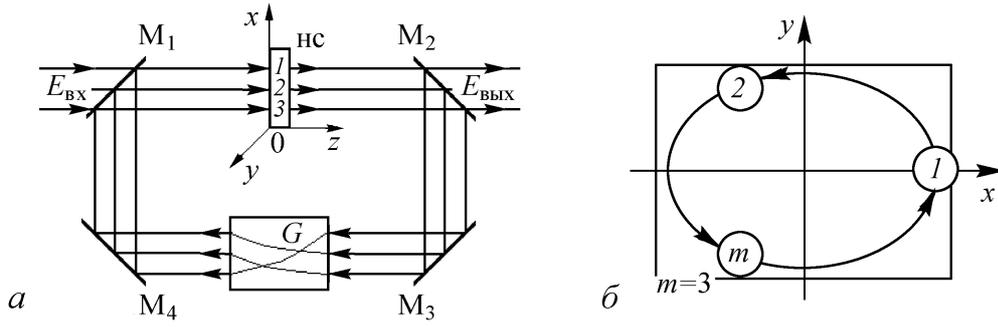


Рис. 1. Схема нелинейного кольцевого интерферометра и ход лучей в НКИ при повороте светового поля на $\Delta = 120^\circ$ в плоскости xOy : *a* – траектории лучей 1, 2, 3, замыкающиеся после трех обходов; *б* – проекция траекторий лучей 1, 2, 3 на плоскость xOy

(при $\omega > \Omega$) либо одинаковых (при $\omega < \Omega$) направлений вращения (рис. 2):

$$E_x(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \cos[(\omega + \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)] + b(\mathbf{r}, t) \cos[(\omega - \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)],$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \sin[(\omega + \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)] - b(\mathbf{r}, t) \sin[(\omega - \Omega)t + \phi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)].$$

Здесь ω (либо Ω при $\omega < \Omega$) имеет смысл средней частоты, а 2Ω (2ω при $\omega < \Omega$) – частотный интервал между составляющими поля. Чтобы отразить специфику спектра рассматриваемого оптического поля, мы оперируем параметром бихроматичности $q \equiv \Omega/\omega$ [16].

Тогда в приближении медленно меняющихся амплитуд, фаз, модуляции положения плоскости поляризации, времени запаздывания t_e поля, медленной релаксации нелинейной части показателя преломления, а также в приближении больших потерь (либо в приближении одного прохода) и в пренебрежении дифракцией поля можно получить описание динамики нелинейного фазового набегу U в НСИ НКИ [16]:

$$\tau_n(\mathbf{r}) \frac{dU(\mathbf{r}, t)}{dt} = D_e(\mathbf{r}) \Delta U(\mathbf{r}, t) - U(\mathbf{r}, t) + f(\mathbf{r}, t),$$

$$f(\mathbf{r}, t) = Kab(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_n) + pKab(\mathbf{r}', t - \tau, \mathbf{r}) + [\gamma(\mathbf{r}', t)/\sigma] \times$$

$$\times \{Ka(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t - \tau) \cos[(1 + q)\omega\tau + \phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}', t - \tau) + \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}', t - \tau)] +$$

$$+ Kb(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t - \tau) \cos[(1 - q)\omega\tau + \phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}', t - \tau) - \psi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}', t - \tau)]\}.$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $U(\mathbf{r}, t)$ – нелинейный фазовый набег в НСИ на частоте ω ; $\tau \equiv \tau(\mathbf{r}', t) = t_e(\mathbf{r}', t) + U(\mathbf{r}', t - t_e(\mathbf{r}', t))/\omega$; $t_e(\mathbf{r}, t) \equiv n_0(\mathbf{r})l/c + t_0(\mathbf{r}, t) -$

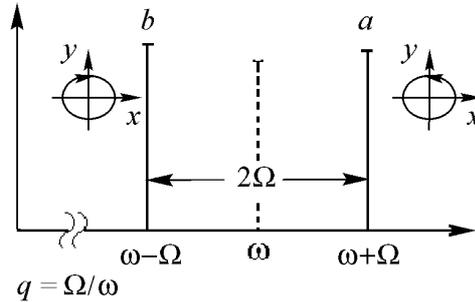


Рис. 2. Спектр бихроматического излучения

эквивалентное время запаздывания (величина времени распространения светового поля, обусловленного наличием линейной части $n_0(\mathbf{r})$ показателя преломления НС и наличием времени запаздывания $t_0(\mathbf{r}, t)$ в НКИ (l – длина НС, c – скорость света)); $\gamma(\mathbf{r}', t)$ – удвоенный амплитудный коэффициент потерь излучения за один проход через НКИ; σ – коэффициент растяжения пучка в элементе G ; $D_e(\mathbf{r})$ – коэффициент диффузии молекул НС, нормированный на время релаксации $\tau_n(\mathbf{r})$; $p = 0$ для приближения больших потерь, но $p = [\gamma(\mathbf{r}', t)/\sigma/2]^2$ для приближения одного прохода; «смешанный» (Kab) и «парциальные» (Ka , Kb) параметры нелинейности

$$Kab(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_n) \equiv (1 - R)n_2(\mathbf{r}_n)lk[a^2(\mathbf{r}, t) + b^2(\mathbf{r}, t)],$$

$$Ka(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t - \tau) \equiv (1 - R)n_2(\mathbf{r})lk a(\mathbf{r}, t)a(\mathbf{r}', t - \tau),$$

$$Kb(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t - \tau) \equiv (1 - R)n_2(\mathbf{r})lk b(\mathbf{r}, t)b(\mathbf{r}', t - \tau);$$

$n_2(\mathbf{r})$ – параметр нелинейной рефракции НС.

В пренебрежении диффузией молекул НС из этой модели можно получить описание динамики нелинейного фазового набега U в НС НКИ в «точечном приближении»

$$\begin{aligned} \tau_{ni} \frac{dU_i(t)}{dt} &= -U_i(t) + f_i, \\ f_i &\equiv f_i(t) = Kab_{i,i}(t) + pKab_{i-1,1}(t - \tau) + [\gamma_{i-1}(t)/\sigma] \times \\ &\times \{Ka_{i,i-1}(t, t - \tau) \cos[(1 + q)\omega\tau + \phi_i(t) - \phi_{i-1}(t - \tau) + \psi_i(t) - \psi_{i-1}(t - \tau)] + \\ &+ Kb_{i,i-1}(t, t - \tau) \cos[(1 - q)\omega\tau + \phi_i(t) - \phi_{i-1}(t - \tau) - \psi_i(t) + \psi_{i-1}(t - \tau)]\}. \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tau \equiv \tau_{i-1}(t) = t_{ei-1}(t) + U_{i-1}(t - t_{ei-1}(t))/\omega$; $p = 0$ в приближении больших потерь, но $p = [\gamma_{i-1}(t)/\sigma/2]^2$ в приближении одного прохода;

$$Kab_{i,j}(t) \equiv (1 - R)n_{2j} lk [a_i^2(t) + b_i^2(t)],$$

$$Ka_{i,i-1}(t, t - \tau) \equiv (1 - R)n_{2i} lk a_i(t)a_{i-1}(t - \tau),$$

$$Kb_{i,i-1}(t, t - \tau) \equiv (1 - R)n_{2i} lk b_i(t)b_{i-1}(t - \tau).$$

Термин «точечное приближение» означает, что все множество точек поперечного сечения светового пучка в НКИ – в зависимости от вида крупномасштабного преобразования поля элементом G в контуре обратной связи – разбивается на бесконечное число независимых друг от друга подмножеств. Для случая поворота поля на 120° в поперечной плоскости пучка, изображенного на рис. 1, б, подмножества состоят из трех точек – вершин равностороннего треугольника. Независимость подмножеств понимается в том смысле, что процессы (нелинейные и интерференционные) в *различных* подмножествах протекают независимо. То есть между полем и участками нелинейной среды (а также между самими полями) физическое взаимодействие отсутствует, если они соответствуют *различным* подмножествам.

Напротив, такие взаимодействия существуют, если поля и участки среды соответствуют точкам *одного и того же* подмножества. Эти подмножества представляют

собой цепочки точек, «связываемые» последовательным смещением светового луча в поперечной плоскости пучка (благодаря действию элемента G).

Иными словами, луч света, проходя через НС и контур обратной связи НКИ в точке i (например, $i = 1, 2, 3$ на рис. 1, б), приобретает фазовый набег U_i и испытывает временную задержку t_{ei} . Из-за наличия элемента G луч попадает в точку $i + 1$. Здесь, «складываясь» с одним из входных лучей интерферометра, он воздействует на темп изменения величины нелинейного фазового набега U_{i+1} . Отметим, что в силу замыкания лучей на рис. 1 значение индекса $i + 1 = 4$ следует положить равным $i + 1 = 1$. Именно так набег U_i в точке i влияет на набег U_{i+1} в точке $i + 1$. Данный тип точек, согласно терминологии [15], называют *транспозиционными* точками, а m – порядком транспозиции. Соответственно будем говорить о цепочках транспозиционных точек (ЦТТ). Иллюстрация к понятию ЦТТ дана на рис. 1, б. При такой организации обратной связи траектория луча замыкается после m обходов НКИ. Согласно принятому способу нумерации транспозиционных точек, в случае замкнутой ЦТТ под записью $i + 1$ подразумевается операция $(i \bmod m) + 1$, где символ $i \bmod m$ означает остаток от деления i на m . Физически это означает, что луч из m -й точки попадает в первую.

Понимаемое указанным образом точечное приближение позволяет из общих соотношений в [16] получить систему ОДУ (6), описывающую динамику нелинейного фазового набега для одной ЦТТ. Нетрудно заметить, что модель (6) является частным случаем (2).

Подобно выполненному переходу от (2) к (4) преобразуем модель (6) – в предположении, что $dU/dt = 0$ (статический режим), а величины $a_i, b_i, \Phi_i, \Psi_i, \gamma_i, t_{ei}$ постоянны во времени, – к виду

$$U_i = Kab_{i,j} + pKab_{i-1,i} + [\gamma_{i-1}/\sigma] \times \\ \times \{Ka_{i,i-1} \cdot \cos[(1+q)(\Phi_{i-1} + U_{i-1}) + \Phi_i - \Phi_{i-1} + \Psi_i - \Psi_{i-1}] + \\ + Kb_{i,i-1} \cdot \cos[(1-q)(\Phi_{i-1} + U_{i-1}) + \Phi_i - \Phi_{i-1} - \Psi_i + \Psi_{i-1}]\}, \quad (7)$$

где $\Phi_i \equiv \omega t_{ei}$, $Kab_{i,j} \equiv (1-R)n_{2j}lk[a_i^2 + b_i^2]$, $Ka_{i,i-1} \equiv (1-R)n_{2i}lka_i a_{i-1}$, $Kb_{i,i-1} \equiv (1-R)n_{2i}lkb_i b_{i-1}$. По своей математической форме выражение (7), как известно [5], является одномерным ДО.

В случае однородности (в пределах одной ЦТТ) оптических свойств НС НКИ ($n_2 = n_{2j}$) и амплитуд входного поля ($a = a_i, b = b_i$) верно соотношение: $Kab = Ka + Kb$. Удобно ввести суммарный параметр нелинейности K и долю Q_a интенсивности компоненты с частотой $(1+q)\omega$ по правилу $K \equiv Kab = (Ka + Kb)$, $Q_a \equiv Ka/K$. Тогда $Ka = K \cdot Q_a$, $Kb = K(1 - Q_a)$. В случае однородности остальных оптических свойств НКИ ($\Phi = \Phi_i, \gamma = \gamma_i$) и входного поля ($\Psi_i = 0, \Phi_i = 0$) нетрудно получить ДО

$$U_{i+1} = K\{1 + p + \gamma\{Q_a \cos[(1+q)(\Phi + U_i)] + \\ + (1 - Q_a) \cos[(1-q)(\Phi + U_i)]\}/\sigma\}. \quad (8)$$

Напомним, что в приближении больших потерь $p = 0$, в приближении одного прохода $p = (\gamma/\sigma/2)^2$; в случае замкнутых ЦТТ $i \in [1, m]$, и запись $i + 1$ обозначает операцию $(i \bmod m) + 1$, то есть $U_1 \equiv U_{m+1}$; в случае незамкнутых ЦТТ $U_1 = K$, а

$i \in [1, +\infty)$, если ЦТТ бесконечна. Очевидно, что ДО (8) является частным случаем ДО (5).

В случае монохроматического излучения на входе НКИ ($q = 0$) и при $p = 0$, $\sigma = 1$ из (8) получим следующее ДО [17, 18]:

$$U_{i+1} = K[1 + \gamma \cos(U_i + \Phi)]. \quad (9)$$

3. Демонстрация явления пространственного детерминированного хаоса в нелинейном кольцевом интерферометре

Проиллюстрируем соображения, выдвинутые в разделе 1, на примере модели динамики нелинейного фазового набег в НКИ (8). Поскольку ДО (8) – частный случай ДО (5), то для него справедливы утверждения, сделанные для (5) при малом числе m динамических переменных системы (2); большом m , $m = \infty$, (не)замкнутости системы (5), интерпретируемой как система уравнений.

Тип ЦТТ, зависящий от пространственного преобразования светового поля, осуществляемого линейным элементом G (см. рис. 1, а, рис. 3), задает структуру взаимной зависимости значений динамических переменных, упоминаемую в дефиниции ПДХ, и определяет, какой именно из перечисленных случаев реализуется. Для простейших преобразований поля в G подмножества $P_i = \{U_i\}$.

Пусть ЦТТ *незамкнута*. Тогда, согласно смыслу модели (6) на языке ОДУ, неизбежно имеет место установление (релаксационно-колебательное либо асимптотическое) статического режима, *устойчивого* во времени. А моделирование на языке

Простейшие типы преобразования пучка элементом G			
Поворот $\Delta = 2\pi M/m$	Сдвиг δ	Сжатие $1/\sigma$	Растяжение σ
Тип цепочки транспозиционных точек (ЦТТ)			
Замкнутая конечная	Незамкнутая конечная	Незамкнутая бесконечная	
		$m = \infty$	$m = -\infty$
Формирующиеся идеализированные структуры			

Рис. 3. Связь между простейшими типами преобразования лазерного пучка в контуре обратной связи НКИ (задающим конфигурацию цепочки транспозиционных точек) и видом оптической структуры $U(\mathbf{r}, t)$, формирующейся в поперечном сечении пучка

ДО (8) того же самого физического процесса в НКИ с ростом дискретной эволюционной переменной позволяет ожидать появление *неустойчивого* (и потому хаотического) поведения, то есть ПДХ.

Действительно, соответствующая ДО (9) зависимость U_i от i при увеличении параметра нелинейности K в некоторых интервалах его значений демонстрирует весьма сложное поведение (рис. 4). При этом в поперечной плоскости лазерного пучка в НКИ формируется сложное распределение нелинейного фазового набега $U(\mathbf{r})$ (см. рис. 3).

Нетрудно убедиться, что ПДХ имеет место, выполнив комплекс расчетов и построений: дискретного пространственного распределения (эквивалент временной реализации системы), фазового портрета, спектра Фурье, ляпуновских характеристических показателей (ЛХП), фрактальной размерности. Они приведены на рис. 5 для модели (8) в случае незамкнутой ЦТТ. Из рис. 5 очевидно, что аттракторы в ДО могут иметь положительные ЛХП ($\Lambda = 0.34457$) и дробную фрактальную размерность ($D_0 = 0.97994$), а также характерный для детерминированного хаоса фазовый портрет и спектр Фурье.

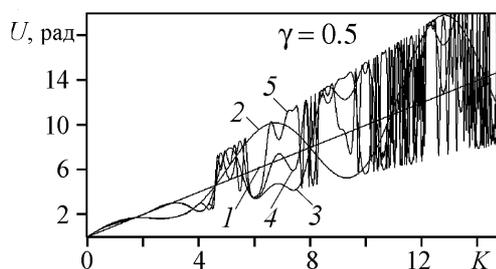


Рис. 4. Зависимость от параметра нелинейности K значений нелинейного фазового набега U в пяти первых точках незамкнутой ЦТТ для статического режима НКИ при сдвиге элементом G оптического поля (вдоль оси Ox в плоскости xOy). Цифры обозначают номер точки в ЦТТ

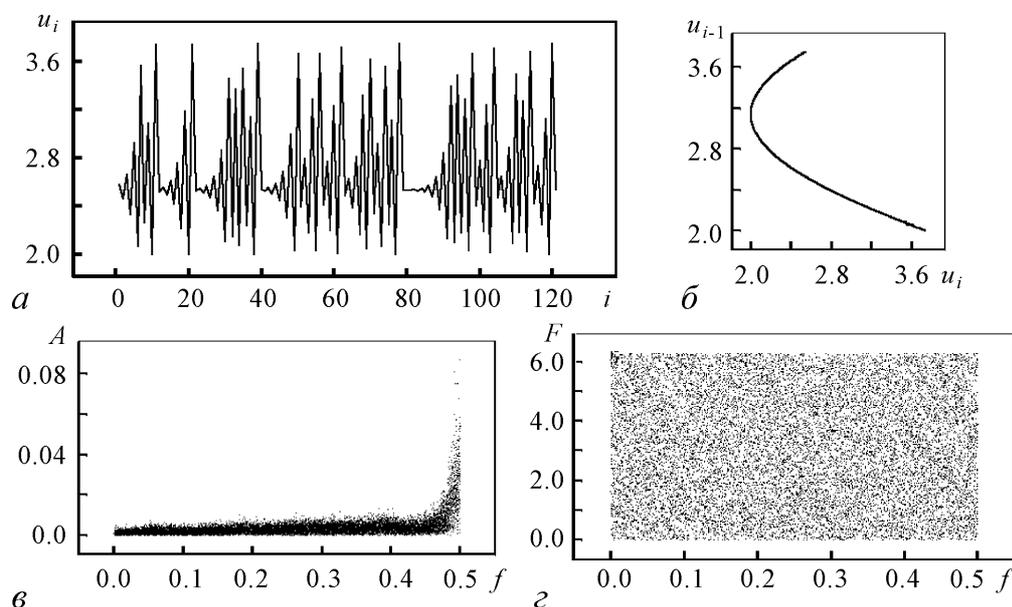


Рис. 5. Характеристики ПДХ, описываемого ДО (8) при незамкнутой ЦТТ: дискретная пространственная реализация (a), фазовый портрет (b), спектр Фурье для амплитуды (c) и фазы (d) для параметров модели: $K = 5$, $\gamma = 0.6$, $\Phi = 0$, $q = 0$, $Q_a = 0$

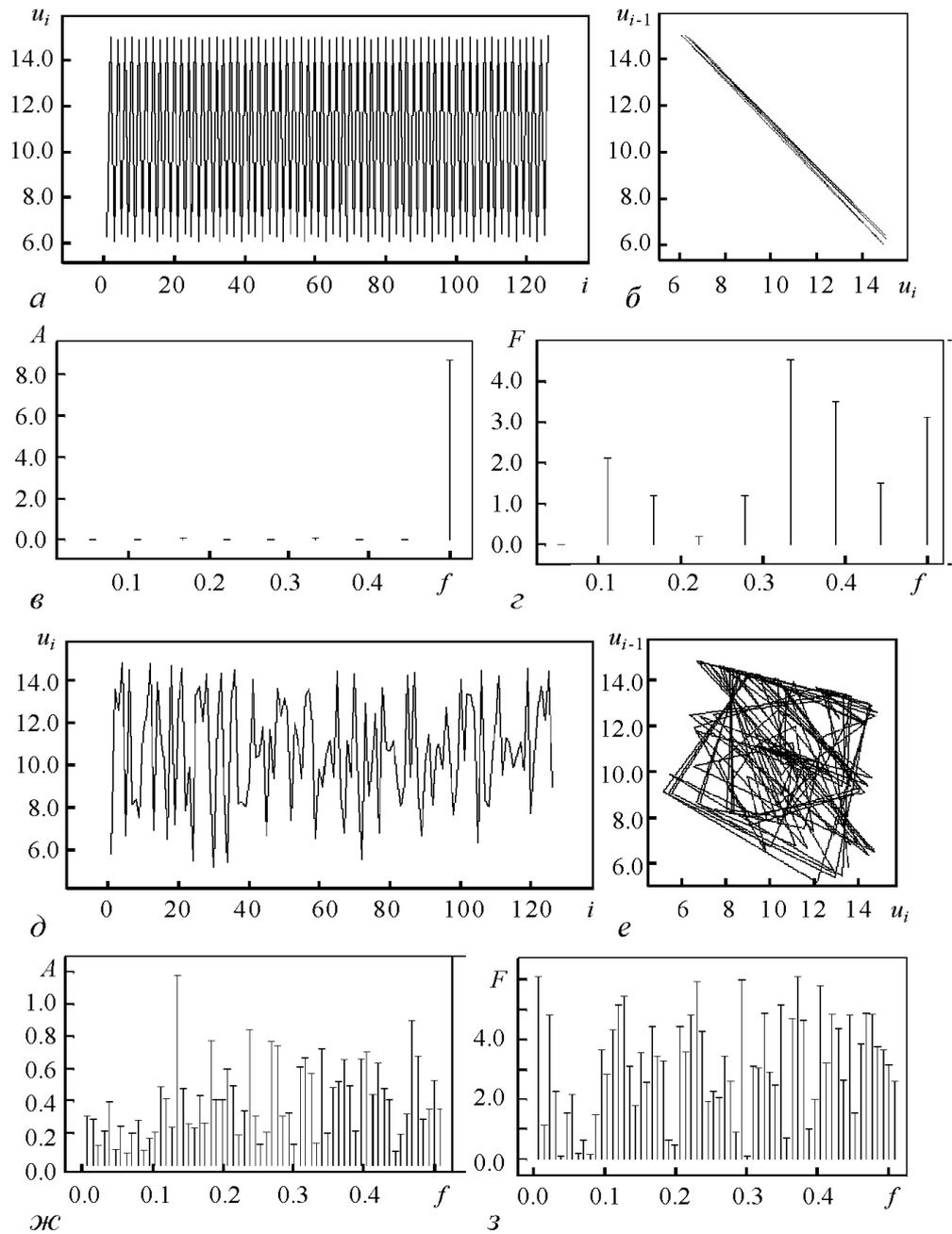


Рис. 6. Характеристики ПДХ, описываемого ДО (8) при замкнутой ЦТТ из 126 точек, для устойчивого состояния (*a-г*, $K = 10.03193$, $\gamma = 0.5$, $\Phi = 0$, $q = 0$, $Q_a = 0$) и неустойчивого (*д-з*, $K = 9.9$, $\gamma = 0.5$, $\Phi = 0$, $q = 0$, $Q_a = 0$): дискретные пространственные реализации (*a*, *д*), фазовые портреты (*б*, *е*), спектры Фурье для амплитуды (*в*, *ж*) и фазы (*г*, *з*)

В случае же *замкнутой* ЦТТ оперирование моделью (6) на языке ОДУ позволяет выявить не только устойчивые, но и неустойчивые статические состояния, а также их бифуркации. При этом, одному и тому же набору параметров могут соответствовать несколько (не)устойчивых состояний. Очевидно, что если считать ЦТТ ДО бесконечной, то в математически идеальной ситуации при помещении начального условия ДО (8) на одну из ветвей бифуркационной диаграммы ДО даст периодическую последовательность значений U_i с периодом, не превышающим числа m точек в ЦТТ. Эта ситуация обсуждалась выше, когда затрагивался вопрос о малости величины m .

С физической точки зрения ясно, что структуры, соответствующие неустойчивым статическим состояниям, формироваться в НКИ не смогут – в отличие от устойчивых. Но переносится ли характеристика устойчивости статического состояния как целого (состояния системы (6)) на устойчивость соответствующего режима в отображении (8)? И обладает ли режим в отображении сложностью (оцениваемой хотя бы на уровне визуального восприятия)? С целью выяснения был предпринят расчет для замкнутой ЦТТ, состоящей из $m = 126$ точек. На рис. 6 – для устойчивого ($\Lambda = -0.00807$, $D_0 = 0.17549$) и неустойчивого ($\Lambda = 0.89427$, $D_0 = 0.96147$) состояний – представлены: дискретные пространственные реализации, фазовые портреты, спектры Фурье для амплитуды и фазы. Результаты расчета позволяют ответить утвердительно на заданные вопросы.

Заключение

В работе обосновано понятие пространственного детерминированного хаоса. Для этого введено понятие наблюдателя, который воспринимает статическое состояние динамической системы, последовательно перебирая взглядом точки пространства по некоторому алгоритму. Предложено теоретико-множественное определение пространственного детерминированного хаоса. Затронута проблема континуальности множества динамических переменных, которая имеет место, например в распределенных системах. Понятие «пространственный» интерпретировано как синоним термина «статический».

Для математического описания пространственного детерминированного хаоса осуществлен переход от системы m обыкновенных дифференциальных уравнений к дискретным отображениям без использования приближения мгновенного отклика, но в предположении о статическом режиме в системе. Таким способом получают дискретные отображения с пространственной эволюционной переменной, у которых количество итераций может быть ограничено числом $m - 1$. Дискутируются случаи малых, больших, бесконечных m , а также случаи (не)замкнутости системы алгебраических уравнений, задающей дискретные отображения. Показана возможность интерпретации систем обыкновенных дифференциальных уравнений как *эволюционирующих дискретных отображений*.

Получена модель динамики нелинейного фазового набега в нелинейном кольцевом интерферометре на языке дискретных отображений. На примере последнего иллюстрированы особенности ПДХ. Понятие цепочек транспозиционных точек раскрыто в двух аспектах: 1) зависимости структуры цепочки от пространственного преобразования светового поля, производимого элементом G в нелинейном кольце-

вом интерферометре; 2) влияния структуры цепочки на (не)замкнутость системы алгебраических уравнений, задающей ДО, и (бес)конечность их числа итераций $m - 1$, а также на вид оптической структуры $U(r, t)$, формирующейся в поперечном сечении пучка. Для случаев (не)замкнутых цепочек выполнено моделирование на языке дискретных отображений и построены: дискретные пространственные распределения, фазовые портреты, спектры Фурье, рассчитаны ляпуновские характеристические показатели, значения фрактальной размерности. Показано, что режим в отображении и для замкнутой цепочки транспозиционных точек обладает сложностью.

В качестве продолжения изложенного здесь исследования планируются расчет и построение карт ляпуновских характеристических показателей и фрактальной размерности.

Авторы признательны рецензенту за критику, стимулировавшую переоценку результатов, сокращение текста в раздела 1 и уточнение формулировок.

Работа поддержана грантом Федерального Агентства по образованию Минобрнауки РФ (Программа 2005 г.: «Развитие научного потенциала высшей школы». Подпрограмма 3. Раздел 3.3), регистрационный № 60321.

Библиографический список

1. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30, № 2. P. 257-260.
2. Ахманов С.А., Воронцов М.А. Нестабильности и структуры в когерентных нелинейно-оптических системах, охваченных двумерной обратной связью // Нелинейные волны: динамика и эволюция: сб. ст. М.: Наука, 1989. С. 228-237.
3. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997. 336 с.
4. Измайлов И.В., Калайда В.Т., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Бифуркации в точечной модели кольцевого интерферометра с запаздыванием и поворотом поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 5. С. 47-59.
5. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по физическим специальностям. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. Балякин А.А. Исследование хаотической динамики кольцевого нелинейного резонатора при двухчастотном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 4-5. С. 3-15.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
8. Мельников Л.А., Конюхов А.И., Рябинина М.В. Динамика поперечной поляризованной структуры поля в лазерах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 6. С. 33-53.
9. Weiss C.O. et al. Generation of optical vortices in laser field // Appl. Phys. B 1999. Vol. 68. P. 151-168.
10. Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н. Варианты реализации нелинейно-оптического устройства скрытой передачи информации // Оптика атмосферы и океана. 2001. Т. 14, № 11. С. 1074-1086.

11. *Melnikov L.A., Konukhov A.I., Veshneva I.V. et al.* Nonlinear dynamics of spatial and temporal patterns in lasers and atom optics: Kerr-lens mode-locked laser, Zeeman laser and Bose-Einstein atomic condensate // *Izv. VUZ. Applied nonlinear Dynamics*. 2002. Vol. 10, № 3. P. 40-62.
12. *Рыскин М.И., Иванов А.В.* Нелинейная динамика в науках о Земле // *Иzv. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 6. С. 138-148.
13. *Измайлов И.В., Поизнер Б.Н., Денисов П.Е.* Равносильность: от обоснования понятия до анализа бифуркационного поведения. Томск: ТГУ, 2003. 46 с. Вестник Том. гос. ун-та. Бюллетень оперативной научной информации. 2003. № 15. Октябрь 2003.
14. *Заславский Г.М., Кириченко Н.А.* Хаос динамический // *Физическая энциклопедия* / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия. Т. 5, 1998. С. 397-402.
15. *Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Поизнер Б.Н.* Механизмы формирования простейших оптических структур в нелинейном интерферометре Физо // *Иzv. вузов. Физика*. 1995. № 6. С. 77-81.
16. *Измайлов И.В., Магазинников А.Л., Поизнер Б.Н.* Моделирование процессов в кольцевом интерферометре с нелинейностью, запаздыванием и диффузией при некогерентном излучении // *Иzv. вузов. Физика*. 2000. № 2. С. 29-35.
17. *Шергин Д.А., Измайлов И.В.* Дискретные отображения как средство описания детерминированного пространственного хаоса // *Сб. тез. 9-й Всерос. науч. конф. студентов-физиков и молодых ученых: В 2-х т.* 2003. Екатеринбург-Красноярск: АСФ России, 2003. Т. 2. С. 90-93.
18. *Шергин Д.А., Измайлов И.В., Поизнер Б.Н.* Дискретные отображения как язык описания пространственного детерминированного хаоса // *Современные проблемы физики и высокие технологии: Матер. Междунар. конф. (29 сентября - 4 октября 2003 г., г. Томск)*. Томск: Изд-во НТЛ, 2003. С. 186-189.

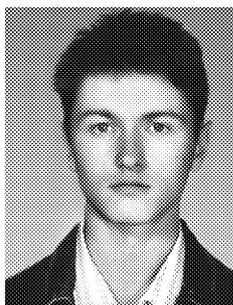
*Томский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 30.08.2004
После доработки 29.03.2005*

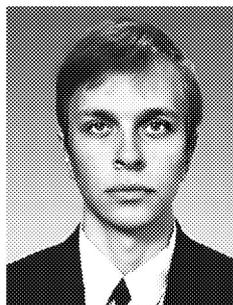
SPATIAL DETERMINISTIC CHAOS: THE MODEL AND DEMONSTRATION OF PHENOMENON IN COMPUTING EXPERIMENT

I.V. Izmailov, A.V. Lyachin, B.N. Poizner, D.A. Shergin

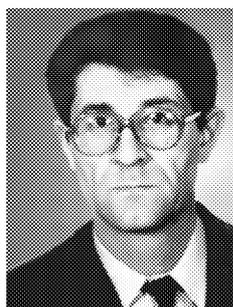
The concept of spatial deterministic chaos is justified. An attempt to give its set-theoretic definition is undertaken. Transition from the ordinary differential equations to discrete maps without use of an approximation of the instantaneous response is realized for mathematical description of spatial deterministic chaos. The developed theoretical theses are applied for deriving a dynamics model in terms of discrete maps of nonlinear phase shift in a ring interferometer. In case of the model discrete realizations, phase portraits Fourier's spectrums illustrating peculiarities of spatial deterministic chaos in the ring interferometer are constructed. A concept of discrete maps undergoing an evolution is introduced.



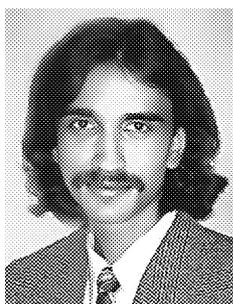
Измайлов Игорь Валерьевич – родился в 1976 году в Алма-Ате. Поступил на радиофизический факультет Томского государственного университета (1993). Аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники (1999). Область научных интересов: моделирование процессов в нелинейных системах различной природы, применение нелинейной динамики для обработки и скрытой передачи информации.



Лячин Александр Владимирович – родился в Томске (1979). Окончил с отличием радиофизический факультет Томского госуниверситета (2002). Аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники радиофизического факультета. Область научных интересов - моделирование и изучение процессов в нелинейных динамических системах, динамический хаос и его приложение в системах обработки и передачи информации. Автор более 40 публикаций. E-mail: 765-alex.rff@elefot.tsu.ru



Пойзнер Борис Николаевич – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов. E-mail: Pznr@elefot.tsu.ru



Шергин Денис Александрович – родился в 1982 году, в настоящее время заканчивает обучение в магистратуре радиофизического факультета Томского государственного университета. Область научных интересов - применение методов нелинейной динамики в оптике и криптографии; современные телекоммуникационные системы. Имеет 5 публикаций.