



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний

В.С. Анищенко, С.М. Николаев

Приводится электронная схема автономного генератора двухчастотных квазипериодических колебаний и результаты экспериментальных исследований эффекта синхронизации квазипериодических колебаний внешним двухчастотным сигналом.

Введение

Квазипериодическими колебаниями называют колебания вида

$$x(t) = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)],$$

где $\varphi_i(t) = \omega_i t$, $i = 1, 2, \dots, n$. Функция $x(t)$ имеет период 2π по каждому из аргументов $\varphi_i(t)$:

$$x(\varphi_i + 2\pi) = x(\varphi_i).$$

Все частоты ω_i являются независимыми в том смысле, что между ними не существует рациональных соотношений. В фазовом пространстве n -мерному квазипериодическому колебанию отвечает n -мерный эргодический тор.

Исследуем двухчастотные квазипериодические автоколебания, то есть колебания с двумя независимыми частотами, возникающие в автономной нелинейной диссипативной динамической системе. Математически, модель такой системы была введена нами в [1]. В работе [2] представлены результаты численного исследования динамики генератора двухчастотных колебаний описанного в [1]. Установлено, что введенная в рассмотрение модель генератора [2] реализует режим устойчивых двухчастотных колебаний, последовательность бифуркаций удвоения двумерного тора и переход к хаосу [2]. С использованием модели генератора [1] установлено новое явление – эффект синхронизации квазипериодических колебаний в виде захвата числа вращения на двумерном торе [2].

Целью настоящей работы является экспериментальная проверка всех численных результатов, полученных в работах [1, 2]. Введем в рассмотрение электронную схему генератора квазипериодических колебаний, покажем ее соответствие математической модели, предложенной в [1], и исследуем экспериментально явление синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний. В итоге демонстрируется полное соответствие экспериментальных и численных результатов.

1. Автономный генератор квазипериодических колебаний

Рассмотрим в качестве исходной известную модель генератора Анищенко–Астахова [3], схема которого представлена на рис. 1, *a*. Схема включает классический генератор ван дер Поля, в котором введена дополнительная нелинейная инерционная обратная связь. Уравнения генератора представляют собой трехмерную динамическую систему с тремя параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Первые два уравнения системы (1) описывают генератор ван дер Поля. В этом легко убедиться, положив $\dot{z} = 0$ и используя $\Phi(x) = x^2$. Как было показано, система (1) реализует переход к хаосу в соответствии с теоремой Шильникова [4] при условии, что нелинейная функция $\Phi(x)$ является асимметричной относительно переменной x и задается в виде [3]

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \tag{2}$$

или, например,

$$\Phi(x) = \exp x - 1.$$

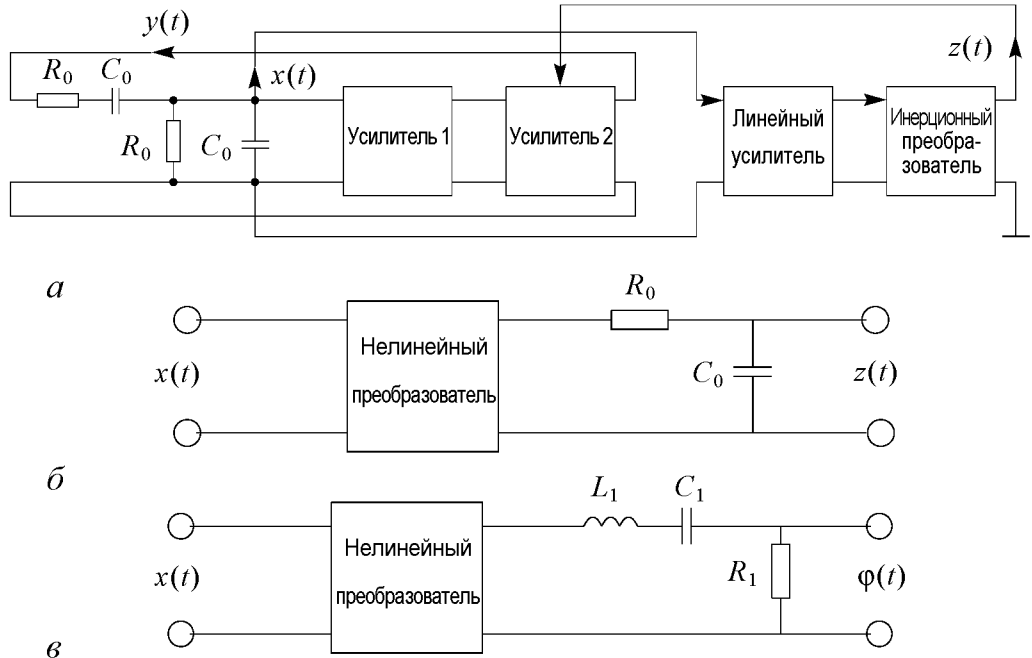


Рис. 1. Схемы: *a* – генератора Анищенко–Астахова, *б* – инерционного каскада дополнительной обратной связи генератора Анищенко–Астахова, *в* – инерционного каскада дополнительной обратной связи генератора квазипериодических колебаний

Условия асимметрии (2) обеспечивают существование в системе (1) особого решения в виде петли сепаратрисы седло-фокуса и, как следствие, реализацию режима спирального хаоса. С физической точки зрения, это достигается за счет самосогласованного воздействия на основной усилитель со стороны обратной связи, заданной третьим уравнением в системе (1). При малых амплитудах сигнала $x(t)$ это воздействие незначительно, и система (1) генерирует предельный цикл. С ростом параметра возбуждения m интенсивность колебаний $x(t)$ растет, сигнал обратной связи $z(t)$ нарастает тоже и более активно начинает управлять коэффициентом усиления основного усилителя. Система реализует последовательность бифуркаций удвоения периода циклов и переход к хаосу.

С целью обеспечения незатухающих двухчастотных колебаний в систему (1) необходимо ввести элемент, характеризуемый собственной частотой, отличающейся от резонансной частоты контура генератора. Одним из возможных способов является использование колебательного контура в цепи дополнительной обратной связи. Необходимо сделать так, чтобы сигнал обратной связи $z(t)$ включал колебания независимой частоты, которые будут модулировать коэффициент усиления и обеспечивать квазипериодические автоколебания. Эта идея получила практическое воплощение [1].

2. Экспериментальная реализация генератора

Рассмотрим схемы, представленные на рис. 1, б, в. На рис. 1, б показана схема инерционного каскада дополнительной обратной связи генератора Анищенко–Астахова. Каскад представляет собой нелинейный преобразователь и RC-фильтр, описываемые одномерным дифференциальным уравнением (третье уравнение в системе (1)). На рис. 1, в представлена схема нового инерционного каскада, который вместо RC-фильтра включает диссипативный колебательный контур некоторой резонансной частоты. Уравнения, описывающие схему рис. 1, в, имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz,\end{aligned}\tag{3}$$

где γ – параметр затухания; g – параметр, представляющий нормированную резонансную частоту нового фильтра. Нетрудно убедиться, что уравнения (3) описывают диссипативный колебательный контур в режиме вынужденных колебаний

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + gz = \gamma\Phi(x).\tag{4}$$

Экспериментальная реализация генератора квазипериодических колебаний, соответствующая схеме генератора Анищенко–Астахова (см. рис. 1, а), с учетом предложенных изменений (см. рис. 1, в) представляет собой RC-генератор с дополнительной обратной связью, состоящей из квадратичного детектора и LCR-контура. При этом сигнал с дополнительной обратной связи модулирует коэффициент усиления усилителя RC-генератора.

На рис. 2. представлена электронная схема генератора квазипериодических колебаний. RC-генератор включает RC-цепь, состоящую из элементов R_1, C_1, R_2, C_2 ,

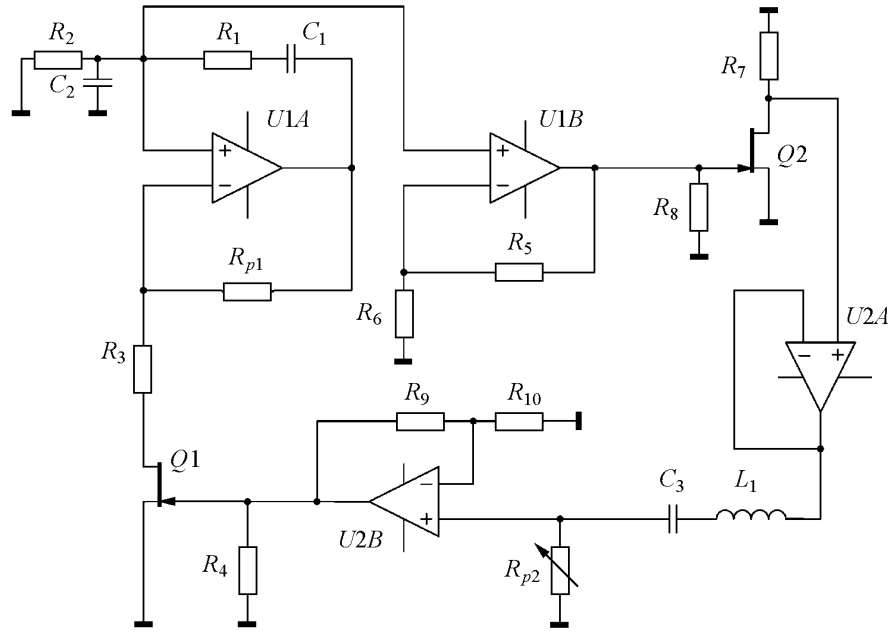


Рис. 2. Электронная схема генератора квазипериодических колебаний

и операционный усилитель U1A, коэффициент усиления которого определяется подстроечным резистором R_{p1} и сопротивлением R_Q полевого транзистора Q_1 . Дополнительная обратная связь состоит из усилителей U1B и U2B, однополупериодного квадратичного детектора, в качестве которого используется полевой транзистор Q_2 , и LCR-контур, включающего элементы L_1 , C_3 и R_{p2} .

Уравнение RC-генератора имеет вид

$$\ddot{U}_0 + \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_{p1}}{R_3 + R_Q} \right) \dot{U}_0 - \frac{1}{R^2 C^2} U_0 = 0, \quad (5)$$

где $R = R_1 = R_2$ и $C = C_1 = C_2$ – элементы RC-цепи, U_0 – потенциал на неинвертирующем входе операционного усилителя U1A.

Уравнение дополнительной обратной связи

$$\ddot{U}_1 + \frac{R_{p2}}{L_1} \dot{U}_1 + \frac{1}{L_1 C_3} U_1 = \frac{R_{p2}}{L_1} f_1(U_0), \quad (6)$$

где U_1 – потенциал на выходе LCR-контра, оказывающий влияние на сопротивление R_Q полевого транзистора Q_1 (см. рис. 2) (аппроксимируется экспоненциальной зависимостью); $f_1(U_0)$ – функция, описывающая работу однополупериодного квадратичного детектора.

Переходя от уравнений (5) и (6) к уравнениям в первых производных в безразмерном времени $t = \tau/(RC)$, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(\frac{m}{f_2(z)} - 2 \right) x + y - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma f_1(x) - gz. \end{aligned} \quad (7)$$

Были введены следующие переобозначения: $m = R_{p1}$, $f_2(z) = R_1 + R_Q$, $\gamma = RCR_{p2}/L_1$, $g = R^2C^2/(L_1C_3)$, параметр d характеризует диссипативную нелинейность усилителя RC-генератора и ограничивает амплитуду колебаний в контуре. Как и в случае генератора Анищенко–Астахова (1), в генераторе квазипериодических колебаний (7) с ростом параметра возбуждения m растет амплитуда колебаний и, соответственно, сигнал $f_2(z)$ на выходе цепи дополнительной обратной связи, который начинает оказывать все большее влияние на параметр возбуждения m . В результате система претерпевает бифуркацию мягкого рождения тора, который характеризуется двумя основными частотами, одна из которых определяется RC-цепью генератора, а вторая – LCR-контуром в дополнительной обратной связи. В ходе экспериментов было установлено, что помимо бифуркаций рождения тора и перехода к хаосу через его разрушение, предложенная установка (см. рис. 2.) демонстрирует также последовательность бифуркаций удвоения квазипериодических колебаний [1].

3. Синхронизация квазипериодических колебаний

Проведенные ранее численные эксперименты по внешней и взаимной синхронизации двух генераторов квазипериодических колебаний [2] показали, что область захвата частот модуляции генераторов лежит внутри клюва синхронизации несущих частот. При сближении значений управляющих параметров генераторов в колебаниях системы сначала возникают четыре независимые частоты, затем после захвата несущих частот остаются три независимые частоты, а затем захватываются частоты модуляции и, соответственно, числа вращения. Расчеты полного спектра характеристических показателей Ляпунова показали, что при отсутствии синхронизации система демонстрирует колебания с четырьмя независимыми частотами, затем при частичной синхронизации наблюдаются три независимые частоты, при полной синхронизации – две независимые частоты [2].

Однако остается неясным, от чего зависит взаимное расположение областей захвата частот генератора. Для ответа на этот вопрос будем рассматривать наиболее общий случай, при котором частоты внешнего воздействия и собственные частоты колебаний генератора не равны, а также не совпадают и их числа вращения. Будем менять несущую частоту воздействия, соответственно, будет меняться число вращения. По спектрам мощности колебаний будем исследовать области захвата частот генератора, при этом оставляя без изменений управляющие параметра системы.

Уравнения генератора квазипериодических колебаний под воздействием внешнего возмущения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{m}{f_1(z)}x + y - dx^3 + kF(t), \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma f_2(x) - gz, \end{aligned} \tag{8}$$

где $F(t) = A_0(1 + K_{\text{mod}} \sin \Omega t) \sin \omega t$ – квазипериодический сигнал от внешнего источника, k – параметр связи. На рис. 3 представлена схема экспериментальной

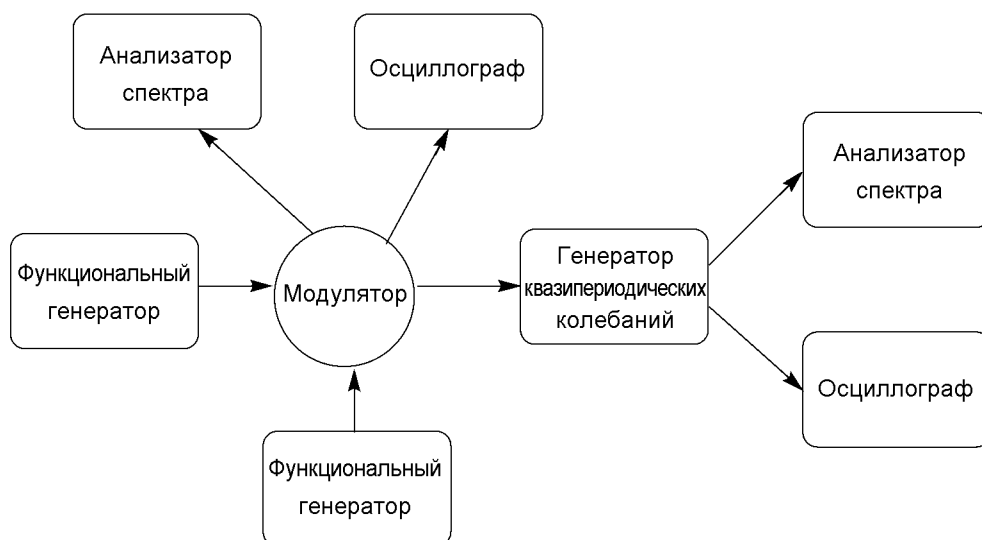


Рис. 3. Общая схема экспериментальной установки

установки, на которой исследовалось явление синхронизации квазипериодических колебаний. Сигнал от внешнего источника представляет собой квазипериодические двухчастотные колебания. Несущая и огибающая сигнала являются синусоидальными, что соответствует классическому примеру двухчастотных колебаний.

Подадим на генератор внешний амплитудно-модулированный сигнал с частотой огибающей $f_{1e} = 3.06$ кГц и коэффициентом модуляции $K_{mod} = 0.5$. При этом значения параметров генератора соответствуют коэффициенту модуляции примерно 0.3, собственная частота несущей $f_{0g} = 10.69$ кГц, собственная частота модуляции $f_{1g} = 2.82$ кГц. Будем менять частоту несущей внешнего воздействия f_{0e} в диапазоне $10 \div 11$ кГц.

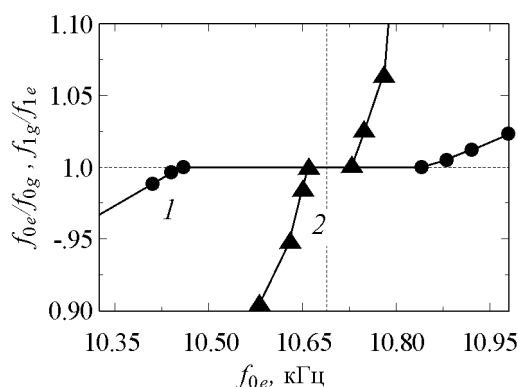


Рис. 4. Зависимость отношения частоты модуляции 2 и частоты несущей 1 генератора от частоты несущей сигнала внешнего возмущения

На рис. 4 показана зависимость отношения частот модуляции, несущей генератора и внешнего воздействия от несущей частоты внешнего сигнала. Как и в случае синхронизации двух генераторов, в данном случае при изменении частоты несущей внешнего сигнала сначала захватывается частота несущей генератора, а затем – его частота модуляции. На рис. 5, а–в показаны соответствующие спектры мощности колебаний генератора для трех режимов. Как говорилось выше: при несинхронном режиме наблюдаются четыре независимые частоты; при частично синхронном режиме наблюдаются три независимые частоты (несущая и две частоты модуляции); в случае полной синхронизации – две независимые частоты (несущая и модуляции).

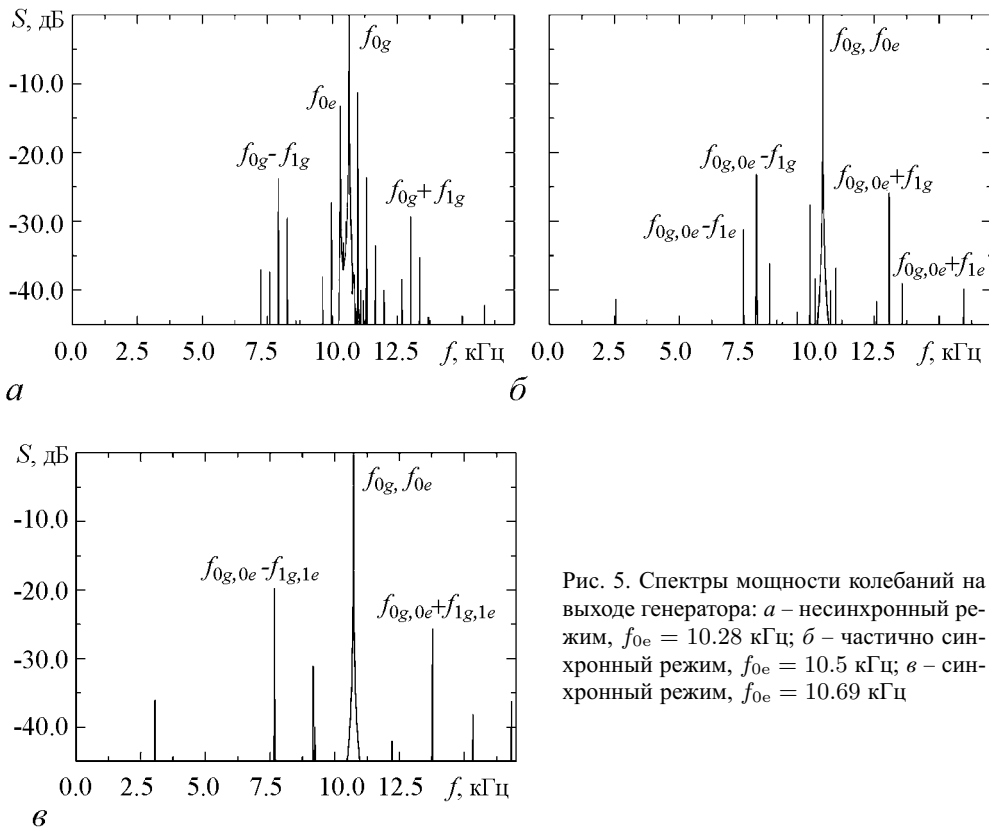


Рис. 5. Спектры мощности колебаний на выходе генератора: *a* – несинхронный режим, $f_{0e} = 10.28$ кГц; *б* – частично синхронный режим, $f_{0e} = 10.5$ кГц; *в* – синхронный режим, $f_{0e} = 10.69$ кГц

На рис. 6, *a*, *б* представлены области синхронизации соответствующих частот генератора и внешнего воздействия в зависимости от параметра связи, снятые при различных значениях глубины модуляции внешнего воздействия. Как видно из рисунка, взаимное расположение областей захвата несущей частоты и частоты модуляции зависит не только от параметра связи, но и от глубины модуляции. На рис. 7

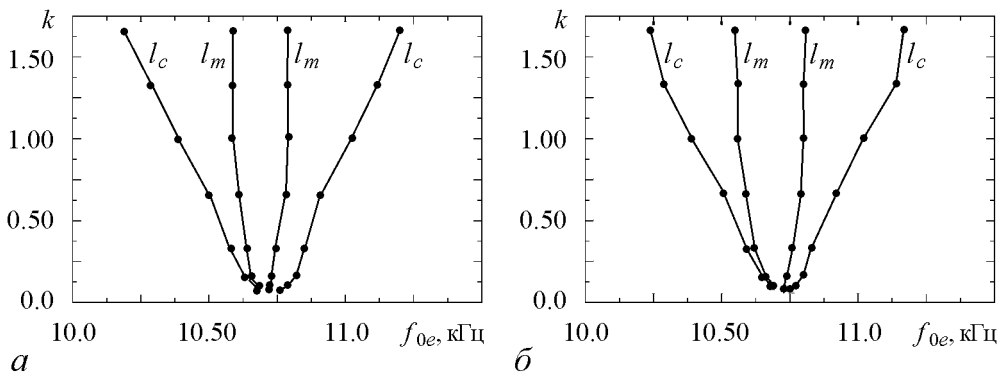


Рис. 6. Области синхронизации соответствующих сигналов генератора и воздействия при различных значениях глубины модуляции сигнала воздействия: *a* – $K_{mod} \approx 0.7$, *б* – $K_{mod} \approx 0.9$. Линиями l_c ограничена область синхронизации частот несущей, линиями l_m – частот модуляции

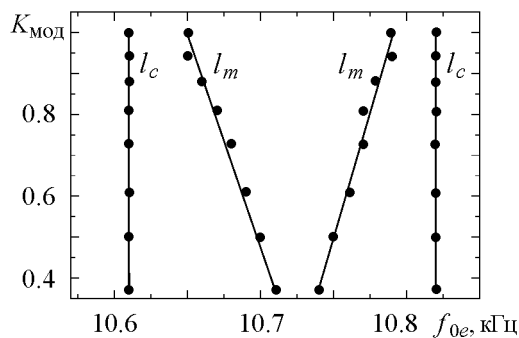


Рис. 7. Зависимость расположения областей синхронизации от коэффициента модуляции $K_{\text{мод}}$ при фиксированном параметре связи k ; линиями l_c ограничена область синхронизации частот несущей, линиями l_m – частот модуляции

представлены области захвата несущих частот и частот модуляции в зависимости от глубины модуляции. Увеличение глубины модуляции не влияет на ширину области захвата несущей частоты, тогда как ширина области захвата частоты модуляции растет.

Следует также отметить тот факт, что в ходе эксперимента не удалось выявить режимы, при которых ширина области захвата частоты модуляции была бы шире области захвата несущей частоты. С дальнейшим ростом коэффициента модуляции области захвата несущей частоты и частоты модуляции совпадают.

Заключение

В результате проведенных исследований предложена и экспериментально апробирована радиотехническая схема генератора двухчастотных квазипериодических колебаний, соответствующая динамической системе, введенной в [1]. Экспериментально исследовано явление внешней синхронизации квазипериодических колебаний модулированным сигналом с различной глубиной модуляции. Подтверждено явление захвата числа вращения на двумерном торе, впервые установленное численно в [2].

В данной работе изучалось явление синхронизации двухчастотных автоколебаний с иррациональным соотношением частот. Синхронизация резонансных структур, возникающих на торе в случае рационального соотношения его частот, является предметом дальнейших исследований.

Работа финансировалась из средств грантов по программам «Развитие потенциала высшей школы» и BRHE.

Библиографический список

1. Анищенко В.С., Николаев С.М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.
2. Anishchenko V., Nikolaev S. and Kurths J. Winding number locking on two-dimensional torus. Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 056202.

3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
4. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7(9). P. 1953.

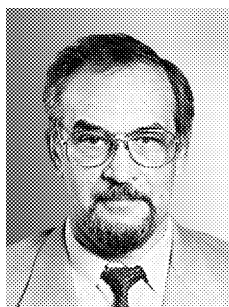
*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 15.10.2007

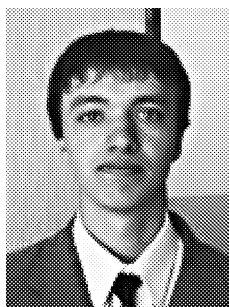
EXPERIMENTAL RESEARCH OF SYNCHRONIZATION OF TWO-FREQUENCY QUASIPERIODIC MOTIONS

V.S. Anishchenko, S.M. Nikolaev

We present the electronic scheme of autonomous generator of two-frequency quasi-periodic motions and the experimental research results of effect of quasi-periodic motions synchronization under the external two-frequency force.



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru



Николаев Сергей Михайлович – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, хаотические и квазипериодические колебания. E-mail: sergeyn@chaos.ssu.runnet.ru