



## КОНКУРЕНЦИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЕЙ

*С.В. Слипущенко, А.В. Тур, В.В. Яновский*

В работе изучены перемежаемые режимы в двухпараметрическом семействе одномерных отображений при наличии нейтрально неустойчивой неподвижной точки на границе фазового пространства. Построена фазовая диаграмма в пространстве параметров, определяющая возможные сценарии перехода к хаосу с изменением параметров. Обнаружен необычный режим конкуренции перемежаемостей, изучены функции распределения длительности ламинарных фаз, показатель Ляпунова и топологическая энтропия этого семейства отображений.

### Введение

Перемежаемость является одним из часто встречающихся типов перехода к хаосу в одномерных системах. Такие режимы характеризуются наличием участков сильно выраженного хаотического поведения, чередующихся с участками регулярного поведения динамической системы. Эти регулярные участки обычно называют ламинарными фазами. Статистические свойства ламинарных фаз являются одними из важнейших характеристик перемежающихся режимов, реализующихся в динамической системе. Они позволяют определить степень хаотичности поведения системы при определенном значении управляющего параметра  $r$ . Величина управляющего параметра, при которой неподвижная точка отображения  $x_0$  теряет устойчивость, называется критическим значением внешнего параметра  $r_c$ . Если потеря устойчивости происходит путем касательной бифуркации, то в фазовом пространстве на месте неподвижной точки  $x_0$  образуется «коридор», в котором поведение системы является практически регулярным. Во всем остальном фазовом пространстве поведение системы хаотично. Эту часть фазового пространства называют областью реинжекции, потому что динамика системы в этой области рано или поздно приводит к возврату в «коридор» и началу новой ламинарной фазы. С ростом параметра «надкритичности»  $\varepsilon = r - r_c$  время прохождения коридора уменьшается, поэтому хаотичность системы возрастает. Величина  $\varepsilon$  обычно связана со средней длиной ламинарных фаз степенным законом  $\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-\alpha}$ . Это является одним из проявлений скейлинговой инвариантности в перемежаемых режимах.

Впервые свойства перемежающихся режимов были исследованы Помо и Манневилем в работе [1]. Они же предложили классификацию перемежаемых режимов, выделив три основных типа перемежаемости. Главное различие между ними заключается в том, каким образом мультипликатор в точке  $x_0$  пересекает единичную

окружность. Существует три возможных варианта этого процесса [2]. Если мультипликатор  $\mu$  пересекает единичную окружность в точке  $\mu = 1$ , то в системе наблюдается перемежаемость I рода. В случае, если на единичной окружности  $\mu = -1$ , то наблюдается перемежаемость III рода. Для двумерных систем имеется возможность одновременного перехода мультипликатора и его комплексного значения через окружность  $|\mu| = 1$ , в этом случае наблюдается перемежаемость II рода. Применяя метод нормальных форм [3] к отображению, которое может быть разложено в ряд Тейлора в точке  $x_0$ , можно показать, что такая классификация перемежающихся режимов, возникающих в гладких отображениях, является полной. В последующих работах [4–6] было указано на существование дополнительных типов перемежаемости в отображениях, характеризующихся отсутствием непрерывности или дифференцируемости в точке  $x_0$ . Таким образом, наложение дополнительных условий на процесс приведения отображения к линейной нормальной форме может привести к появлению резонансных слагаемых нового вида. Это будет означать возможность возникновения в динамической системе перемежаемости нового рода. Одним из таких дополнительных условий может являться требование расположения бифуркационной точки  $x_0$  на границе фазового пространства. Целью статьи является описание свойств и характеристик нового типа перемежаемости, возникающего в этом случае.

## 1. Двупараметрическое семейство отображений

Рассмотрим широкий класс непрерывных отображений конечного интервала действительной оси (например,  $[0, 4]$ ) с неподвижной нейтрально неустойчивой точкой на границе фазового пространства ( $x = 0$ ). Такое отображение в окрестности неподвижной точки имеет асимптотику  $x_{n+1} = x_n + x_n^\alpha$ , где  $\alpha > 1$ . С точки зрения существования перемежаемых режимов, это свойство является антагонистическим. Действительно, обычно принято связывать появление перемежаемых режимов с прохождением обратной касательной бифуркации в некоторой точке внутри фазового пространства и образованием узкого «коридора» [2]. Такой коридор и формирует ламинарные фазы. Таким образом, исходное требование нарушает сразу два важных свойства. Во-первых, отсутствует коридор и неподвижная точка сохраняется (обратная касательная бифуркация не происходит). Во-вторых, она расположена на границе фазового пространства. Запрет на возможность касательной бифуркации на границе связан с дополнительным ограничением на отображение, следующим из физических соображений. Например, для всех моделей эволюции популяций насекомых [7] это ограничение отражает невозможность размножения насекомых при их полном отсутствии. Очевидно, что это свойство не может быть нарушено для всех этих моделей. Поэтому случай общего положения для них отличается от общего положения других, более общих систем. Это означает изменение классификации режимов перемежаемости в этих случаях. Такую классификацию можно построить, используя метод нормальных форм [3]. Вид разложения отображения в окрестности  $x = 0$  влияет на характеристики ламинарных фаз. Ниже покажем, что при определенных условиях в таких системах возникают перемежаемые режимы, обладающие специфическими особенностями.

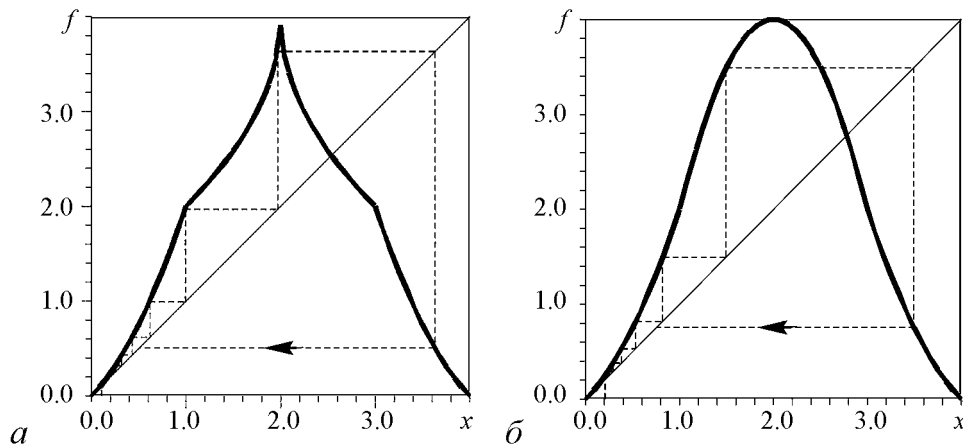


Рис. 1. Диаграмма демонстрирует закон эволюции  $f(x)$  при  $\alpha = 2, \beta = 0.5$  (а) и при  $\alpha = 2, \beta=2$  (б). Характер касания кривой к диагонали определяется величиной  $\alpha$ , а поведение в максимуме – величиной  $\beta$ . Показаны несколько шагов движения, начиная с некоторого начального условия

Для демонстрации этих особенностей перемежаемых режимов используем двухпараметрическое семейство непрерывных отображений, удовлетворяющее приведенному выше условию,

$$f(x) = \begin{cases} x + x^\alpha & 0 \leq x < 1, \\ 4 - 2|x - 2|^\beta & 1 \leq x \leq 3, \\ 4 - x + (4 - x)^\alpha & 3 < x \leq 4. \end{cases} \quad (1)$$

Фазовое пространство таких отображений – отрезок действительной оси  $[0, 4]$ . Параметры  $\alpha > 1$  и  $\beta$  положительны. Вид отображения для различных значений параметров приведен на рис. 1. Характерной особенностью этих отображений является наличие двух неподвижных точек. Одна из них  $x = 0$  лежит непосредственно на границе фазового пространства. При любых значениях параметров ( $\alpha > 1$  и  $\beta > 0$ ) эта неподвижная точка является нейтрально неустойчивой, и её мультипликатор равен единице

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = 1 + 0.$$

Вторая неподвижная точка находится в области  $2 < x < 3$  и ее положение определяется решением трансцендентного уравнения

$$4 - 2(x^* - 2)^\beta - x^* = 0.$$

Легко проверить, что при  $0 < \beta < \beta^*$  неподвижная точка  $x^*$  ( $2 < x^* < 3$ ) устойчива, а при  $\beta > \beta^*$  – теряет устойчивость и при значении параметра  $\beta = \beta^* \approx 0.26$  ее мультипликатор пересекает единичную окружность в точке  $\mu = -1$ . При этом в гладких отображениях обычно происходит переход к хаосу по сценарию перемежаемости III рода [2].

## 2. Инвариантная функция распределения

Обсудим теперь характерные черты инвариантной функции распределения отображения (1). Численное моделирование позволяет установить ее вид при различных значениях параметров. В качестве примера на рис. 2 приведена инвариантная функция распределения при определенных значениях параметров. Легко заметить, что в точке максимума отображения (1) инвариантная функция распределения претерпевает скачок, по крайней мере при выбранных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ . Справа и слева от разрыва функция распределения локально постоянна. Такой характер ее поведения и позволяет вычислить функцию распределения ламинарных фаз.

Величина скачка связана с общими свойствами отображения, но определяющую роль играет «негладкость» отображения в точках  $x = 1$  и  $x = 3$ . Действительно, используя уравнение Фробениуса–Перрона, определяющее инвариантную функцию распределения  $F(x)$

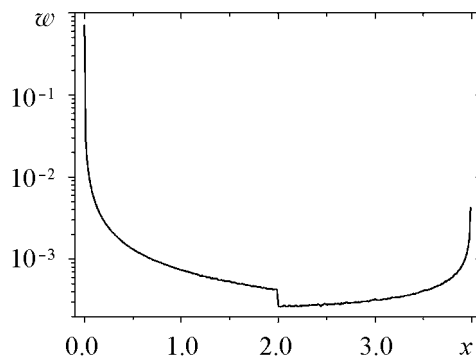


Рис. 2. Инвариантная функция распределения отображения (1) при значениях параметров  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 2$ , полученная численно

$$F(x) = \int_0^4 F(y) \delta(x - f(y)) dy, \quad (2)$$

легко получить прямой подстановкой значения инвариантной функции справа и слева от разрыва в формальном виде

$$F(2+0) = \frac{1}{4\beta} (F(1) + F(3)),$$

$$F(2-0) = \frac{1}{2(1+\alpha)} (F(1) + F(3)).$$

Таким образом, величина скачка  $\Delta$  инвариантной функции распределения в точке  $x = 2$  равна

$$\Delta \equiv F(2-0) - F(2+0) = \frac{(F(1) + F(3))}{2} \cdot \frac{(2\beta - 1 - \alpha)}{2\beta(1 + \alpha)}$$

и зависит от значений инвариантной функции распределения в точках  $x = 1$ ,  $x = 3$  и значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ . Учитывая положительную определенность функции распределения, легко заметить, что скачок исчезает только при следующем выборе параметров:

$$2\beta - 1 - \alpha = 0.$$

Сравнивая значения производных отображения (1) в окрестности точек  $x = 1$ ,  $x = 3$ , можно заметить, что условие исчезновения разрыва эквивалентно условию непрерывности производной в этих точках ( $f'(1-0) = f'(1+0)$  и  $f'(3-0) = f'(3+0)$ ).

Другими словами, причина возникновения разрыва инвариантной функции распределения в точке  $x = 2$  – в негладкости отображения (1) в точках  $x = 1$ ,  $x = 3$ . Используя уравнение Фробениуса–Перрона, можно также оценить характер расходимости инвариантной функции распределения в окрестностях границ фазового пространства. Рассмотрим уравнение (2) в области  $(4 - x) \ll 1$ . В этой области оно принимает вид

$$F(x) = \int_1^3 F(y) \delta(x - 4 + 2|y - 2|^\beta) dy.$$

Выполняя интегрирование по  $y$  и используя приближенное значение корней выражения, стоящего в  $\delta$ -функции, получим

$$F(x) \approx \frac{F(2 + 0) + F(2 - 0)}{2^{1/\beta} \beta} \frac{1}{(4 - x)^{\frac{\beta-1}{\beta}}}.$$

Учитывая конечность значений функции распределения на скачке, легко оценить степень расходимости вблизи правой границы

$$F(x) \sim \frac{1}{(4 - x)^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \text{ при } x \approx 4. \quad (3)$$

Аналогично оценивается степень расходимости в окрестности левой границы интервала  $x \ll 1$ .

$$F(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1} x^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \sim \frac{1}{x^\delta} \text{ при } x \ll 1.$$

Здесь  $\delta = \alpha - 1/\beta$ .

Необходимо также отметить, что при определенных значениях параметров поведение инвариантной функции распределения вблизи границ изменяется с расходящегося на сходящееся. Так, например, при  $\beta < 1$  исчезает расходимость на правой границе. А при  $\alpha < 1/\beta$  инвариантная функция сходится и на левой границе.

Интересно отметить, что степень расходимости инвариантной функции распределения на концах интервала разная. Расходимость в области ламинарных фаз выше, что физически выглядит естественным. Разумеется для некоторых значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых реализуется марковское разбиение [8] интервала, функция распределения может быть вычислена и точно.

Степенное поведение инвариантной функции распределения в областях  $x \ll 1$  и  $(4 - x) \ll 1$  хорошо подтверждается результатами численного моделирования. Полученные данные позволяют установить численно зависимость показателя степени  $\delta$  от параметров  $\alpha$  и  $\beta$  и сравнить их с ранее полученными теоретическими зависимостями (рис. 3). Показатель асимптотики функции распределения в области  $(4 - x) \ll 1$  также хорошо согласуется с численными данными в этой области.

Таким образом, инвариантная функция распределения двупараметрического семейства (1) обладает степенными расходимостями на границах фазового пространства и разрывом при  $x = 2$  (при  $2\beta - 1 - \alpha \neq 0$ ). Также для нее типична асимметрия, несмотря на симметричность самого семейства отображений.

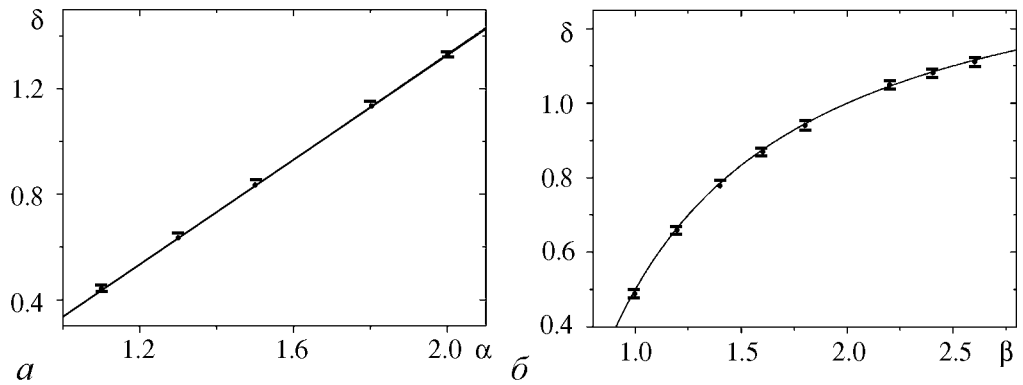


Рис. 3. Графики зависимостей  $\delta$  от параметров отображения:  $\alpha$  при фиксированном  $\beta = 1.5$  (а) и  $\beta$  при фиксированном  $\alpha = 1.5$  (б) по данным численного моделирования (точки) и их сравнение с аналитически полученными оценками (сплошные линии)

### 3. Статистика ламинарных фаз

Исследуемое отображение имеет две неподвижные точки. Анализ динамики отображения показал, что в окрестности каждой из них возможно образование области ламинаризации, то есть области, в которой движение частицы будет регулярным. Неподвижные точки отображения имеют различные свойства, поэтому при различных значениях параметров в системе наблюдаются различные перемежаемые режимы.

Первая область ламинаризации связана с нейтрально неустойчивой точкой на границе фазового пространства ( $x \ll 1$ ). Естественно, что при существенной потере устойчивости внутренней неподвижной точки возникает механизм возврата в эту область ламинаризации. При этом возникает перемежаемость необычного типа. Типичный пример траектории отображения (1) соответствующего типа перемежаемости приведен на рис. 4, в. Аналогичный механизм ранее привлекался к описанию фликер-шумов [9]. В этой работе возврат обеспечивался введением заданной вероятности возврата в область ламинаризации без использования вида отображения.

Кроме такого режима перемежаемости, в исследуемом отображении может возникать и классический режим перемежаемости III рода [10]. Этот режим возникает непосредственно после потери устойчивости внутренней неподвижной точки. При этом в ее окрестности формируется вторая зона ламинаризации. В этом случае возврат в нее уже обеспечивается нейтрально неустойчивой неподвижной точкой, лежащей на границе фазового пространства. Типичный пример траектории такого типа показан на рис. 4, а.

Естественно, возможна ситуация, при которой в системе одновременно существуют две области ламинаризации. При этом возврат в ламинарную область одного типа происходит через вторую область ламинаризации. Такой динамический режим можно назвать режимом конкуренции этих типов перемежаемости (рис. 4, б). В определенном смысле режим конкуренции можно рассматривать и как другой тип перемежаемости, в котором и возврат в зону ламинаризации и зона ламинаризации

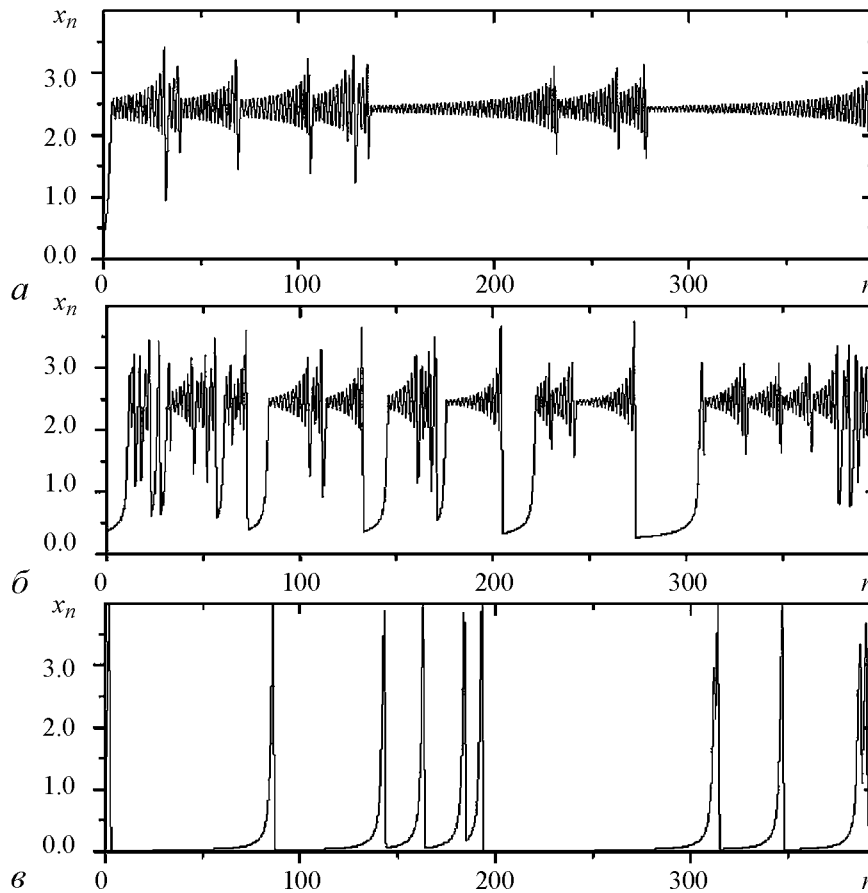


Рис. 4. Типичные орбиты отображения (1) при различных динамических режимах:  $a - \alpha = 4.5, \beta = 0.267$  – перемежаемость III рода;  $б - \alpha = 4.5, \beta = 2$  – перемежаемость на граничной точке;  $в - \alpha = 4.5, \beta = 0.32$  – режим конкуренции перемежаемостей (перемежаемость с двумя типами ламинарных фаз)

имеют одинаковую ламинарную природу. Хаотическими являются лишь переходы от одной ламинарной фазы к другой.

Типичные примеры траекторий при разных значениях параметров показаны на рис. 4. Хорошо заметна зависимость вида ламинарных фаз от значений параметров отображения.

Перейдем теперь к анализу важной характеристики перемежаемых режимов – функции распределения длин ламинарных фаз при различных значениях параметров. В определенном смысле при различных значениях параметров в динамике может присутствовать два типа ламинарных фаз. Ламинарная фаза одного типа связана с неподвижной точкой на границе фазового пространства, другого – со второй неподвижной точкой вблизи перехода ее мультипликатора через  $(-1)$ . Таким образом можно ввести функции распределения длин ламинарных фаз для каждого типа ламинарной фазы. Начнем с функции распределения длин ламинарных фаз, определяемых граничной неподвижной точкой.

Напомним, что отображение (1) содержит три важных участка, определяющих поведение системы: окрестность точки  $x = 0$ , максимума отображения  $x = 2$  и

правой границы фазового пространства  $x = 4$ . Первый участок – область фазового пространства вблизи  $x = 0$ . Этот участок ламинаризации определяет динамику системы на ламинарных участках траектории. Он характеризуется параметром  $\alpha$ . В этой области уравнение в конечных разностях

$$x_{n+1} = x_n + x_n^\alpha$$

можно приближенно заменить на дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^\alpha.$$

Решение этого уравнения определяет длину ламинарной фазы по координате ее начальной точки  $x_0$

$$l(x) \approx \frac{1}{(1 - \alpha) x_0^{\alpha-1}}. \quad (4)$$

Однако знания динамики системы на ламинарных участках траектории недостаточно для определения статистических свойств ламинарных фаз. Используем асимптотику инвариантной функции распределения для  $x \ll 1$ , см. уравнение (3), и оценим вероятность соответствующих начальных значений для ламинарных фаз

$$dw \sim x_0^{\frac{1-\beta}{\beta}} dx_0.$$

Теперь, с учетом выражения длин ламинарных фаз (4), установим асимптотики функции распределения длин ламинарных фаз в области  $l \gg 1$

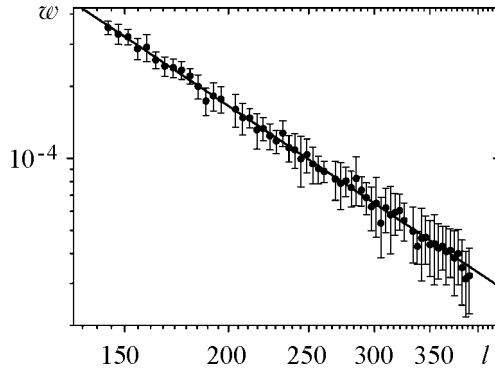


Рис. 5. Функция распределения ламинарных фаз при  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.5$  в двойном логарифмическом масштабе. Численные значения обозначены точками с указанием погрешности. Результат аппроксимации степенной функцией с показателем  $\gamma = 2.31 \pm 0.07$  – сплошная линия. Видно хорошее согласие значения показателя  $\gamma$ , вычисленного теоретически, с наблюдаемым при численном моделировании. Рост погрешности с длиной ламинарной фазы связан с уменьшением количества статистических данных.

значения  $\alpha$ ,  $\beta$ , для которых вычислены значения  $\gamma$  согласно теоретической зависимости, и  $\gamma_{\text{числ}}$ , полученные непосредственно из численного эксперимента.

$$dw \sim \frac{1}{l^{1+\frac{1}{(\alpha-1)\beta}}} dl = \frac{1}{l^\gamma} dl. \quad (5)$$

Показатель  $\gamma > 1$  при  $\alpha > 1$  и  $\beta > 0$ . Следует отметить медленное степенное спадание функции распределения длин ламинарных фаз  $\rho(l)$  при  $l \gg 1$  как  $\rho(l) \sim l^{-\gamma}$ , что является характерным признаком устойчивых распределений или распределений Леви [11]. Степенной скейлинг функции распределения ламинарных фаз (рис. 5) в крупномасштабной области приводит к ряду аномальных статистических свойств, связанных с расходимостью моментов длин ламинарных фаз. Результаты численного моделирования отображения (1) подтверждают наличие такого степенного спадания  $\rho(l) \sim l^{-\gamma}$ . В таблице приведены



В отличие от перемежаемостей I и III рода, для которых характерен степенной скейлинг с показателем 2, рассматриваемые режимы характеризуются широким спектром показателей скейлинга. Все моменты найденной функции степени выше либо равной  $1/[(\alpha - 1)\beta]$  расходятся. Если величина  $1/[(\alpha - 1)\beta] \geq 1$ , то расходится первый момент функции распределения, то есть средняя длина ламинарных фаз стремится к бесконечности  $\langle l \rangle \rightarrow \infty$ . Однако при определенных значениях параметров в системе могут возникать ламинарные фазы, связанные с другим механизмом. В области параметров, при которых вторая неподвижная точка теряет устойчивость, ее мультипликатор близок к  $(-1)$  и появляется ламинарная фаза, соответствующая перемежаемости III рода. В этом случае реализуется режим конкуренции между ламинарными фазами обеих неподвижных точек (см. рис. 4, б).

Таблица

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\gamma_{\text{num}}$
1.5	1	3	$3.04 \pm 0.11$
1.5	1.5	2.33	$2.37 \pm 0.08$
1.5	2	2	$1.97 \pm 0.04$
2	1	2	$2.03 \pm 0.04$
2	1.5	1.66	$1.62 \pm 0.07$
2	2	1.5	$1.59 \pm 0.12$

Что же касается перемежаемости, связанной со второй неустойчивой точкой, то ее можно классифицировать как перемежаемость III рода. Устройство ламинарных фаз подобных режимов хорошо исследовано [2]. Функция распределения ламинарных фаз имеет вид

$$dw = \rho(l)dl \sim \frac{\varepsilon^{3/2} e^{4\varepsilon l}}{(e^{4\varepsilon l} - 1)^{3/2}} dl.$$

Здесь  $\varepsilon$  – параметр надкритичности, определяемый асимптотикой отображения вблизи неустойчивой точки

$$x_{n+1} = -(1 + \varepsilon)x_n + o(x_n^2),$$

где параметр  $\varepsilon$  определяется выражением  $\varepsilon = 2\beta(x^* - 2)^{\beta-1} - 1$  ( $x^*$  – координата неподвижной точки).

Следует отметить, что можно выделить две области характерного поведения функции распределения ламинарных фаз:  $x \ll \varepsilon^{-1}$  и  $x > \varepsilon^{-1}$ . В первой области  $\rho(l) \sim l^{-3/2}$ , то есть наблюдается степенной скейлинг. Во второй области функция распределения ламинарных фаз III рода экспоненциально спадает  $\rho(l) \sim \exp(-2l\varepsilon)$ . С ростом параметра надкритичности  $\varepsilon$  перемежаемый характер поведения системы постепенно сходит на нет из-за того, что вероятность реализации достаточно длинных участков ламинарности становится экспоненциально малой. Поэтому граница существования перемежаемости III рода определяется соотношением  $2l_{\min}\varepsilon_{\text{crit}} \approx 1$ . Это соотношение позволяет численно оценить верхнюю границу существования перемежаемости III рода. Принимая минимальную длину ламинарной фазы  $l_{\min} \sim 4$ , получим значение верхней границы для параметра отображения  $\beta_{\text{crit}} \sim 0.5$ .

Обсудим теперь функцию распределения ламинарных фаз в режиме конкуренции перемежаемостей. Как было показано выше, статистика ламинарных фаз зависит от динамики отображения в области ламинаризации и от функции распределения начальных координат ламинарных фаз. Выше были получены функции распределения ламинарных фаз разных типов в предположении полностью хаотического механизма

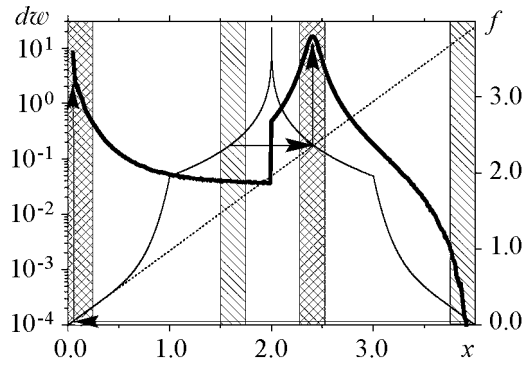


Рис. 6. Рисунок иллюстрирует взаимную независимость функций распределения для перемежаемости III рода и перемежаемости на граничной точке. Видно, что участки инвариантной функции распределения (жирная линия), определяющие функцию распределения начальных координат ламинарных фаз (косая штриховка), лежат вдали от тех участков инвариантной функции распределения, которые определяются функциями распределения ламинарных фаз разных типов (перекрестная штриховка)

возврата. Однако в случае одновременного существования двух различных типов ламинарных фаз, их статистические свойства не будут оказывать друг на друга взаимного влияния, так как области фазового пространства, соответствующие начальным координатам ламинарных фаз обоих типов, лежат вдалеке от областей ламинаризации (рис. 6). Соответственно функции распределения ламинарных фаз останутся неизменными даже в случае конкуренции перемежаемостей.

#### 4. Показатель Ляпунова

Перейдем теперь к анализу степени хаотичности орбит отображения (1). Начнем с вычисления показателя Ляпунова. Показатель Ляпунова для одномерных отображений определяется как

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(x_n)|. \quad (6)$$

Сумма в правой части содержит вклады от ламинарных и хаотических участков траектории. Физически удобно разделить эти вклады и анализировать их отдельно. Оценим вклад, вносимый в показатель Ляпунова одним ламинарным участком траектории. Для этого перейдем от отображения к дифференциальному уравнению на участке ламинарной фазы. Тогда для переменной  $x$  и её вариации  $\delta x$  получим

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= \alpha x^{\alpha-1} \delta x, \\ \dot{x} &= x^\alpha. \end{aligned}$$

Разделив первое уравнение на второе и проинтегрировав, получим

$$\ln \left( \frac{\delta x}{\delta x_0} \right) = \alpha \ln \left( \frac{x}{x_0} \right).$$

Величина  $\ln[(\delta x)/(\delta x_0)]$  представляет собой вклад в сумму (6), вносимый одним ламинарным участком траектории.

Теперь, собрав в сумме вклады ламинарных участков и хаотических отдельно, перейдем формально к усреднению по ламинарным фазам

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}(N)}{N} \left( \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \alpha \ln \left( \frac{x}{x_0} \right) + \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{2 < x_n < 4} \ln |f'(x_n)| \right).$$

Здесь  $\tilde{N}(N)$  обозначено количество ламинарных фаз, возникших за  $N$  итераций системы. Первое слагаемое в скобках представляет собой показатель Ляпунова ламинарных фаз, усредненный по большому количеству ламинарных фаз

$$\lambda_{\text{lam}} = \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \alpha \ln \left( \frac{x}{x_0} \right) \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Физический смысл этого показателя – это средний вклад в показатель Ляпунова на одну ламинарную фазу. Второе слагаемое – вклад, вносимый хаотическими всплесками. Длина хаотических фаз зависит от интенсивности отталкивания неустойчивой точки в области  $2 < x < 4$ , которая определяется параметром  $\beta$ . Число хаотических фаз при больших  $N$  совпадает с числом ламинарных  $\tilde{N}(N)$ , так как каждая ламинарная сменяется хаотической и наоборот. Аналогично можно ввести показатель Ляпунова на одну хаотическую фазу

$$\lambda_{\text{chaos}} = \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{2 < x_n < 4} \ln |f'(x_n)| \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Теперь остается обсудить величину  $N/\tilde{N}(N)$ . Ясно, что эта величина определяет среднюю длительность одной ламинарной и одной хаотической фазы. Тогда

$$\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\tilde{N}(N)}.$$

Где  $\langle l_{\text{chaos}} \rangle$  – средняя длительность одной хаотической фазы, а  $\langle l \rangle$  – средняя длительность одной ламинарной фазы.

Таким образом, показатель Ляпунова можно оценить согласно общему соотношению

$$\Lambda \approx \frac{\lambda_{\text{lam}} + \lambda_{\text{chaos}}}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle}.$$

Это соотношение явно демонстрирует важность определения характера распределений длин ламинарных фаз. В случае, если величина  $\langle l \rangle$  конечна, это выражение можно преобразовать к виду

$$\Lambda \approx \frac{\Lambda_{\text{lam}} \langle l \rangle + \Lambda_{\text{chaos}} \langle l_{\text{chaos}} \rangle}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle} = \frac{\langle l \rangle}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle} \Lambda_{\text{lam}} + \frac{\langle l_{\text{chaos}} \rangle}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle} \Lambda_{\text{chaos}}, \quad (7)$$

где величины  $\Lambda_{\text{lam}}$  и  $\Lambda_{\text{chaos}}$  представляют собой «парциальные» вклады ламинарных и хаотических участков траектории в показатель Ляпунова на одну итерацию. Величины  $\Lambda$ ,  $\Lambda_{\text{lam}}$  и  $\Lambda_{\text{chaos}}$  могут быть определены непосредственно из численных экспериментов. Обратим внимание, что соотношение (7) объясняет роль средних длин ламинарных и хаотических фаз и их влияние на величину показателя Ляпунова и

указывает физический механизм его изменения при изменении относительных длин ламинарных и хаотических фаз. В случае нескольких типов ламинарных фаз соотношение (7) обобщается очевидным образом. Для выяснения значений показателя Ляпунова при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  важно установить ограниченность показателей  $\lambda_{\text{lam}}$  и  $\lambda_{\text{chaos}}$ .

Среднее значение вкладов в сумму от ламинарных фаз может быть вычислено с использованием предположения об эргодичности рассматриваемой системы. При этом усреднение по реализации может быть заменено усреднением по ансамблю

$$\lambda_{\text{lam}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \alpha \ln \left( \frac{x}{x_0} \right) = \alpha \left\langle \ln \left( \frac{x}{x_0} \right) \right\rangle = \alpha \int_0^{\infty} \ln \left( \frac{x(l)}{x_0(l)} \right) w(l) dl.$$

Учитывая ранее рассмотренные свойства функции распределения, можно доказать, что подобные средние существуют и конечны.

При усреднении вкладов хаотических фаз необходимо учитывать, что инвариантная функция распределения имеет особенность в точке  $x \rightarrow 4$ . Это означает, что значения из этой области будут намного чаще остальных встречаться в хаотических фазах. Проведем оценку вклада таких итераций

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{chaos}}|_{x \sim 4} &\sim \int_0^4 \ln |f'(x)| F(x) dx \sim \int_0^4 \ln \left| 1 + \beta (4-x)^{\beta-1} \right| (4-x)^{\frac{1-\beta}{\beta}} dx \sim \\ &\sim \int_0^4 \beta (4-x)^{\beta+\frac{1}{\beta}-2} dx \sim \left( (4-x)^{\frac{1}{\beta}+\beta-1} \right) \Big|_0^4 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, и вклад хаотических фаз

$$\lambda_{\text{chaos}} = \langle \ln |f'(x_n)| \rangle < \infty$$

можно считать конечным при любых значениях параметров отображения. Следовательно, основная зависимость показателя Ляпунова определяется величиной  $\langle l \rangle$ , и показатель Ляпунова связан со средней длиной ламинарных фаз соотношением

$$\Lambda \sim \frac{\text{const}}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle}.$$

Для перемежаемости I рода это соотношение получено в [12]. Из этого соотношения ясно, что режимы в двухпараметрическом семействе отображений (1), при которых  $\langle l \rangle \rightarrow \infty$ , обладают нулевым показателем Ляпунова  $\Lambda = 0$ . Условие  $1/[(\alpha-1)\beta] = 1$  является границей, отделяющей множество хаотических режимов, для которых  $\langle l \rangle < \infty$ , от режимов с показателем Ляпунова, равным нулю (рис. 7). В этих условиях при  $\Lambda = 0$  в системе реализуется состояние слабого хаоса. Под слабым хаосом естественно понимать такое поведение системы, при котором выполняется только часть свойств хаотического поведения. Иерархия свойств, расположенных в порядке усиления хаотичности, хорошо известна и приведена в [13]. В рассматриваемой системе выполняются такие свойства, как наличие инвариантной меры, эргодичность и перемешивание. При этом не выполняется самое сильное свойство – экспоненциальное затухание корреляций, и соответственно экспоненциальное разбегание траекторий.

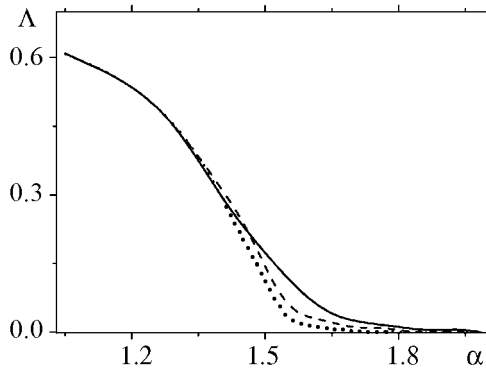


Рис. 7. Показатель Ляпунова уменьшается ростом параметра  $\alpha$ . При некоторой величине  $\alpha > \alpha_{crit}$  показатель Ляпунова стремится к нулю. Показана тенденция приближения результатов численного моделирования к теоретически предсказанному результату с ростом числа итераций, использованных при вычислении показателя Ляпунова (сплошная линия –  $10^6$ , штриховая –  $10^8$ , пунктирная –  $10^9$  итераций)

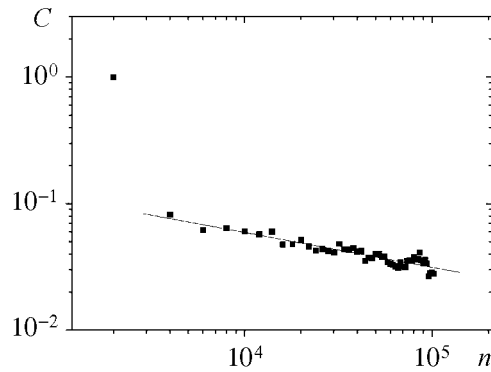


Рис. 8. График автокорреляционной функции выбранной реализации в двойном логарифмическом масштабе. Линейная аппроксимация численных данных на этом графике указывает на степенной характер затухания корреляций. Результат аппроксимации имеет вид  $C(n) = An^{-\delta}$

В нашем случае корреляционная функция спадает степенным образом (рис. 8) и потеря памяти о начальном состоянии происходит медленнее, чем в режиме детерминированного хаоса с положительным показателем Ляпунова. В теории бильярдов также известны режимы, соответствующие слабому хаосу (см., например, [14]). Так, для треугольных бильярдов топологическая энтропия и показатель Ляпунова всегда нулевые, но при несоизмеримых углах в таких бильярдах обнаружено перемешивание [15] и, как следствие, слабый хаос.

Для демонстрации качественных изменений в поведении исследуемых динамических систем при переходе величины  $1/[(\alpha - 1)\beta]$  через 1, на рис. 7 приведен график зависимости показателя Ляпунова  $\Lambda$  от величины параметра  $\alpha$  при фиксированном  $\beta$ , полученный численно. Величина  $1/[(\alpha - 1)\beta]$  достигает 1, например, при  $\alpha = 1.5$  и  $\beta = 2$ . Рис. 7 демонстрирует наличие перехода от сильного хаоса ( $\Lambda > 0$ ) в системе при  $\alpha < 1.5$  к слабой хаотизации ( $\Lambda = 0$ ) при  $\alpha > 1.5$ . Для наглядной демонстрации качественных изменений в системе на рис. 4 приведен график итераций отображения (1) при различных значениях управляющего параметра  $\beta$ .

В рассматриваемом случае двупараметрического семейства отображений область параметров  $(\alpha, \beta)$  делится на три качественно различные области (рис. 9). Переход из области развитого хаоса в область слабой хаотизации (линия 2) соответствует специфическому фазовому переходу. В качестве параметра порядка выберем показатель Ляпунова. Тогда в системе реализуется фазовый переход от положительного параметра порядка к его нулевому значению, причем непрерывный характер изменения параметра порядка соответствует фазовому переходу II рода.

Переход от регулярного поведения к сильному хаосу (линия 1) происходит по сценарию перемежаемости III рода, возникающей при пересечении мультипликатором неподвижной точки  $x^*$  значения  $(-1)$  при параметре  $\beta = \beta^* \approx 0.26$ . Об этом свидетельствует численный анализ поведения показателя Ляпунова вблизи  $\beta = \beta^*$  (рис. 10). Отсутствие каскада удвоения периода, который обычно наблюдается в од-

номерных отображениях при переходе мультипликатора через  $(-1)$ , связано с отсутствием гладкого экстремума вблизи неподвижной точки и существованием механизма реинжекции. Реинжекция в исследуемом отображении тесно связана с негладкостью его формы в точке  $x = 2$ .

Кроме этого из рис. 9 следует, что при определенных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  становится возможным непосредственный переход от регулярной динамики к слабому хаосу, минуя промежуточную фазу с положительным показателем Ляпунова (линия 3). Граница такого перехода определяется такими значениями параметров:

$$\alpha \geq 4.86,$$

$$\beta \approx 0.26.$$

Наблюдаемый при этом переход выходит за границы обычной классификации пере-

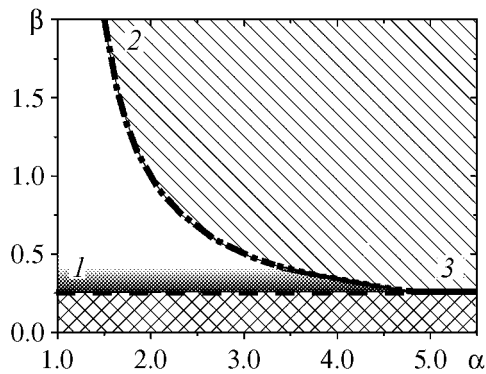


Рис. 9. Фазовая диаграмма. Область параметров  $(\alpha, \beta)$  с фазой, обладающей нулевым показателем Ляпунова (заштрихована косыми линиями) и с положительным (белая). Область параметров, заштрихованная крестиком, соответствует фазе регулярной динамики (показатель Ляпунова отрицателен). Серая область на фазовой диаграмме соответствует перемежаемости III рода

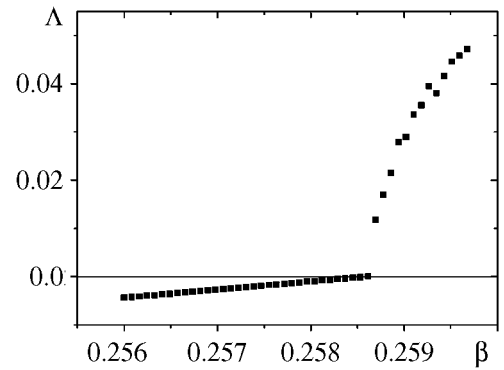


Рис. 10. Поведение показателя Ляпунова вблизи точки бифуркации  $\beta = \beta^*$ . Переход к хаосу происходит не через каскад удвоения периода, а через перемежаемость III рода

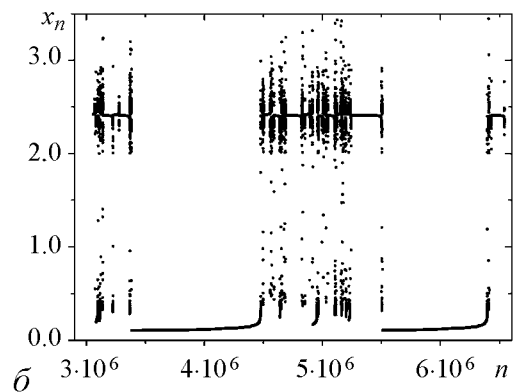
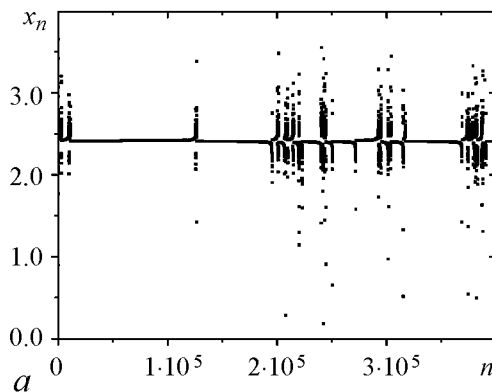


Рис. 11.  $a$  – типичный график итераций отображения при переходе через линию 1 (перемежаемость III рода, см. рис. 9);  $b$  – график итераций отображения при переходе через линию 3 (порядок – слабый хаос, см. рис. 9), при этом наблюдается конкуренция ламинарных фаз

межаемых режимов из-за наличия двух различных типов ламинарных фаз (рис. 11). Возникает конкуренция между перемежаемостью III рода и перемежаемостью граничной точки. С увеличением параметра  $\beta$  средняя длина ламинарных фаз в окрестности  $x^*$  уменьшается, однако при значении параметра  $\alpha \geq 4.86$  статистические свойства ламинарных фаз вблизи  $x = 0$  обеспечивают зануление показателя Ляпунова. Такой процесс является примером перехода порядок – слабый хаос.

Проявления хаотических свойств при нулевом показателе Ляпунова является не типичным для классических типов перемежаемости. Такой качественно новый вариант поведения, как слабый хаос в перемежающихся системах, демонстрируют лишь отображения с бифуркационной точкой на границе фазового пространства.

Докажем теперь, что топологическая энтропия каждого представителя двухпараметрического семейства отображений (1) – положительная величина, не зависящая от параметров. В определенном смысле положительность этой величины говорит о сложном поведении траекторий отображения. Для определения топологической энтропии (см. например [16, 17]) необходимо построить два нидинг-ряда (*kneading sequence*)  $Q_+(t)$  и  $Q_-(t)$  в окрестности максимума  $x = 2$ . Первый нидинг-ряд будет иметь вид:  $Q_+(t) = -1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots$ . В исходном отображении  $x = 2$  являлся максимумом, поэтому первый член нидинг-последовательности является отрицательным, при дальнейших итерациях  $f^k(2) = 0$  и, так как  $f^k(2) \geq 0$ , то точка  $x = 2$  будет являться минимумом, поэтому все остальные члены нидинг-ряда имеют знак «плюс». Соответственно  $Q_-(t) = -Q_+(t)$ . Уравнение для нахождения топологической энтропии будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t^k - 1 = 0.$$

Ближайшим к нулю положительным корнем этого уравнения является  $t_0 = 0.5$ . Таким образом, топологическая энтропия для всех отображений вида (1) равна

$$h_{\text{top}} = -\ln(t_0) = \ln(2) \simeq 0.693.$$

Для рассматриваемого семейства отображений величина топологической энтропии не совпадает с показателем Ляпунова, который меняется с изменением параметров отображения и даже обращается нуль. Поэтому часто цитируемый (см., например, [2]) вывод о совпадении показателя Ляпунова с топологической энтропией для одномерных отображений не выполняется в рассмотренных режимах перемежаемости.

### Заключение

В рассмотренном семействе отображений обнаружены необычные переходы между различными типами перемежаемости. Показано, что в случае граничного положения точки бифуркации система начинает демонстрировать существенно новые варианты поведения, совершенно не характерные для классических типов перемежаемости. Обнаружен интересный режим конкуренции, при котором перемежаемая траектория состоит из случайных участков различных типов ламинарных фаз. Фазовая диаграмма таких переходов указывает на несколько возможных механизмов

перехода к хаосу в этом семействе отображений. Интересно отметить, что распределение длительности ламинарных фаз относится к устойчивым распределениям. Такие распределения неизбежно приводят к ряду аномальных транспортных явлений с широким спектром скейлинговых законов.

#### Библиографический список

1. *Manneville P., Pomeau Y.* Intermittency and Lorentz model // *Phys. Lett.* 1979. Vol. 75A. P. 1.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
3. *Арнольд В.И.* Геометрические методы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000, 400 с.
4. *Naydenov S.V., Tur A.V., Yanovsky A.V., Yanovsky V.V.* New scenario to chaos transition in the mappings with discontinuities // *Phys. Letters A.* 2003. Vol. 320. P. 160
5. *Bauer M., Habib S., He D.R., and Martienssen W.* New type of intermittency in discontinuous maps // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68. P. 1625.
6. *Hugo L.D., de Cavalcante S. and Rios Leite J.R.* Logarithmic periodicities in the bifurcations of type-I intermittent chaos // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 92. P. 254102.
7. *May R.M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature.* 1976. Vol. 261. P. 459.
8. *Наймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
9. *Ben-Mizrache A., Procaccia I., Rosenberg N., Schmidt A., Schuster H.G.* Real and apparent divergencies in low-frequency spectra of nonlinear dynamical systems // *Physical Review A.* 1985. Vol. 31. P. 1830.
10. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминированном подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
11. *Zolotarev V.M.* One-dimensional stable distributions. Mathematical Monograph. American Mathematical Society, Providence, RI. 1986. Vol. 65.
12. *Кузнецов С.П.* Детерминированный хаос. М.: Физматлит, 2001.
13. *Синай Я.Г.* Стохастичность гладких динамических систем. Элементы теории КАМ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы – 2. М.: ВИНТИ, 1985. С. 115.
14. *Zaslavsky G.M., Edelman M.* Weak mixing and anomalous kinetics along filamented surfaces // *Chaos.* 2001. Vol. 11, № 2. P. 295.
15. *Casati G., Prosen T.* Mixing property of triangular billiards // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83. P. 4729.
16. *Collet P., Crutchfield J.P., Eckmann J.P.* Computing the Topological Entropy of Maps // *Math. Phys.* 1983 Commun. Vol. 88. P. 257.
17. *Болотин Ю.Л., Тур А.В., Яновский В.В.* Конструктивный хаос. Харьков: Институт монокристаллов, 2005.

*Институт монокристаллов  
Национальной Академии Наук Украины  
Center D'etude Spatiale  
Des Rayonnements, CNRS-UPS.*

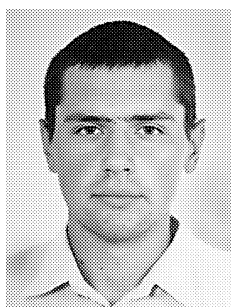
*Поступила в редакцию 25.06.2007  
После доработки 10.06.2008*



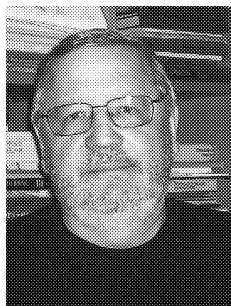
## INTERMITTENCY CONCURRENCE

*S.V. Slipushenko, A.V. Tur, V.V. Yanovsky*

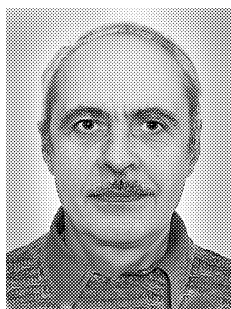
In this paper we studied intermittent modes in the two-parametric set of one-dimensional maps with the neutral unstable point at a phase space boundary. We built the phase diagram in a space of parameters. It defines possible transitions to chaos with a parameter change. We showed the unusual mode of the intermittency concurrence. We studied the laminar length distribution function, Lyapunov exponent and topological entropy of this maps set.



*Слипушенко Сергей Васильевич* – родился в 1984 году в Харькове, окончил физико-технический факультет Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина в 2007 году. После окончания ХНУ им. В.Н. Каразина поступил в аспирантуру Института монокристаллов Национальной Академии Наук Украины.



*Тур Анатолий Валентинович* – родился в 1949 году в Петропавловске, окончил Харьковский государственный университет в 1972 году. После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков), а затем в Институте космических исследований. В настоящее время работает в Национальном центре научных исследований Франции (CNRS), Университете Пауля Сабатини, обсерватории Миди-Пириней, Центре космического исследования излучения (CESR) Тулуза. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований (1978) и доктора физико-математических наук (1988) в области теоретической физики. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория турбулентности, физика плазмы, хаос и нелинейная физика. Автор более 130 научных публикаций и монографии «Конструктивный хаос» (в соавторстве с Ю.Л. Болотиным и В.В. Яновским).



*Яновский Владимир Владимирович* – родился в 1950 году в Полтаве, окончил Харьковский государственный университет в 1973 году. После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков). В настоящее время работает в Институте монокристаллов (ИМ) НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований (1983) и доктора физико-математических наук в ИМ НАНУ (1996) в области теоретической физики. Область научных интересов – теоретическая физика, хаос и теория турбулентности, нелинейная физика. Автор более 220 научных публикаций.