

ОЦЕНКА СКОРОСТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

М.Ю. Логунов, О.Я. Бутковский

В работе рассматривается явление перемешивания фазовых траекторий хаотических систем. Даны полуаналитические оценки динамики перемешивания в дискретных и непрерывных хаотических системах. Описан простой алгоритм экспериментального вычисления локальных и средних по аттрактору степени и скорости перемешивания. Обсуждаются результаты применения этого алгоритма для отображения Эно и системы Чуа.

Введение

Явление перемешивания фазовых траекторий, наряду с положительными ляпуновскими показателями, является одним из немногих фундаментальных свойств детерминированных хаотических систем и вместе с экспоненциальным разбеганием траекторий определяет конечность времени их предсказуемости. Однако это интуитивно понятное явление практически не поддается аналитическому исследованию для хаотических систем, интересных с физической точки зрения. Существующие результаты по оценке скорости перемешивания (см. обзор [1]) позволяют установить скорость перемешивания (а также связать ее с ляпуновскими показателями) лишь для определенных классов дискретных отображений [2,3]. При этом, несмотря на некоторые опубликованные работы (например, [4–6]), аналитическое вычисление скорости перемешивания для более широких классов динамических систем (например, задаваемых в виде систем ОДУ) является еще не решенной задачей.

В этой статье описан простой алгоритм оценки степени и скорости перемешивания, пригодный для исследования как дискретных, так и непрерывных динамических систем. С помощью этого алгоритма оценивается распределение локальных по аттрактору скоростей перемешивания двух известных хаотических систем – отображения Эно и системы Чуа.

В разделе 1 дается определение перемешивающего оператора, а в разделе 2 описан алгоритм оценки локальной скорости перемешивания, основанный непосредственно на определении перемешивающего оператора, и выводится полуаналитическая оценка изменения средней степени перемешивания траекторий со временем. В разделе 3 обсуждаются результаты применения этого алгоритма для отображения Эно и системы Чуа и их согласование с полуаналитической оценкой.

1. Перемешивание в динамических системах

Сформулируем математически понятие перемешивания в хаотической системе, как это сделано в работе [7]. Для этого рассмотрим аттрактор G некоторой системы, на котором задан оператор эволюции системы $S(G)$ и инвариантная мера μ . Выберем на аттракторе G две произвольные области B и W . Отношение меры точек из области B , которые через n итераций оператора эволюции S попали в область W по отношению к мере самой области W , можно записать следующим образом:

$$D_n = \frac{\mu(S^n(B) \cap W)}{\mu(W)}. \quad (1)$$

Оператор S является *перемешивающим*, если при $n \rightarrow \infty$ значение D_n в (1) не зависит от конкретного выбора области W , а определяется отношением $\mu(B)/\mu(G)$:

$$\frac{\mu(S^n(B) \cap W)}{\mu(W)} \rightarrow \frac{\mu(B)}{\mu(G)}, \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Отметим, что это определение верно не только для диссипативных (и, в частности, хаотических), но также и для консервативных систем. Особенность его применения для консервативных систем состоит лишь в том, что множество G является не аттрактором, а энергетической гиперповерхностью системы.

С физической точки зрения, формула (2) описывает «размывание» любой области начальных условий B по всему аттрактору G . Эту формулу можно интерпретировать следующим образом: в пределе $n \rightarrow \infty$ мера образов точек множества B во множестве W равна мере множества B на аттракторе G для произвольных множеств B и W .

Формула (2) дает возможность оценить скорость перемешивания в хаотической системе. Для этого естественно положить $\mu(G) = 1$ и определить корреляционную функцию $C_n(f, g)$ в виде

$$C_n(f, g) = \left| \int g(f \circ S^{-n}) d\mu - \int g d\mu \int f d\mu \right|, \quad (3)$$

где f и g обычно представляют собой *скалярное поле* – некоторые функции от позиции точки на аттракторе [7, 8].

При наличии перемешивания из (2) следует, что $C_n(f, g) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, таким образом, происходит *спадание корреляций скалярного поля*. При этом считается, что скорость спадания корреляций характеризует скорость перемешивания [7].

2. Алгоритм оценки скорости перемешивания

В этом разделе предложен алгоритм оценки скорости перемешивания, основанный на непосредственном вычислении отношения, подобного отношению (1).

Введем на аттракторе хаотической системы множество G_0 из N начальных условий, заданных естественной инвариантной мерой. На каждом n -м шаге эволюции будем задавать окрестность W_n некоторой точки x_n , лежащей на этом аттракторе, как множество из N_1 ближайших к x_n точек множества $S^n(G_0)$. Также

введем множество B_0 как следующую разность множеств: $B_0 = G_0 \setminus W_0$, где W_0 – окрестность произвольной точки x_0 в начальный момент эволюции. Зафиксируем начальное условие x_0 и будем следить за динамикой $x_n = S(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ и отношением числа точек из B_0 , попавших с течением времени в W_n , к полному числу точек N_1 , формирующих множество W_n .

Очевидно, что при данном выборе областей W_n и B_0 это отношение находится по формуле, сходной с (1),

$$M_n = \frac{\mu(S^n(B_0) \cap W_n)}{\mu(W_n)}. \quad (4)$$

Следует отметить, что, в отличие от (1), в данном случае область W_n перемещается по аттрактору на каждом шаге эволюции. Тем не менее вероятностные меры множеств B_0 , G и W_n в этом алгоритме остаются постоянными и, по определению перемешивающего оператора, сходимость M_n к значению $\mu(B_0)/\mu(G_0)$ не зависит от конкретного выбора области W_n , поэтому можно предположить, что характер изменения зависимости (4) от n определяется, как и для последовательности (1), именно перемешивающими свойствами хаотической системы.

Выражение (4) естественно назвать *степенью перемешивания* точек области W_n за n итераций оператора эволюции, поскольку оно показывает относительную степень обновления окрестности заданной точки за определенный интервал времени или вероятность появления в окрестности данной точки тех точек, которые на начальном этапе эволюции не входили в ее окрестность.

Благодаря определенному выше выбору множеств W_n и B_0 , значение M_n будет возрастать от 0 при $n = 0$ до некоторого стационарного значения M_∞ , которое можно установить из (2),

$$M_\infty = (N - N_1)/N.$$

Следует ожидать, что усредненная по локальным областям W_0 зависимость \overline{M}_n будет монотонно возрастающей, скорость роста которой характеризует скорость перемешивания на аттракторе G .

Чтобы получить полуаналитические выражения для оценки изменения степени перемешивания со временем, предположим, что для данной хаотической системы выполняются два условия:

- 1) скорость перемешивания одинакова на всех участках аттрактора;
- 2) если произвольная точка аттрактора x_k выходит в некоторый момент времени n из окрестности W_n заданной точки x_n , ее образ в течение дальнейших наблюдений на произвольном конечном интервале времени уже не может вернуться в окрестность образа точки x_n :

$$\text{если } S^{-1}(x_k) \in W_{n-1} \text{ и } x_k \notin W_n, \text{ то } S^t(x_k) \notin W_{n+t} \quad \forall t \in [0, T].$$

Первое условие не выполняется для большинства интересных, с физической точки зрения, систем, а второе, вообще говоря, противоречит свойству транзитивности, входящему в само определение хаотической системы [9]. Однако это свойство требует выполнения в бесконечном пределе по времени, а характерные времена перемешивания относительно невелики, поэтому такое предположение может оказаться разумным. Ниже, при описании численного эксперимента с системой Чуа,

показано, к каким различиям между полуаналитической и экспериментальной оценкой динамики степени перемешивания $M(t)$ приводит пренебрежение возвратами траекторий в те или иные окрестности. Что касается первого условия, погрешность полуаналитической оценки, определяемая им, существенно зависит от конкретного распределения локальных скоростей перемешивания на аттракторе, но по крайней мере для некоторых хаотических систем она может быть достаточно малой (см. ниже, пункт 3.1).

Пусть относительное число точек, не покинувших некоторую окрестность W_1 на протяжении одной итерации оператора эволюции S , составляет V_1 . Тогда, с учетом двух описанных условий, достаточно очевидно, что относительное число точек V_n , входящих в ту же окрестность на протяжении всего времени эволюции n , составит

$$V_n = V_1^n. \quad (5)$$

Из определений величин M_n и V_n следует соотношение $M_n = 1 - V_n$, поэтому изменение степени перемешивания со временем описывается уравнением

$$M_n = 1 - (1 - M_1)^n.$$

Для последующего анализа удобнее пользоваться рекуррентной оценкой степени перемешивания, которую нетрудно получить из (5),

$$M_n = M_{n-1} + (1 - M_{n-1})M_1. \quad (6)$$

Скорость роста функции M_n в этом случае характеризуется слагаемым $(1 - M_{n-1})M_1$, где множитель M_1 может служить критерием быстроты роста M_n , а значит, и критерием скорости перемешивания, поэтому в дискретном случае усредненную по аттрактору величину \overline{M}_1 естественно интерпретировать как скорость перемешивания в отображении. Большие значения \overline{M}_1 соответствуют более быстрому перемешиванию, и, наоборот, чем меньше значение \overline{M}_1 , тем меньше средняя скорость перемешивания на аттракторе.

Для непрерывных систем выражения (4) и (6) можно переписать в виде

$$M(t) = \frac{\mu(S(t, B_0) \cap W(t))}{\mu(W)} \quad (7)$$

и

$$M(t + \tau) = M(t) + (1 - M(t))M(\tau),$$

откуда при $\tau \rightarrow 0$ можно получить

$$\frac{dM}{dt} = (1 - M(t))K, \quad (8)$$

где K – значение правой производной от $M(t)$ в нуле.

Решение уравнения (8) с учетом начального условия $M(0) = 0$ можно записать как

$$M(t) = 1 - e^{-Kt}. \quad (9)$$

Экспоненциальная скорость роста величины $M(t)$ в этом случае характеризуется параметром K , который определяет среднюю за бесконечно малое время τ скорость

перемешивания и поэтому неудобен для вычисления. В качестве оценки скорости перемешивания в непрерывной системе, по аналогии с дискретным случаем, будем использовать среднее значение степени перемешивания $\overline{M}(1)$.

В следующем разделе приведены примеры вычисления средних и локальных скоростей перемешивания для двух хаотических систем: отображения Эно и системы Чуа.

3. Примеры

3.1. Перемешивание в отображении Эно. Отображение Эно задается уравнениями

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2,$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

и при заданных значениях параметров $a = 1.4$ и $b = 0.3$ является хаотическим.

Для этого отображения была экспериментально рассчитана с помощью описанного в разделе 2 алгоритма динамика изменения степени перемешивания \overline{M}_n со временем n , а также построена ее оценка по формуле (6). Вычисления проводились для аттрактора размером 50000 точек, а размер окрестности выбирался равным 100 точкам (0.2% от размера аттрактора). Результаты вычислений показаны на рис. 1. Как видно из этого рисунка, уже приблизительно на 20-м шаге эволюции отображения Эно все фазовые точки практически полностью обновляют свою окрестность. Отметим также полное совпадение полуаналитической и экспериментальной кривых \overline{M}_n , которое может говорить об обоснованности двух сделанных в разделе 2 предположений о динамике траекторий на аттракторе.

Также было вычислено распределение величин M_1 на аттракторе Эно, которое позволяет обнаружить сильно и слабо перемешивающие области на этом аттракторе (рис. 3). Вид этого распределения говорит о том, что области сильного и слабого перемешивания достаточно четко локализованы. Интересно отметить, что почти на всей «внутренней» дуге аттрактора перемешивание существенно меньше, чем на «внешней» дуге.

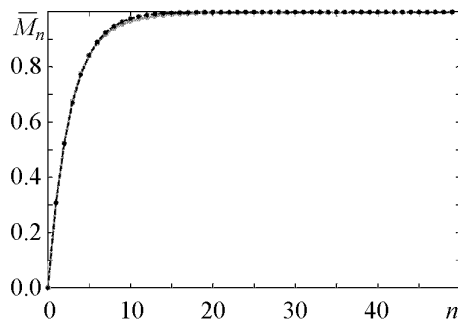


Рис. 1. Динамика степени перемешивания \overline{M}_n в отображении Эно. Полуаналитическая и экспериментальная кривые

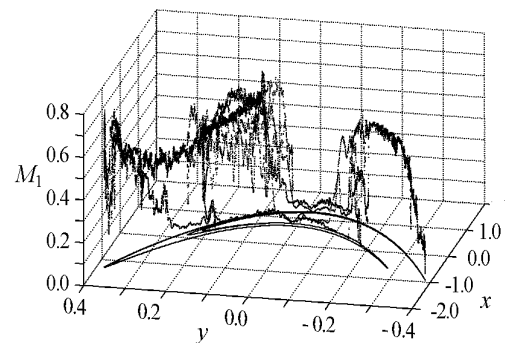


Рис. 2. Локальная скорость перемешивания в отображении Эно. Значения M_1 отложены по оси z над аттрактором отображения

Известно, что, по крайней мере для простых хаотических систем, существует близкая связь ляпуновских показателей и скорости перемешивания [8,10,11]. Эту связь для ляпуновских показателей отображения Эно и средней скорости перемешивания \bar{M}_1 , вычисляемой по предлагаемому алгоритму, иллюстрирует рис. 4. Как и следовало ожидать, в режиме регулярных колебаний (окнах прозрачности) перемешивание в отображении пропадает, а в хаотическом режиме значение средней скорости перемешивания сильно коррелирует со значением старшего ляпуновского показателя отображения.

Очевидно, что обоснованности оценок скорости перемешивания следует ожидать только при наличии достаточно репрезентативного набора начальных условий G_0 , выявляющего тонкую структуру аттрактора. Вместе с тем представляет интерес вопрос об устойчивости предлагаемого алгоритма к вариациям размера локальной окрестности W_n . Чтобы получить ответ на этот вопрос, была построена гистограмма локальных скоростей M_1 для разных размеров локальной окрестности (рис. 5, а), а также зависимость среднего значения \bar{M}_1 от размера локальной окрестности (рис. 5, б).

Из рис. 5, а видно, что с изменением размера локальной окрестности распределение значений скорости перемешивания M_1 претерпевает некоторые изменения, однако эти изменения существенны только для области $M_1 < 0.2$ и практически не влияют на среднюю скорость перемешивания \bar{M}_1 , которая, как показано на рис. 5, б, очень слабо реагирует на изменение размера локальной окрестности.

3.2. Перемешивание в системе Чуа. Система Чуа задается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 9(y - 2/7x + 3/14(|x + 1| - |x - 1|)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -14.286y.\end{aligned}$$

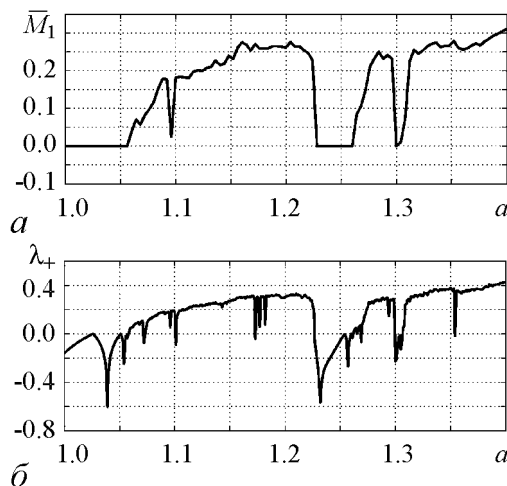


Рис. 3. Зависимость от параметра a средней скорости перемешивания \bar{M}_1 на аттракторе отображения Эно и старшего показателя Ляпунова λ_+

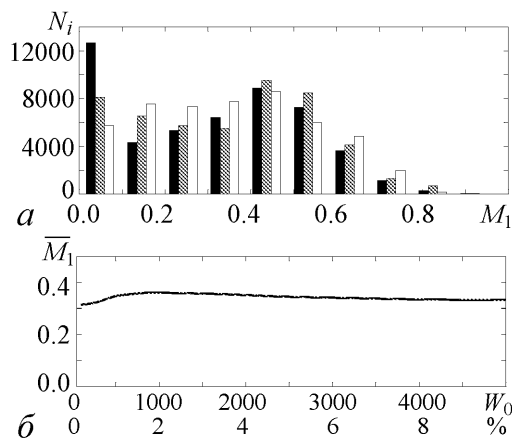


Рис. 4. а – трехкомпонентная гистограмма локальных скоростей перемешивания M_1 для различных размеров локальной окрестности W_n . Черные столбики – относительный размер окрестности 0.2% от размера аттрактора (100 точек), серые столбики – 1% (500 точек) и белые – 5% от размера аттрактора (2500 точек); б – средняя скорость перемешивания \bar{M}_1 на аттракторе в зависимости от размера локальной окрестности (в точках и в % относительно размера аттрактора)

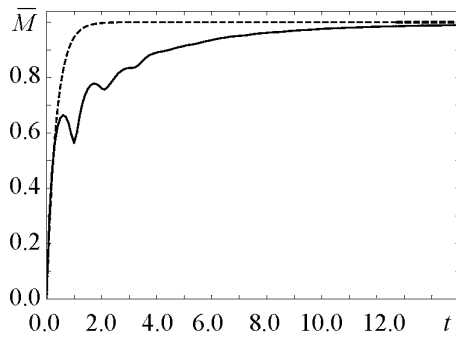


Рис. 5. Динамика средней степени перемешивания $\bar{M}(t)$ на аттракторе. Сплошная линия – экспериментальная кривая, штриховая – полуаналитическая оценка (9)

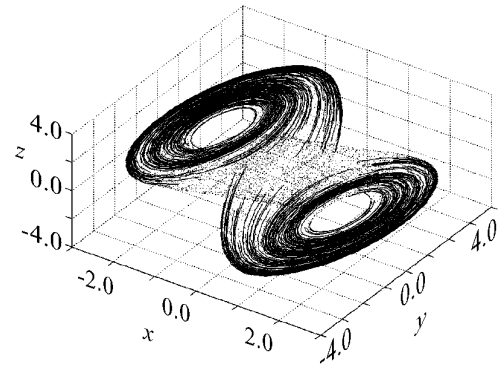


Рис. 6. Локальная степень перемешивания $M(1)$ на аттракторе. Линиями изображены траектории, на которых $M(1) < 0.5$, точками показана область, в которой $M(1) > 0.5$

При данных значениях параметров аттрактор системы представляет собой двойной завиток (double scroll), а динамика является хаотической.

Для этой системы были проведены аналогичные расчеты по вычислению распределения локальных скоростей перемешивания траекторий на аттракторе и оценке средней степени перемешивания. Результаты вычисления зависимости средней степени перемешивания $\bar{M}(t)$ от времени эволюции показаны на рис. 5.

В отличие от отображения Эно, в данном случае наблюдается значительно худшее согласие экспериментальных и полуаналитических оценок средней степени перемешивания. Это объясняется тем, что в системе Чуа сильно проявляется явление выхода траекторий из заданной окрестности, а затем их возврата в нее. Такое поведение фазовых траекторий было запрещено нами при выводе аналитического выражения для степени перемешивания и оно приводит к заниженной, по сравнению с полуаналитической (9), экспериментальной оценке $M(t)$ на среднем интервале времени ($1 < t < 10$), на котором и происходит возврат траекторий в их «родительскую» окрестность. Этот возврат отражается на рис. 6 как участки спада либо более медленного роста зависимости $M(t)$. На интервале времени $t \gg 10$ этот эффект перестает проявляться из-за полного разрушения всех начальных областей W_0 .

Как и в случае с отображением Эно, локальная степень перемешивания на аттракторе Чуа не постоянна. Распределение значений $M(1)$ для этой системы показано на рис. 6. Из рисунка видно, что области слабой перемешиваемости четко расположены вокруг неустойчивых положений равновесия. Фазовые траектории вокруг них раскручиваются, двигаясь в почти плоских лентах, где их перемешивание затруднено, но при выходе траекторий в пространство между завитками они подвергаются гораздо более сильному перемешиванию. Среднее время движения траекторий в этом пространстве составляет приблизительно 1 ед. Затем траектории снова попадают на один из завитков и в этот момент происходит описанный выше возврат траекторий в их «родительские» окрестности. Этим объясняется существование локальных минимумов в зависимости $M(t)$, изображенной на рис. 6.

Заключение

В работе описан метод построения распределения локальных скоростей и средней скорости перемешивания в хаотических системах и показано его применение при анализе отображения Эно и системы Чуа.

Полученная идеализированная полуаналитическая оценка динамики степени перемешивания указывает только на экспоненциальный характер ее роста. Будучи весьма точной для отображения Эно, она существенно отклоняется от экспериментально полученных значений для системы Чуа, в которой значительно проявляется описанное в п. 3.2 явление возврата траекторий.

Предлагаемый алгоритм оценки скорости перемешивания прост и устойчив к вариациям его параметров (в частности, размера локальной окрестности) и дает обоснованные оценки распределения локальных скоростей перемешивания, подтверждением правильности которых могут служить: сам вид распределения, который можно визуализировать для малоразмерных систем (см. рис. 3 и рис. 7) – положение быстро и медленно перемешивающих областей аттракторов на них совпадает с интуитивными представлениями о перемешивании; схожесть экспериментальной и полуаналитической оценок изменения средней степени перемешивания $M(t)$ со временем (см. рис. 1 и рис. 6); сильная корреляция между средней скоростью перемешивания и старшим показателем Ляпунова (см. рис. 4).

Этот алгоритм может быть полезен при анализе и изучении перемешивания как в непосредственно экспериментальных наблюдениях, так и в математических моделях динамических систем с известным оператором эволюции.

Библиографический список

1. *Baladi V.* Decay of correlations // in Smooth Ergodic Theory and its Applications. Proc. Symp. Pure Mathematics, Providence, RI: American Mathematical Society. 1999. Vol. 69. P. 297.
2. *Collet P., Eckmann J.* Liapunov multipliers and decay of correlations in dynamical systems // Journal of Statistical Physics. 2004. Vol. 115. P. 217.
3. *Wonhas A., Vassilicos J.C.* Mixing in fully chaotic flows // Physical Review E. 2002. 66.
4. *Casati G., Prosen T.* Mixing property of triangular billiards // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 4729.
5. *Peifer M., Schelter B., Winterhalder M. et al.* Mixing properties of the Ressler system and consequences for coherence and synchronization // Physical Review E. 2005. 72.
6. *Анищенко В.С., Астахов С.В.* Относительная энтропия как мера степени перемешивания зашумленных систем // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 21. С. 1.
7. *Wiggins S., Ottino J.M.* Foundations of chaotic mixing // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 2004. Vol. 362. P. 937.
8. *Badii R., Heinzelmann K., Meier P., Politi A.* Correlation function and generalized Lyapunov exponents // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37, 4.
9. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
10. *Alves J.F., Luzzatto S., Pinheiro V.* Lyapunov exponents and rates of mixing for one-dimensional maps // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2004. Vol. 24. P. 637.

11. *Niu X., Lee Y.* Efficient spatial-temporal chaotic mixing in microchannels // *J. Micro-mech. Microeng.* 2003. Vol. 13. P. 454.

*Владимирский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 30.10.2007
После доработки 31.03.2008*

ESTIMATION OF MIXING VELOCITY IN CHAOTIC SYSTEMS

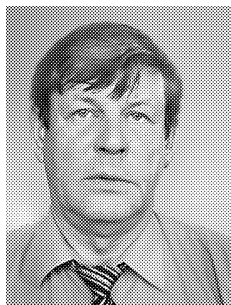
М.Ю. Logunov, О.Я. Butkovskii

In the paper an effect of phase space trajectories mixing in chaotic systems is considered. Approximate analytic estimations are given of mixing dynamics in discrete and continuous chaotic systems. Easy algorithm is developed for experimental calculation of mixing degree and mixing velocity, both local and average over the attractor. Results of this algorithm application to Henon map and to Chua system are discussed.



Логунов Максим Юрьевич – родился во Владимире (1982). Окончил Владимирский государственный университет (2004). Инженер научно-исследовательского сектора ВлГУ. Область научных интересов – методы анализа и моделирования динамических систем, реконструкция динамических систем.

E-mail: mulogunov@mail.ru



Бутковский Олег Ярославович – родился в Магнитогорске (1949). Окончил Магнитогорский педагогический институт (1973). После окончания работал в лаборатории физико-химических исследований МПИ. Защитил кандидатскую диссертацию в Московском педагогическом государственном университете по специальности радиофизика, в области теории колебаний и волн (1987). С 1987 года работает во Владимирском государственном университете. Защитил докторскую диссертацию в ИРЭ РАН (2005). Область научных интересов – нелинейная динамика, нелинейная акустика, моделирование нелинейных явлений в медико-биологических системах.

E-mail: olegb@vlsu.ru