



## СИНХРОНИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ АВТОГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВНЕШНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

*Н.М. Рыскин, С.А. Усачева*

Рассматривается динамика автогенератора с кубичной нелинейностью и запаздыванием под воздействием внешнего гармонического сигнала в случае, когда в автономном генераторе реализуется режим периодических колебаний. Получены аналитические выражения для резонансных кривых, то есть зависимости амплитуды колебаний в режиме синхронизации от частоты внешнего воздействия. Анализируются условия устойчивости режимов синхронизации. Построены языки синхронизации на плоскости параметров частота – амплитуда внешнего воздействия. Обсуждаются основные отличия от классической картины синхронизации системы с одной степенью свободы.

*Ключевые слова:* Автоколебательные системы с запаздыванием, синхронизация, внешнее воздействие, резонансные кривые, языки синхронизации

### Введение

Синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, имеющих разнообразные применения в технике. В последнее время изучение процессов синхронизации (в том числе синхронизации хаотических колебаний) выходит на передний план в нелинейной динамике, причем особое внимание привлекают распределенные автоколебательные системы с бесконечным числом степеней свободы. В настоящей работе рассматривается синхронизация автогенератора с запаздыванием внешним гармоническим сигналом. Под синхронизацией в данном случае понимаем установление режима одночастотных колебаний на частоте внешнего воздействия. Системы с запаздыванием широко распространены в природе и технике [1–3]. Представляется, что процессы синхронизации в подобных системах должны иметь ряд особенностей по сравнению с системами с конечным числом степеней свободы, что обусловлено, во-первых, их распределенным характером, во-вторых, способностью демонстрировать разнообразные режимы колебаний (одночастотные, многочастотные, хаотические).

В качестве примера рассмотрим достаточно простую модельную систему, которая тем не менее хорошо демонстрирует основные особенности поведения систем с запаздыванием

$$\dot{A} + \gamma A - \alpha e^{i\theta} \left(1 - |A(t-1)|^2\right) A(t-1) = F e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Это уравнение приближенно описывает динамику системы, состоящей из замкнутых в кольцо нелинейного усилителя, резонансного фильтра и линии задержки (см., например, [2]). Схема автогенератора приведена на рис. 1. Здесь  $A$  – медленно меняющаяся амплитуда колебаний, несущая частота которых равна резонансной частоте фильтра;  $\alpha$  – параметр, характеризующий коэффициент усиления;  $\gamma$  – параметр диссипации, обратно пропорциональный добротности фильтра;  $\theta$  – набег фазы в цепи обратной связи;  $F$  – амплитуда внешней силы;  $\omega$  – отстройка частоты воздействия

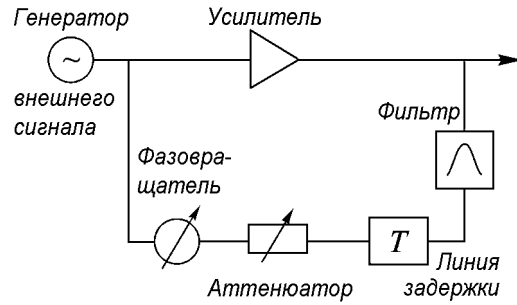


Рис. 1. Схематическое изображение модели автогенератора с запаздыванием

от несущей частоты. Считается, что нелинейная характеристика усилителя аппроксимируется кубическим полиномом. Время задержки принято равным единице, чего всегда можно добиться перенормировкой переменных. Отметим, что в отсутствие запаздывания (1) превращается в укороченное уравнение ван дер Поля–Дуффинга под внешним воздействием, которое является классической моделью синхронизации систем с одной степенью свободы [1, 4–7].

## 1. Собственные моды автономного генератора

Динамика системы (1) в автономном случае ( $F = 0$ ) хорошо изучена [8]. Рассматривая решения в виде одночастотных колебаний с постоянной амплитудой

$$A = A_0 e^{i\omega t}, \quad (2)$$

можно показать, что частота  $\omega$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\omega}{\gamma} = -tg(\omega - \theta). \quad (3)$$

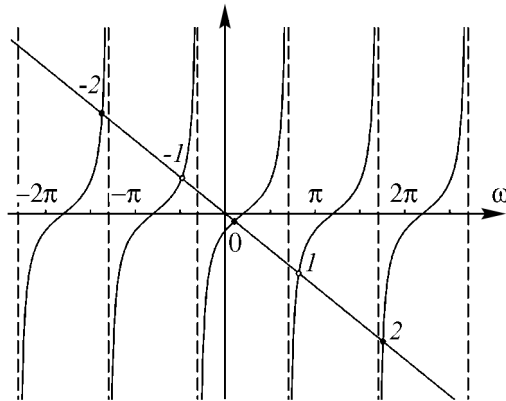


Рис. 2. Графическое определение собственных частот автогенератора с запаздыванием. Корни с четными номерами – частоты собственных мод. Корни с нечетными номерами – частоты автомодуляционных мод

Это уравнение имеет бесконечное число комплексных корней, то есть существует бесконечное число собственных мод, что отражает распределенную природу системы. Удобно решать уравнение (3) графически (рис. 2). Если занумеровать корни уравнения (см. рис. 2), становится очевидным, что все решения можно разделить на два класса. Для корней  $\omega_n$  с четными номерами  $n = 2k$  (здесь и далее  $\omega_n$  – корень уравнения (3) с номером  $n$ ) амплитуда колебаний удовлетворяет соотношению

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega_{2k}^2}}{\alpha}, \quad (4)$$

где  $\rho = |A_0|^2$ . Эти решения существуют, когда параметр усиления  $\alpha$  превышает порог самовозбуждения,  $\alpha > \alpha_{st} = \sqrt{\gamma^2 + \omega_{2k}^2}$ . Анализ их устойчивости показывает, что, если  $\alpha$  превысит некоторую величину  $\alpha_{sm}$ , одночастотные колебания становятся неустойчивыми в результате бифуркации Андронова–Хопфа и возникает автомодуляция [8].

Для мод с нечетными номерами  $n = 2k + 1$  амплитуда колебаний определяется соотношением

$$\rho = 1 + \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega_{2k+1}^2}}{\alpha}. \quad (5)$$

Эти решения существуют при любых значениях параметров, однако всегда неустойчивы. Тем не менее они играют важную роль, поскольку возбуждаются на фоне колебаний на основной моде с достаточно большой амплитудой, чем и обусловлено возникновение автомодуляции (см. [8]). Будем в дальнейшем называть их автомодуляционными модами.

Как показано в [8], в автономном генераторе на плоскости параметров  $\theta$ ,  $\alpha$  области самовозбуждения имеют вид периодически расположенных зон генерации. В центрах зон генерации при  $\theta = 2\pi n$  порог самовозбуждения минимален, на границах при  $\theta = 2\pi n + \pi$  – максимален.

Далее в настоящей работе анализируются режимы вынужденной синхронизации в системе (1) в области параметров  $\alpha_{st} < \alpha < \alpha_{sm}$ , то есть когда автономная система генерирует устойчивые одночастотные колебания. Случаи воздействия внешним сигналом на генератор в автомодуляционных и хаотических режимах будут рассмотрены в отдельной работе.

## 2. Режимы синхронизации неавтономного генератора с запаздыванием

Рассмотрим режим вынужденной синхронизации неавтономного генератора (1). Будем искать решения в виде (2), где  $\omega$  – частота внешнего воздействия. В этом случае нетрудно получить соотношение

$$F^2 = \rho \left[ (\gamma - \alpha(1 - \rho) \cos(\theta - \omega))^2 + (\omega - \alpha(1 - \rho) \sin(\theta - \omega))^2 \right], \quad (6)$$

с помощью которого можно построить резонансные кривые: зависимости амплитуды колебаний от  $\omega$  при различных значениях амплитуды воздействия. Рассмотрим сначала случай  $\theta = 0$ , что соответствует центру зоны генерации, то есть оптимальным условиям для самовозбуждения. Выберем значение параметра диссипации  $\gamma = 0.3$ , параметра возбуждения  $\alpha = 0.9$ . При таком выборе параметров одночастотный режим в автономной системе устойчив, однако порог генерации  $\alpha_{st} = 0.3$  превышен достаточно существенно. Порог автомодуляции в этом случае составляет  $\alpha_{sm} \approx 1.33$ .

Обсудим вид резонансных кривых, которые приведены на рис. 3. Очевидно, что при  $F = 0$  уравнение (6) имеет решения  $\rho(\omega)$ , которые соответствуют колебаниям автономной системы (см. разд. 1). В данном случае это, во-первых, решение вида

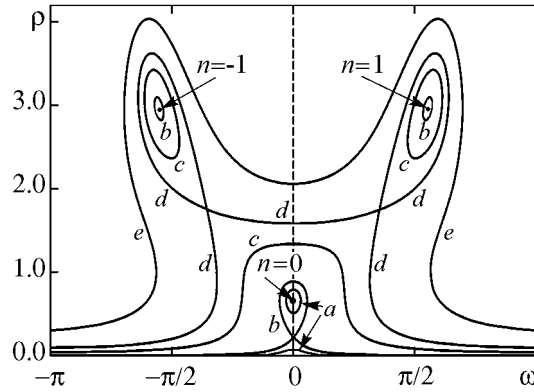


Рис. 3. Резонансные кривые при  $\theta = 0$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 0.9$ ;  $F = 0.1$  (a), 0.1886 (b), 0.7 (c), 1.038 (d), 1.8 (e)

(4), соответствующее основной собственной моде ( $n = 0$ , если следовать нумерации, введенной в разд. 1). В рассматриваемом случае, когда  $\theta = 0$ , частота этой моды  $\omega_0 = 0$  (см. уравнение (3)), то есть генерация возникает точно на центральной частоте полосы пропускания фильтра<sup>1</sup>. Для остальных собственных мод с четными номерами условия самовозбуждения не выполнены. Кроме того, существуют еще решения вида (5), соответствующие автомодуляционным модам, для которых  $n = 2k + 1$ , и тривиальное решение  $\rho = 0$ . Таким образом, при  $F = 0$  резонансная кривая вырождается в горизонтальную ось и совокупность дискретных точек. На рис. 3 изображены три таких точки: одна, соответствующая основной моде с  $n = 0$  (ее частота  $\omega_0 = 0$ ), и две, соответствующие модам с  $n = \pm 1$  ( $\omega_{\pm 1} \approx \pm 0.55\pi$ ). Остальные точки, отвечающие высшим автомодуляционным модам, на рисунке не показаны.

При малых амплитудах воздействия (кривые  $a$  на рис. 3) резонансные кривые состоят из замкнутых ветвей, охватывающих описанные выше точки, и из нижней ветви, близкой к горизонтальной оси. При

При малых амплитудах воздействия (кривые  $a$  на рис. 3) резонансные кривые состоят из замкнутых ветвей, охватывающих описанные выше точки, и из нижней ветви, близкой к горизонтальной оси. При

$$F = \frac{2\alpha}{\sqrt{27}} \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{3/2} \approx 0.1886$$

центральная замкнутая ветвь смыкается с нижней ветвью в точке

$$\omega = 0, \rho = \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{\gamma}{\alpha}}.$$

При дальнейшем увеличении  $F$  нижняя ветвь смыкается с замкнутыми кривыми, окружающими точки, соответствующие автомодуляционным модам (кривые  $d$  на рис. 3). После этого резонансная кривая превращается в единственную ветвь, охватывающую все три точки сверху (кривая  $e$ ). Далее аналогичные трансформации происходят с ветвями, сформировавшимися на основе высших автомодуляционных мод, которые на рисунке не показаны.

Таким образом, в области достаточно малых амплитуд резонансные кривые имеют тот же вид, что и при синхронизации системы с одной степенью свободы (см., например, [1, 5]). Однако в области больших амплитуд они существенно отличаются, что, очевидно, обусловлено многомодовым характером распределенной системы с запаздыванием.

Для того чтобы составить окончательное представление о режимах синхронизации, необходимо исследовать резонансные кривые на устойчивость. Зададим

<sup>1</sup>Напомним, что мы рассматриваем уравнение как модель системы типа усилитель – фильтр – линия задержки, где переменная  $A$  имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний. Тогда  $\omega$  есть отстройка частоты от центра полосы пропускания фильтра [8].

малое возмущение одночастотного решения (2), которое выберем в виде двух сателлитов, симметрично отстоящих от основной частоты

$$A = (A_0 + a_+ e^{i\Omega t} + a_- e^{-i\Omega t}) e^{i\omega t}, \quad (7)$$

где  $\Omega$  – частота модуляции. Подставим (7) в исходное уравнение (1) и линеаризуем, сохранив только слагаемые, линейные по малым возмущениям. В результате после не представляющих принципиальной сложности преобразований придем к комплексному характеристическому уравнению

$$\left( (i\Omega + \gamma)^2 + \omega^2 \right) e^{2i\Omega} - 2\alpha(1 - 2\rho) [(i\Omega + \gamma) \cos(\theta - \omega) + \omega \sin(\theta - \omega)] e^{i\Omega} + \alpha^2(1 - \rho)(1 - 3\rho) = 0. \quad (8)$$

На границе устойчивости частота  $\Omega$  чисто вещественна. Разделив (8) на два вещественных уравнения, получим

$$(\omega^2 + \gamma^2 - \Omega^2) \cos 2\Omega - 2\gamma\Omega \sin 2\Omega + 2\alpha(1 - 2\rho) [\Omega \sin \Omega \cos(\theta - \omega) - \cos \Omega (\gamma \cos(\theta - \omega) + \omega \sin(\theta - \omega))] + \alpha^2(1 - \rho)(1 - 3\rho) = 0, \quad (9)$$

$$(\omega^2 + \gamma^2 - \Omega^2) \sin 2\Omega + 2\gamma\Omega \cos 2\Omega - 2\alpha(1 - 2\rho) [\Omega \cos \Omega \cos(\theta - \omega) + \sin \Omega (\gamma \cos(\theta - \omega) + \omega \sin(\theta - \omega))] = 0. \quad (10)$$

Соотношения (9), (10) фактически представляют собой уравнения границ областей устойчивости режимов синхронизации на плоскости  $\omega$ ,  $\rho$ , заданные в параметрическом виде. На рис. 4 приведены границы этих областей, наложенные на резонансные кривые, построенные при различных значениях параметров.

Отметим, что уравнение (10) имеет очевидное решение  $\Omega = 0$ . Оно соответствует известному механизму синхронизации посредством захвата частоты, когда в фазовом пространстве происходит образование резонансного цикла на торе [4, 5, 7]. В этом случае из уравнения (9) получаем

$$(\omega^2 + \gamma^2) - 2\alpha(1 - 2\rho) [(\gamma \cos(\theta - \omega) + \omega \sin(\theta - \omega))] + \alpha^2(1 - \rho)(1 - 3\rho) = 0. \quad (11)$$

На плоскости  $\omega$ ,  $\rho$  границы захвата частоты, построенные согласно (11), имеют вид замкнутых кривых, проходящих через точки, отвечающие стационарным состояниям автономного генератора. Внутри этих кривых режимы синхронизации неустойчивы (на рис. 4 они выделены темно-серым цветом), снаружи – устойчивы.

Кроме того, уравнения (9), (10) имеют решения, для которых  $\Omega \neq 0$ , причем таких решений бесконечное число, так как уравнения являются трансцендентными. Соответственно, на плоскости  $\omega$ ,  $\rho$  имеется, вообще говоря, бесконечное число линий, соответствующих появлению неустойчивых возмущений с различными частотами. Необходимо отобрать те из них, которые ограничивают область устойчивости синхронного режима. Для этого проводилось сопоставление результатов решения уравнений (9), (10) и непосредственного численного интегрирования исходного уравнения (1) при помощи метода Рунге–Кутты 4-го порядка, адаптированного для

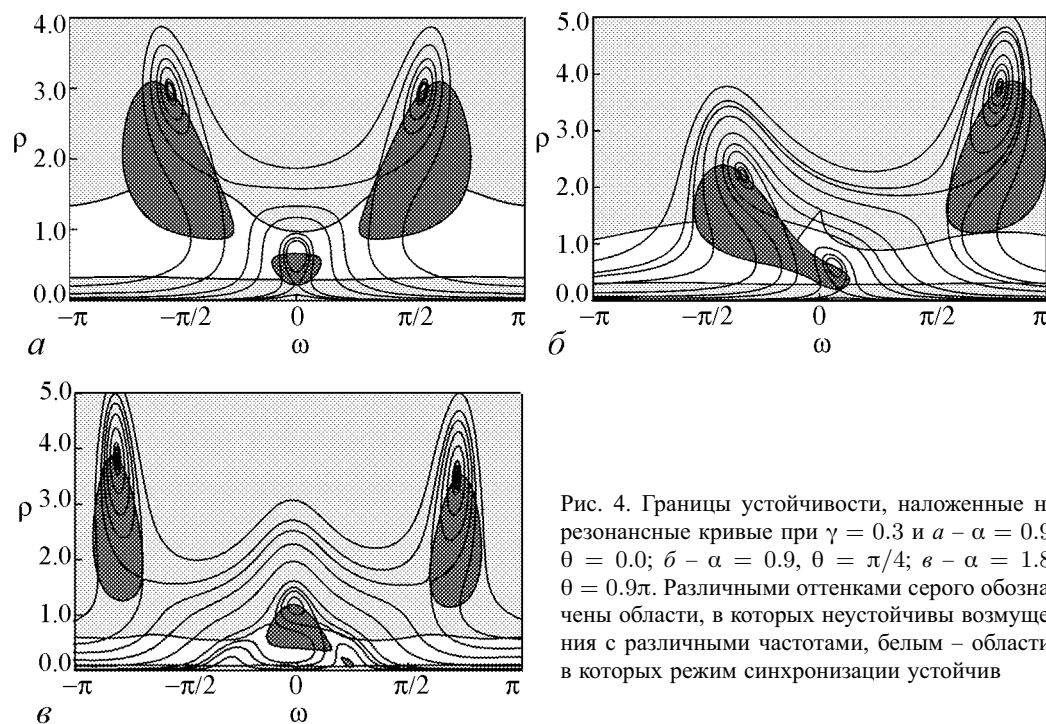


Рис. 4. Границы устойчивости, наложенные на резонансные кривые при  $\gamma = 0.3$  и  $a - \alpha = 0.9$ ,  $\theta = 0.0$ ;  $\delta - \alpha = 0.9$ ,  $\theta = \pi/4$ ;  $\epsilon - \alpha = 1.8$ ,  $\theta = 0.9\pi$ . Различными оттенками серого обозначены области, в которых неустойчивы возмущения с различными частотами, белым – области, в которых режим синхронизации устойчив

уравнений с запаздыванием [9]. В итоге можно получить окончательную картину резонансных кривых, представленную на рис. 4. Режим синхронизации устойчив в областях, показанных на рисунке белым цветом. Области, в которых неустойчивы возмущения с ненулевой частотой, закрашены светло-серым.

Нижняя часть картины, представленной на рис. 4, а, в целом аналогична классической картине резонансных кривых при синхронизации системы с одной степенью свободы (см., например, [1, 5]). В области малых амплитуд переход из неустойчивой области в устойчивую соответствует возникновению синхронизации. При малых расстройках синхронизация происходит через захват частоты, при больших – через подавление частоты, когда в фазовом пространстве тор мягко превращается в предельный цикл. Однако резонансные кривые неустойчивы как в области малых, так и в области больших амплитуд. При переходе в верхнюю неустойчивую область происходит возбуждение паразитных составляющих, примерно соответствующих частотам автомодуляционных мод автономного генератора (см. разд. 1). Хотя в автономном генераторе автомодуляции при выбранных значениях параметров нет, при интенсивном внешнем воздействии амплитуда колебаний увеличивается и возбуждение автомодуляционной моды становится возможным. Таким образом, имеет место автомодуляция, инициированная внешним сигналом.

При отстройке от центра зоны генерации (рис. 4, б) резонансные кривые становятся асимметричными. Собственные частоты смещаются вправо, причем частота автомодуляционной моды с номером  $n = -1$  приближается к основной, а ее амплитуда, соответственно, уменьшается (см. формулу (5)). Частота моды с  $n = 1$ , напротив, удаляется от основной, а ее амплитуда увеличивается<sup>2</sup>. В результате форма

<sup>2</sup>Разумеется, это справедливо при  $\theta > 0$ , а при  $\theta < 0$  мы имеем противоположную картину.

областей неустойчивости искажается, в частности, области захвата частоты, которые формируются на базе основной и одной из автомодуляционных мод, сливаются воедино. Искажается также граница возникновения автомодуляции, на которой образуется излом вблизи частоты  $\omega = 0$ . Это связано с тем, что слева и справа от излома автомодуляция возникает с различными частотами. Действительно, как следует из формулы (3), при  $\theta = 0$  собственные частоты симметричны относительно нуля,  $\omega_{-n} = -\omega_n$ . Следовательно, когда возникает автомодуляция, фактически возбуждаются обе моды, частоты которых  $\omega_{\pm 1}$  расположены симметрично относительно основной. При  $\theta \neq 0$  такой симметрии нет, поэтому возбуждается одна из мод, для которой ниже порог самовозбуждения. В неавтономном генераторе это мода, частота которой ближе к частоте воздействия.

Наиболее сложный вид имеет картина резонансных кривых вблизи границ зон генерации (рис. 4, в), где возможно самовозбуждение двух мод ( $n = -2, 0$ ). В этом случае значение  $\alpha = 0.9$  лежит ниже порога самовозбуждения, поэтому мы увеличили его до  $\alpha = 1.8$ , что по-прежнему соответствует устойчивой одночастотной генерации в автономной системе. При малых  $F$  резонансные кривые имеют два максимума в окрестности собственных частот  $\omega_0 \approx 0.464\pi$  и  $\omega_{-2} \approx -0.647\pi$ , которые расположены примерно симметрично относительно нуля. Частота автомодуляционной моды  $\omega_{-1}$ , напротив, оказывается вблизи нуля. На рис. 4, в масштаб изменения  $\rho$  и  $\omega$  увеличен по сравнению с рис. 4, а, б, что позволяет видеть характерные структуры резонансных кривых в окрестности автомодуляционных частот  $\omega_{-3} \approx -1.62\pi$  и  $\omega_1 \approx 1.42\pi$ . Как видим, картина резонансных кривых, приведенная на рис. 4, в, качественно отличается от системы с одной степенью свободы, в чем наглядно проявляется распределенный характер системы.

Наконец, обсудим форму языков синхронизации, то есть областей на плоскости параметров частота воздействия  $\omega$  – амплитуда воздействия  $F$ , в которых синхронный режим устойчив (рис. 5). Они также существенно отличаются от языков синхронизации в сосредоточенных системах. Прежде всего, языки синхронизации имеют как внешнюю, так и внутреннюю границу. Выше внутренней границы, показанной на рис. 5 штриховыми линиями, имеет место автомодуляция, инициированная внешним сигналом. В центре зоны генерации язык синхронизации симметричен

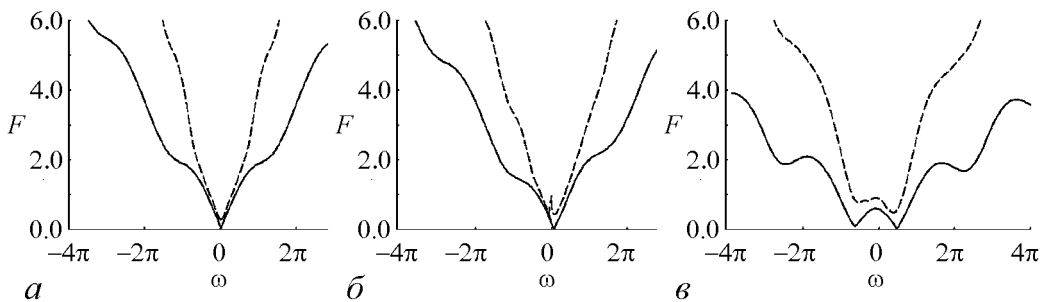


Рис. 5. Языки синхронизации системы (1) при  $\alpha = 0.9$ ,  $\theta = 0.0$  (а);  $\alpha = 0.9$ ,  $\theta = \pi/4$  (б);  $\alpha = 1.8$ ,  $\theta = 0.9\pi$  (в);  $\gamma = 0.3$

относительно прямой  $\omega = 0$ . Его границы имеют волнистую форму, что обусловлено резонансами с различными собственными модами. Таким образом, высшие моды оказывают влияние на динамику неавтономного генератора, даже если их частоты лежат далеко от центра полосы пропускания. Разумеется, это влияние выражено тем сильнее, чем больше параметр  $\gamma$ , определяющий ширину полосы пропускания.

При  $\theta = \pi/4$  язык становится асимметричным (рис. 5, б). Обратим внимание на сингулярность, возникающую на внутренней границе языка при  $\omega \approx 0$ ; ее появление, как уже обсуждалось выше, вызвано конкуренцией двух автомодуляционных мод. Кроме того, следует отметить, что язык синхронизации сложным образом

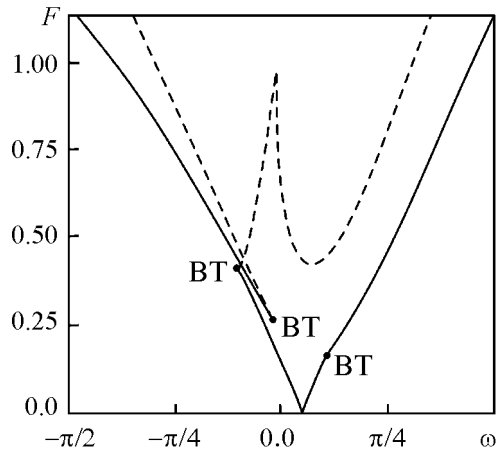


Рис. 6. Увеличенный фрагмент языка синхронизации, изображенного на рис. 5, б

трансформируется в области малых расстройек. Действительно, как видно из рис. 4, б, слияние двух областей захвата частоты приводит к тому, что область устойчивости синхронного режима распадается на две изолированные части. Соответственно, и язык синхронизации в этом случае также состоит из двух частей. Это хорошо видно на рис. 6, на котором приведен увеличенный фрагмент языка синхронизации. На рисунке показаны точки Богданова–Тakensа [10], в которых происходит пересечение линий захвата и подавления частоты и которые фактически определяют конфигурацию языка на плоскости параметров. Видно, что две части языка перекрываются в небольшой области, в которой, соответственно, присутствует бистабильность. Специфическая «тонкая структура» языков синхронизации в системе с запаздыванием, которая возникает благодаря слиянию областей захвата частоты различных собственных мод, более подробно будет обсуждена в отдельной работе.

В окрестности границы зон генерации язык синхронизации принимает наиболее сложную форму (рис. 5, в), фактически образуются два языка, соответствующие двум собственным модам, причем правый утыкается в горизонтальную ось в точке  $\omega = \omega_0$ , а кончик левого языка в точке  $\omega = \omega_{-2}$  близок к оси, однако не примыкает к ней вплотную. Это обусловлено тем, что условия самовозбуждения при данном значении параметра  $\alpha$  выполнены только для моды с  $n = 0$ .

## Выводы

В работе рассмотрены режимы вынужденной синхронизации при воздействии внешнего гармонического сигнала на автоколебательную систему с запаздыванием и кубической нелинейностью. В случае, когда автономный генератор находится в режиме одночастотных колебаний, теоретически проанализированы резонансные кривые и языки синхронизации. В области малых амплитуд картина синхронизации



достаточно близка к классическому случаю синхронизации автогенератора с одной степенью свободы, однако с ростом амплитуды появляется целый ряд отличий. Эти отличия связаны с наличием бесконечного числа собственных мод, то есть, по существу, с тем, что система имеет распределенную природу. В частности, форма резонансных кривых в области больших амплитуд и расстроек усложняется, появляются многочисленные максимумы на частотах автомодуляционных мод. В области больших амплитуд режимы синхронизации становятся неустойчивыми и возникает автомодуляция, инициированная внешним воздействием. Соответственно, усложняются и языки синхронизации. Они имеют как внешнюю, так и внутреннюю границу, причем эти границы являются волнистыми, что обусловлено резонансами с автомодуляционными модами. Вблизи границы зон генерации наблюдается раздвоение языка синхронизации, что обусловлено конкуренцией двух собственных мод генератора с разными собственными частотами. Теоретические результаты полностью согласуются с результатами численного моделирования исходной системы (1).

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-02-00707) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1738). Работа Н.М. Рыскина поддержана также фондом «Династия».*

## **Библиографический список**

1. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997.
2. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
3. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
4. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
5. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
6. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Наука, Физматлит, 2002.
7. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
8. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 7. С. 1.
9. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990.
10. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: РХД, 2002.

*Поступила в редакцию 23.06.2008  
После доработки 19.11.2008*

**SYNCHRONIZATION OF PERIODIC OSCILLATION  
IN A DELAYED-FEEDBACK OSCILLATOR  
BY EXTERNAL HARMONIC DRIVING**

*N.M. Ryskin, S.A. Usacheva*

Dynamics of a delayed-feedback oscillator with cubic nonlinearity driven by an external harmonic signal is considered in a case when in the free-running oscillator periodic regime is realized. Resonance curves, i.e. amplitude–frequency responses of the oscillator are derived analytically. Stability conditions for synchronization regime are analyzed. Synchronization tongues on the driving amplitude – driving frequency parameter plane are presented. General differences from classical picture of synchronization of the systems with one degree of freedom are discussed.

*Keywords:* Delayed-feedback oscillator, synchronization, resonance curves, synchronization tongues.



*Рыскин Никита Михайлович* – родился в 1966 г. в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 г. работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).

E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



*Усачева Светлана Александровна* – родилась в Саратове (1987). Студентка 5 курса факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика автоколебательных систем с запаздыванием. Участник (с докладами) 6 конференций по нелинейной динамике.

E-mail: usasva@mail.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83